Rovnice a soustavy rovnic

Tomáš Raček

Soustavy lineárních rovnic – řádkový pohled

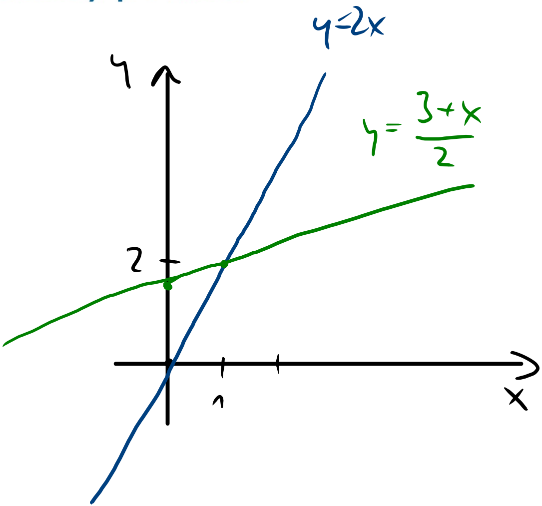
$$2x - y = 0 \rightarrow \boxed{y = 2x}$$
$$-x + 2y = 3 \quad -x + 4x = 3$$

$3x = 3$

$x = 1$

$y = 2$

$$\boxed{y = \frac{3+x}{2}}$$



Soustavy lineárních rovnic – sloupcový pohled

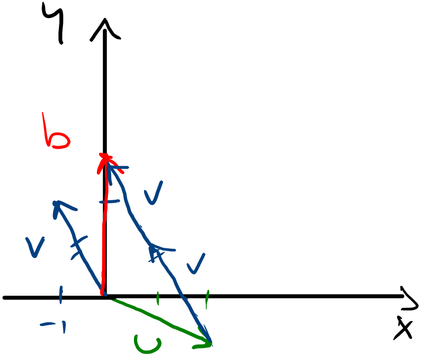
$$\begin{aligned} 2x - y &= 0 \\ -x + 2y &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Maticový zápis $Ax = b$

$$x_1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$1 \cdot u + 2 \cdot v = b$$



Násobení matic a lineární kombinace

"SEČTI 1. A 2. SL."

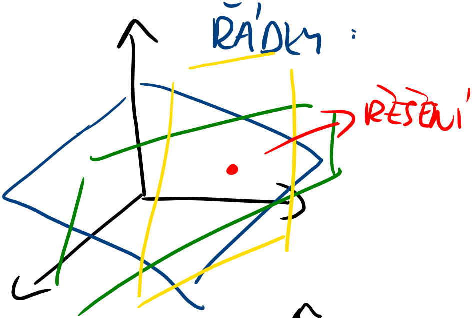
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 7 & 0 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

"ZAPIŠ 1. SL"

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Tři rovnice o třech neznámých

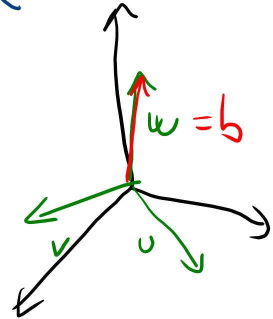
$$2x - y = 0$$
$$-x + 2y - z = -1$$
$$-3y + 4z = 4$$



SLOUPCE :

$$x \cdot \underbrace{\begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix}}_{u} + y \underbrace{\begin{bmatrix}-1\\2\\-3\end{bmatrix}}_{v} + z \underbrace{\begin{bmatrix}0\\-1\\4\end{bmatrix}}_{w} = \underbrace{\begin{bmatrix}0\\-1\\4\end{bmatrix}}_{b}$$

$x = 0$ $\quad y = 0$ $\quad z = 1$



Řešitelnost soustavy lineárních rovnic

$Ax = b$ má řešení $\Leftrightarrow$ vektor b je lineární kombinací sloupců matice A

Př.:

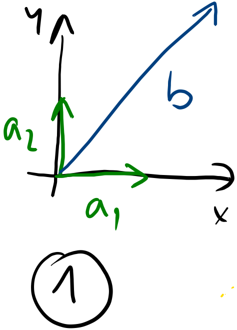
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

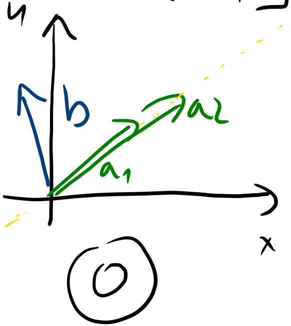
$$1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + (-1) \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

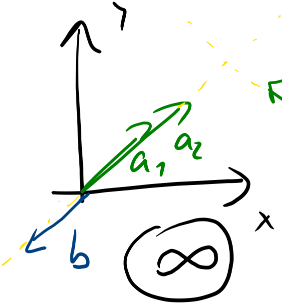
Řešitelnost soustavy lineárních rovnic – příklady

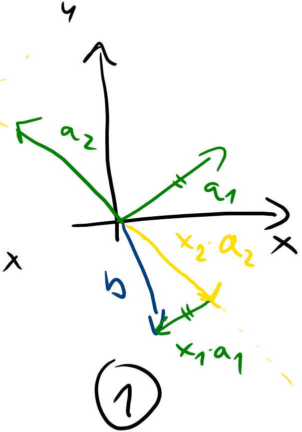
2D

$$Ax = b \qquad A = \begin{bmatrix} | & | \\ a_1 & a_2 \\ | & | \end{bmatrix}$$









Homogenní systémy lineárních rovnic

$Ax = 0$ $(b = 0)$ $\rightarrow$ VŽDY ŘEŠENÍ $(x = 0)$
TRIVIÁLNÍ

Př: $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\hookrightarrow x_1 = x_2 = 0$

LN

LZ:

$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$x_1 = 2, \; x_2 = -1$

$x_1 = 4, \; x_2 = -2$

$\vdots$

∞ MNOHO ŘEŠENÍ

Příklad

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

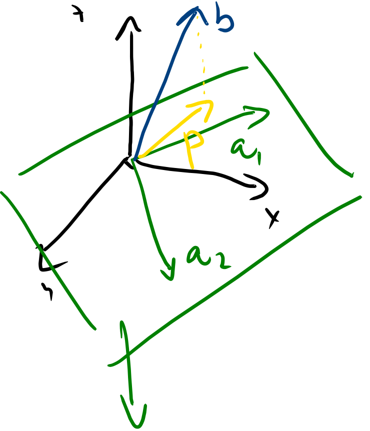
$0 \cdot k + 0 \cdot q = -1$

$0 = -1$

↳ SPOR

↳ SOUSTAVA NEMÁ ŘEŠENÍ

Soustavy lineárních rovnic bez řešení I



ROVINA GENEROVANÁ $\langle a_1; a_2 \rangle$

(VŠECHNY LIN. KOMBINACE a_1, a_2)

$Ax = b$ $\quad A = \begin{bmatrix} | & | \\ a_1 & a_2 \\ | & | \end{bmatrix}$

a_1, a_2 jsou LN
$\in \mathbb{R}^3$

b neleží v rovině gen. $\langle a_1, a_2 \rangle$

→ neexistuje lin. komb.

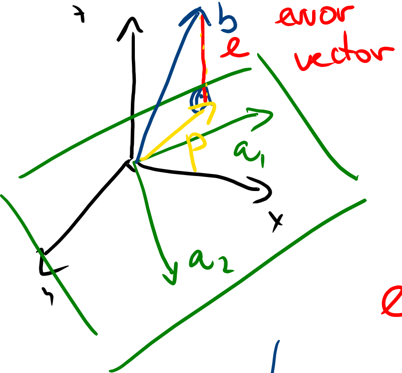
$x_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot a_2 = b$

→ $Ax = b$ nemá řešení

NEJBLIŽŠÍ ŘEŠENÍ?

→ PROJEKCE b do rovin $\langle a_1; a_2 \rangle$

Soustavy lineárních rovnic bez řešení II



$$p = \hat{x}_1 \cdot a_1 + \hat{x}_2 \cdot a_2$$

$$p = \begin{bmatrix} | & | \\ a_1 & a_2 \\ | & | \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} = A\hat{x}$$

$$e = b - p$$

$$e \perp p$$

$\hookrightarrow a_1 \perp e \iff a_1^T \cdot e = 0$

$\hookrightarrow a_2 \perp e \iff a_2^T \cdot e = 0$

KOLMOST

$\underline{\text{př.}}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = 0$$

Soustavy lineárních rovnic bez řešení III

METODA NEJMENŠÍCH ČTVERCŮ

$$a_1^T \cdot e = 0$$
$$a_2^T \cdot e = 0$$

$$\begin{bmatrix} - a_1^T - \\ - a_2^T - \end{bmatrix} \cdot e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow A^T \cdot e = 0$$

$$p = A\hat{x}$$
$$e = b - p = b - A\hat{x}$$

$$A^T(b - A\hat{x}) = 0$$

PŮVODNĚ

$$Ax = b$$

$$\boxed{A^T A \hat{x} = A^T b}$$

MÁ ŘEŠENÍ

Příklad – nejbližší řešení

$$\underbrace{A^T A \hat{x} = A^T b}$$

$$Ax = b$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\underset{A^T}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}} \cdot \underset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}} \cdot \begin{bmatrix} \hat{k} \\ \hat{q} \end{bmatrix} = \underset{A^T}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}} \cdot \underset{b}{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}}$$

$$\begin{bmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{k} \\ \hat{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 5 \end{bmatrix}$$

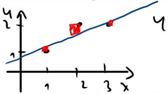
Příklad – déjà vu

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{k} \\ \hat{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Metoda nejmenších čtverců III – příklad



$y = kx + q$

$$\left.\begin{aligned} 1 &= 1k + q \\ 2 &= 2k + q \\ 2 &= 3k + q \end{aligned}\right\} \text{ soustava nemá řešení!}$$

$$E(k,q) = ((k1+q)-1)^2 + ((k2+q)-2)^2 + ((k3+q)-2)^2$$

$$\frac{\partial E(k,q)}{\partial k} = 2(k+q-1) + 2(2k+q-2)\cdot 2 + 2(3k+q-2)\cdot 3 = 28k + 12q - 22$$

$$\frac{\partial E(k,q)}{\partial q} = 2(k+q-1) + 2(2k+q-2) + 2(3k+q-2) = 12k + 6q - 10$$

Metoda nejmenších čtverců IV – příklad

$28k + 12q = 22$

$12k + 6q = 10$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 14 & 6 & 11 \\ 6 & 3 & 5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 1 \\ 6 & 3 & 5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{array}\right]$$

$2k = 1 \rightarrow k = 1/2$

$3q = 2 \qquad q = 2/3$

$y = 1/2\, x + 2/3$

Lineární kombinace funkcí I

Př: $a x^4 + b x^3 + c x^2 + d x + e \cdot 1$ FUNKCE

KOEFICIENTY (= PARAMETRY MODELU)

Př: $a \cdot \sin x + b \cdot \cos(5x)$

Př: $a \cdot e^{bx} \rightarrow$ NENÍ LINEÁRNÍ V PARAMETRECH

Lineární kombinace funkcí II

Př: $a \cdot \sin x + b \cdot \cos(5x)$

DATA:

$[1;1]$
$[2;2]$
$[3;2]$
$[4;5]$

$x;y$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \sin 1 & \cos 5 \\ \sin 2 & \cos 10 \\ \sin 3 & \cos 15 \\ \sin 4 & \cos 20 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}}_{b}$$

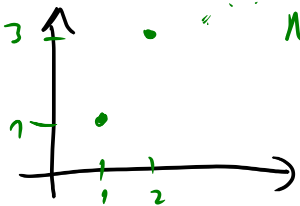
↳ SOUSTAVA LIN. ROVNIC

→ NEMÁ ŘEŠENÍ

→ METODA NEJM. ČTVERCŮ

Nelinární funkce (v parametrech)

$$y = a\cdot e^{bx}$$



N bodů

$$E(a,b) = \left(a\cdot e^{1\cdot b} - 1\right)^2 + \left(a\cdot e^{2b} - 3\right)^2 + \dots$$

$$\frac{\partial E}{\partial a} = 2\left(a\cdot e^{b} - 1\right)\cdot e^{b} + 2\left(a e^{2b} - 3\right)\cdot e^{2b} + \dots$$

$$\frac{\partial E}{\partial b} = \dots$$

SOUSTAVA NELINEÁRNÍCH ROVNIC

Nelineární rovnice

LINEÁRNÍ ROVNICE

př. $ax+b=0 \rightarrow x=-\frac{b}{a}$

NELINEÁRNÍ ROVNICE

př. $x=\cos x$

↳ NEMÁ ANALYTICKÉ ŘEŠENÍ

ŘEŠENÍ? → OBECNĚ ANALYTICKY — VĚTŠINOU NE :(

→ NUMERICKY — POČÍTAČ

Numerické metody

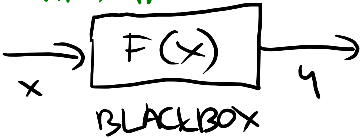
Příklady:

- řešení rovnice (soustavy rovnic)
- optimalizace → HLEDÁNÍ MIN / MAXIMA

Princip

→ VÝPOČTY FCNÍ HODNOTY

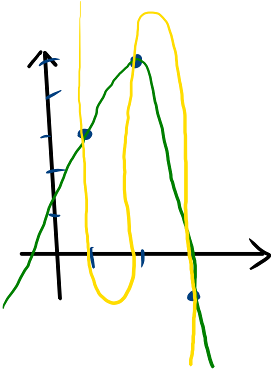
→ "CHYTRÉ HÁDÁNÍ"



$x = 1 \quad y = 3$

$x = 2 \quad y = 5$

$x = 3 \quad y = -1$



Hledání kořene – naivně

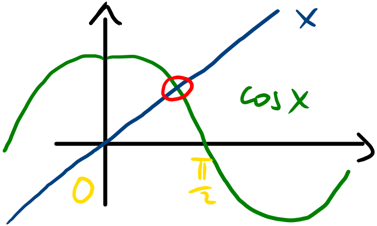
$x = \cos x$

LZE PŘEPSAT NA $f(x) = 0$

$\cos x - x = 0$

HLEDÁNÍ KOŘENE C

$F(C) = 0$



SAMPLING

$[0; \frac{\pi}{2}]$

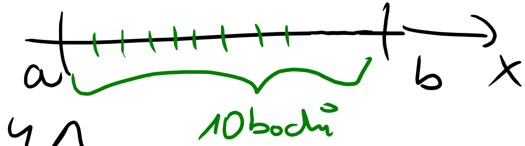
$[0; 0{,}01; 0{,}02, \ldots, \frac{\pi}{2}]$

KROK 0,01

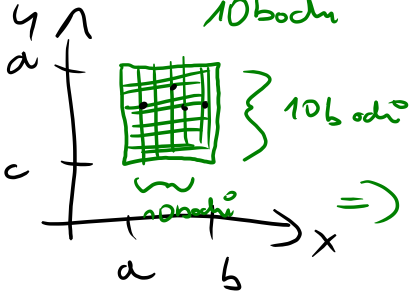
```
x = 0.66        cos(x) - x =  +0.130
x = 0.67        cos(x) - x =  +0.114
x = 0.68        cos(x) - x =  +0.098
x = 0.69        cos(x) - x =  +0.081
x = 0.70        cos(x) - x =  +0.065
x = 0.71        cos(x) - x =  +0.048
x = 0.72        cos(x) - x =  +0.032
x = 0.73        cos(x) - x =  +0.015
x = 0.74        cos(x) - x =  -0.002
x = 0.75        cos(x) - x =  -0.018
x = 0.76        cos(x) - x =  -0.035
x = 0.77        cos(x) - x =  -0.052
x = 0.78        cos(x) - x =  -0.069
x = 0.79        cos(x) - x =  -0.086
x = 0.80        cos(x) - x =  -0.103
x = 0.81        cos(x) - x =  -0.121
x = 0.82        cos(x) - x =  -0.138
```

Curse of dimensionality

FCE 1 PROMĚNNÉ



FCE 2 PROMĚNNÝCH



$\Rightarrow 10^2 = 100$

FCE 10 PROMĚNNÝCH

$\boxed{\text{VOLBA INTERVALU?}}$

?

10^{10} = HODNĚ

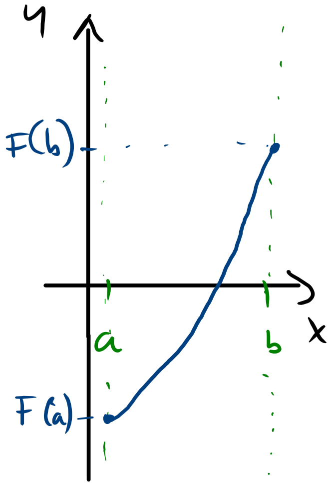
Bolzanova věta

① $F(x)$ je spojitá na $[a;b]$

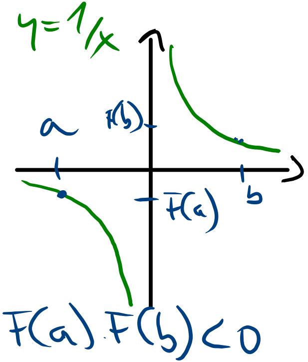
② $F(a)\cdot F(b) < 0$

$\Downarrow$

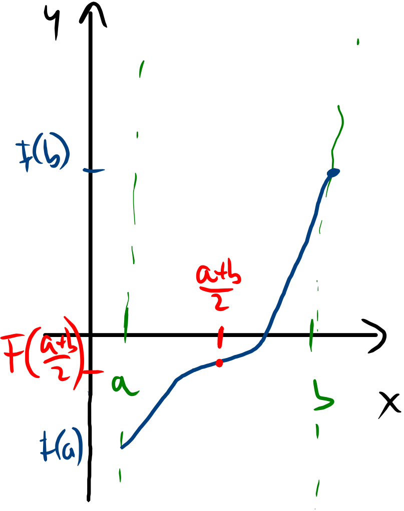
$\exists c \in [a;b]:$
$F(c)=0$



SPOJITOST



Metoda půlení intervalu



$$\cos x - x = 0$$

$$[0; \pi/2]$$

$$F\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot F(b) < 0$$

$\rightarrow$ kořen $\in \left[\frac{a+b}{2}; b\right]$

$$F(a) \cdot F\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$$

$\rightarrow$ kořen $\in \left[a; \frac{a+b}{2}\right]$

```
Search in interval [0.00; 1.57]
Search in interval [0.00; 0.79]
Search in interval [0.39; 0.79]
Search in interval [0.59; 0.79]
Search in interval [0.69; 0.79]
Search in interval [0.74; 0.79]
Search in interval [0.74; 0.76]
Search in interval [0.74; 0.75]
Search in interval [0.74; 0.74]

'Found solution approximately at: 0.739'
```

Shrnutí

Lineární rovnice

Soustavy lineárních rovnic

SNADNÉ (PRACNÉ)

ČLOVĚK / POČÍTAČ (GEM)

Nelineární rovnice

Soustavy nelineárních rovnic

OBECNĚ OBTÍŽNÉ

POČÍTAČ + NUMERICKÉ METODY