Skladanie vĺn

Obecný tvar vlny: $E(x,t) = E_0 \cos(kx - \omega t + \varphi)$; $k = \frac{2\pi}{\lambda}$; $\omega = \frac{2\pi}{T}$; φ ... počiatočná fáza

Konštruktívna interferencia

v čase $t = t_1$: $E_1(x, t = t_1) = E_0 \cos(kx - \omega t_1)$
$E_2(x, t = t_1) = E_0 \cos(kx - \omega t_1)$ $\Big\} (+)$

$\Delta\varphi = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$
↳ zmena poč. fáze E_1 voči E_2

odpovedá posunu o $0, \lambda, 2\lambda, 3\lambda, \dots$

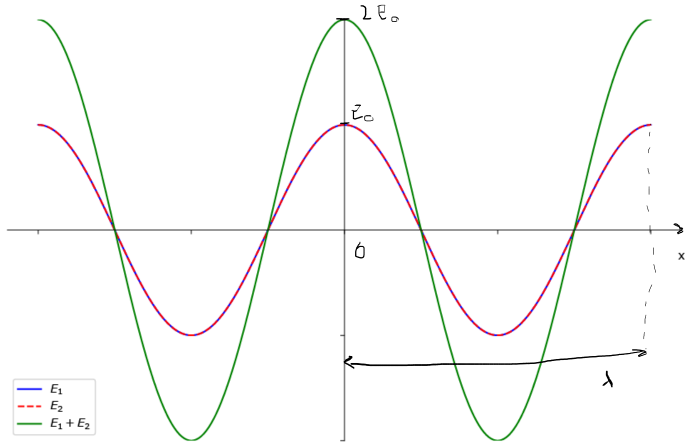
$\lambda \rightarrow$ vlnová dĺžka

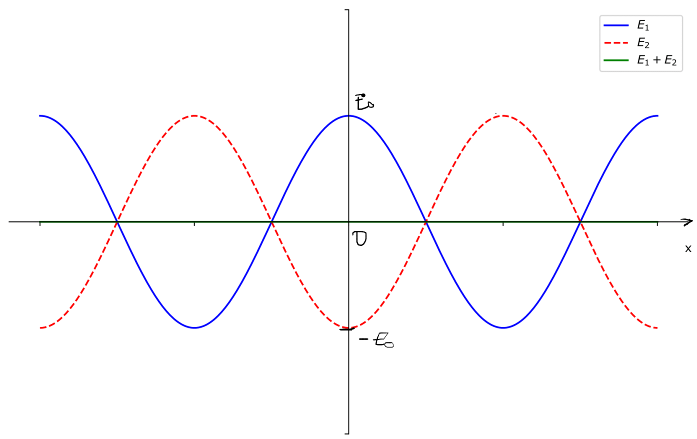
Deštruktívna interferencia

$E_1(x, t = t_1) = E_0 \cos(kx - \omega t_1)$
$E_2(x, t = t_1) = E_0 \cos(kx - \omega t_1 + \varphi)$ $\Big\} (+)$

$\Delta\varphi = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots$

odpovedá posunu o $\frac{\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}, \frac{5\lambda}{2}, \dots$





15. Stínítko se dvěma malými otvory vzdálenými $d = 0{,}1$ mm je osvětleno rtuťovou výbojkou. Ze spektra Hg je přes filtr propuštěno pouze zelené monochromatické světlo s vlnovou délkou $\lambda = 546$ nm. Na rovinném stínítku ve vzdálenosti $D = 2$ m od prvního stínítka pozorujeme interferenční jev (Youngův pokus). Určete polohu (úhlovou i délkovou na stínítku):

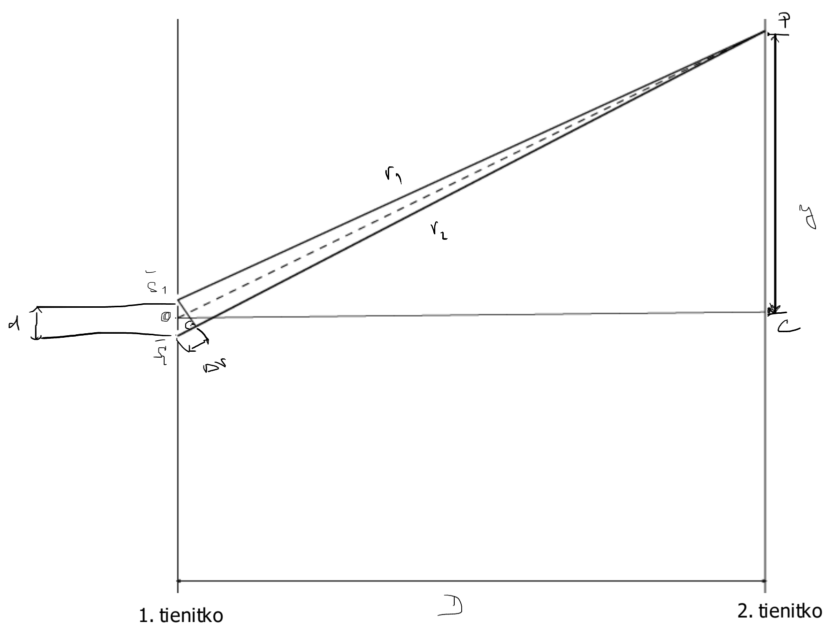
(a) prvního minima ϑ_{m1}, y_{m1},

(b) desátého maxima ϑ_{M10}, y_{M10}.

(c) Nakreslete závislost intenzity světla I na vzdálenosti y od středu stínítka.

Svetlo dopadá na štrbiny a tie sa stávajú sekundárnym zdrojom žiarenia. Vlny z týchto zdrojov sa skladajú (interferujú) a na druhom tienitku pozorujeme interferenčný obrazec (striedanie maxím a miním intenzity).

$d = 0{,}1\,\text{mm} = 10^{-4}\,\text{m}$
$\lambda = 546\,\text{nm} = 5{,}46 \cdot 10^{-7}\,\text{m}$
$D = 2\,\text{m}$



Fraunhoferova aproximácia:
$d \ll \sqrt{D\lambda}$

overíme či platí... $10^{-4} \ll \sqrt{2 \cdot 5{,}46 \cdot 10^{-7}}$
$10^{-4} \ll \sqrt{10^{-6}}$
$10^{-4} \ll 10^{-3}$ ✓

$|PC| = y$; $|0Š_1| = |0Š_2| = \frac{d}{2}$; $|Š_1Š_2| = d$

Δr ... dráhový rozdiel, t.j. rozdiel dráh, ktoré ušla vlna zo štrbiny Š1 voči vlne zo štrbiny Š2

$\Delta r = r_2 - r_1$ $\qquad$ $\operatorname{tg} \vartheta = \frac{y}{D}$

Z Pytagorovej vety: $r_1 = \sqrt{D^2 + (y - \frac{d}{2})^2}$ $\quad r_2 = \sqrt{D^2 + (y + \frac{d}{2})^2}$

$$\Delta r = \sqrt{D^2 + (y + \frac{d}{2})^2} - \sqrt{D^2 + (y - \frac{d}{2})^2} = D\left[\sqrt{1 + (\underbrace{\frac{y}{D} + \frac{d}{2D}}_{\text{malé číslo}})^2} - \sqrt{1 + (\underbrace{\frac{y}{D} - \frac{d}{2D}}_{\text{malé číslo}})^2}\right]$$

$d << D$ a $y < D \Rightarrow$ Taylorov rozvoj

$\sqrt{1+\varepsilon} \approx 1 + \frac{1}{2}\varepsilon$ ak $\varepsilon << 1$

$$\Delta r \approx D\left[\cancel{1} + \frac{1}{2}\left(\frac{y}{D} + \frac{d}{2D}\right)^2 - \cancel{1} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{D} - \frac{d}{2D}\right)^2\right] = \frac{1}{2}D\left[\cancel{\left(\frac{y}{D}\right)^2} + \frac{yd}{D^2} + \cancel{\left(\frac{d}{2D}\right)^2} - \cancel{\left(\frac{y}{D}\right)^2}\right.$$
$$\left. + \frac{yd}{D^2} - \cancel{\left(\frac{d}{2D}\right)^2}\right] = \frac{1}{2}D\,2\,\frac{yd}{D^2} = \frac{yd}{D}$$

$$\boxed{\Delta r \approx \frac{yd}{D}}$$

Podmienka pre interferenčné maximum: $\Delta\varphi = 0, 2\pi, 4\pi, ... \longrightarrow \boxed{\Delta r = M\lambda}$!

Podmienka pre interferenčné minimum: $\Delta\varphi = \pi, 3\pi, 5\pi, ... \longrightarrow \boxed{\Delta r = (m + \frac{1}{2})\lambda}$!

M, m sú celé čísla

porovnáme Δr z geometrie experimentu a podmienok...

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{max}: \quad M\lambda = \frac{yd}{D} \\ \text{min}: \quad (m + \frac{1}{2})\lambda = \frac{yd}{D} \end{array}}$$

a) $y_{m1} = ?$

$\vartheta_{m1} = ?$

$m = 0$

$\frac{1}{2}d = \frac{y_{m1}d}{D}$

$$y_{m1} = \frac{1}{2}\frac{\lambda D}{d} = \frac{1}{2}\cdot\frac{5{,}46\cdot 10^{-7}\cdot 2}{10^{-4}} = \underline{\underline{5{,}46\cdot 10^{-3}\,\text{m}}}$$

$$\vartheta_{m1} = \text{arctg}\left(\frac{y_{m1}}{D}\right) = \underline{\underline{0{,}156^\circ}}$$

b) $y_{M10} = ?$

$\vartheta_{M10} = ?$

$M = 9$ → zmena oproti cvičeniu !

$10\lambda = \frac{y_{M10}d}{D}$

$$y_{M10} = 9\frac{\lambda D}{d} = 9\cdot\frac{5{,}46\cdot 10^{-7}\cdot 2}{10^{-4}} = \underline{\underline{9{,}8\,\text{cm}}}$$

$$\vartheta_{M10} = \text{arctg}\left(\frac{y_{M10}}{D}\right) = \underline{\underline{2{,}8^\circ}}$$

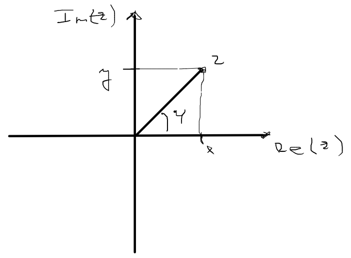
c) Uvažujme intenzitu elektrického poľa $\bar{E}(\bar{r},t)$ (elektrickú zložku svetelnej vlny) ako fázor, t.j. vektor v komplexnej rovine (viď zápis $\bar{E}(\bar{r},t)$ v prvom cvičení)

Intenzita svetelného žiarenia $I = |\bar{E}|^2$

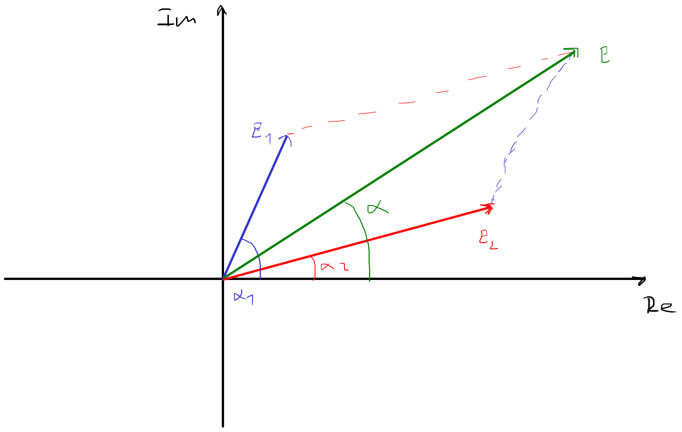
$\Rightarrow$ sčítame vlny z prvej a druhej štrbiny (el. intenzity) a umocníme, čím dostaneme požadovanú intenzitu I (y)

Odbočka ku komplexným číslam

Komplexné číslo z má reálnu a imaginárnu časť. Môžeme ho zapísať ako $z = x + iy = |z|e^{i\varphi}$; $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ – veľkosť



$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$



$\bar{E}_1 + \bar{E}_2 = \bar{E}$ ⟶ sčítame ako vektory

$\alpha_1 - \alpha_2 = \alpha$

Kosínová veta

$E^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\cos\alpha$

Keďže obe štrbiny sa stávajú sekundárnym zdrojom od rovnakého primárneho zdroja, píšeme

$E^2 = E_0^2 + E_0^2 + 2E_0^2\cos\Delta\varphi = 2E_0^2(1+\cos\Delta\varphi) = 4E_0^2\cos^2\frac{\Delta\varphi}{2}$

$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$

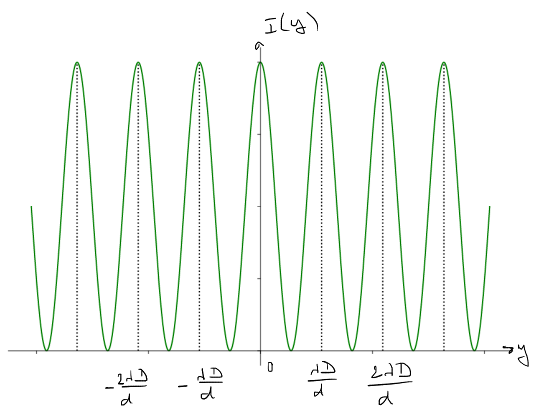
$I_0 = |E_0|^2$

$I = 4I_0\cos^2\frac{\Delta\varphi}{2}$

$\boxed{\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta r}$

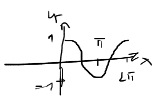
$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{yd}{D}$

$I = 4I_0\cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda D}y\right)$

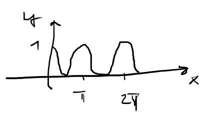


odbočka:

$y = \cos x$



$y = \cos^2 x$



maximum $I(y) \Leftrightarrow \cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda D}y\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi d}{\lambda D}y = M\pi \rightarrow y = \frac{\lambda D}{d}M$; $M = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

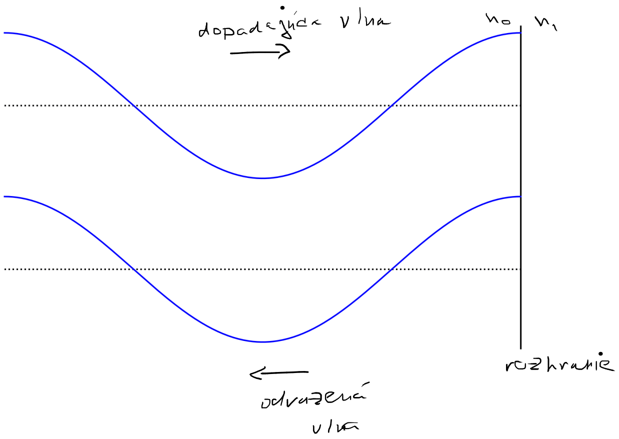
Odraz svetla od opticky hustejšieho / redšieho prostredia

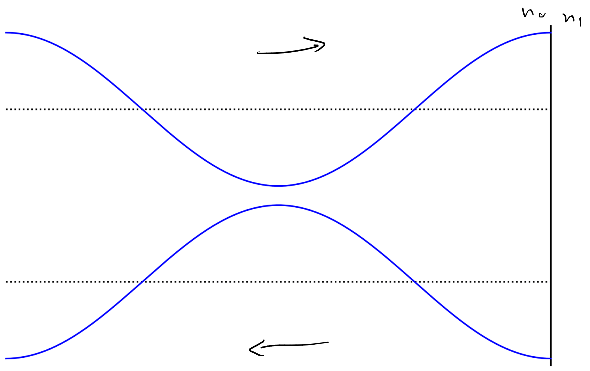
• $n_0 > n_1$ $\quad \Delta\varphi = 0$

$\Delta r = 0$

• $n_0 < n_1$ $\quad \Delta\varphi = \pi$

$\Delta r = \frac{\lambda}{2}$



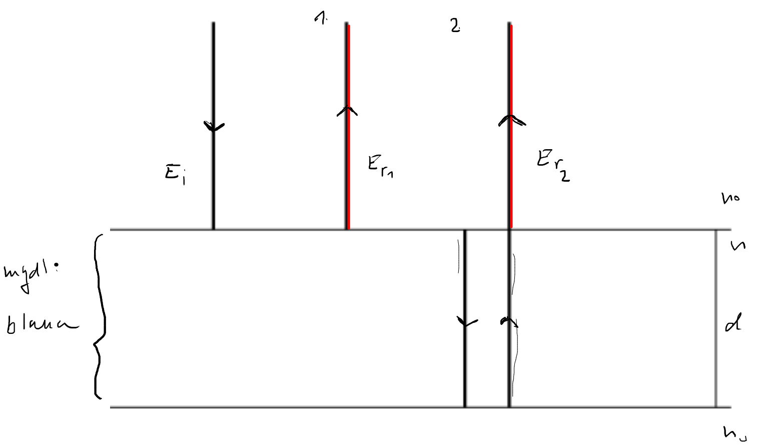


18. Mýdlová bublina vytvoří uvnitř drátěného oka vodní film o tloušťce 320 nm. Index lomu vody je $n = 1{,}33$ a index lomu vzduchu je $n_0 = 1{,}00$.
    (a) Jakou barvu bude mít bílé světlo po kolmém odrazu od tohoto filmu?
    (b) Vypočítejte vlnové délky λ_{M1}, λ_{M2}, λ_{m1}, λ_{m2} pro první dvě maxima a pro první dvě minima intenzity odraženého světla.
    (c) Určete změnu fáze φ_1 při odrazu na prvním a φ_2 při odrazu na druhém rozhraní.

$n = 1{,}33$

$n_0 = 1$

$d = 320\,\text{nm}$



1. prípad: odraz na opticky hustejšom prostredí

$\Delta\varphi_1 = \pi \rightarrow \Delta r_1 = \frac{\lambda}{2}$

2. prípad: — " — redšom prostredí

$\Delta\varphi_2 = 0 \rightarrow \Delta r_2 = 0$

Okrem toho, že sa zmení fáza vĺn pri odraze, vlna E_{r_1} prejde inú dráhu ako vlna E_{r_2} (do chvíle, kým sa vlny začnú skladať. Označme tento rozdiel Δr_3.

Definujeme veličinu optická dráha s ako súčin reálnej dráhy a indexu lomu prostredia, v ktorom sa svetlo šíri

$s = d \cdot n$

$\Delta r_3 = \underbrace{nd}_{\text{od } \downarrow} + \underbrace{nd}_{\text{od } \uparrow} = 2nd$

Svetelná vlna E_i dopadá kolmo na rozhranie vzduch/voda. Po dopade sa časť svetla odrazí, t.j. prípad 1, (vlnu označíme ako E_{r_1}) a časť prejde do blany, t.j. prípad 2. Keď prešlá vlna dopadne na rozranie voda/vzduch, opäť sa jej časť odrazí a prechádza späť do vzduchu ako vlna E_{r_2}. Vlny E_{r_1} a E_{r_2} spolu interferujú.

Celkový dráhový rozdiel: $\Delta r = \Delta r_1 + \Delta r_2 + \Delta r_3 = \frac{\lambda}{2} + 0 + 2nd = \frac{\lambda}{2} + 2nd$

$$\boxed{\Delta r = \frac{\lambda}{2} + 2nd}$$

Podmienky pre vznik interferenčného maxima/minima sú rovnaké ako v Pr 15.

maximum: $\Delta r = m\lambda$

$m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$m\lambda = \frac{\lambda}{2} + 2nd$

minimum: $\Delta r = (m + \frac{1}{2})\lambda$

$m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$(m + \frac{1}{2}) = \frac{\lambda}{2} + 2nd$

biele svetlo zložené z $\lambda \in (360, 760)\,nm$

a) $m\lambda = \frac{\lambda}{2} + 2nd$

- $m = 1$

$\lambda = \frac{\lambda}{2} + 2nd$

$\lambda - \frac{\lambda}{2} = 2nd$

$\frac{1}{2}\lambda = 2nd$

$\lambda = 4nd = 4 \cdot 1{,}33 \cdot 320 = \underline{\underline{1702\,nm}}$ ... IR spektrum

- $m = 2$

$2\lambda = \frac{\lambda}{2} + 2nd$

$\frac{3}{2}\lambda = 2nd$

$\lambda = \frac{4}{3}nd = \underline{\underline{567\,nm}}$ ... zelená farba

b) • maximá sme spočítali v a)

• minimá: $(\frac{1}{2} + m)\lambda = \frac{\lambda}{2} + 2nd$

- $m = 1$

$(\frac{1}{2} + 1)\lambda = \frac{\lambda}{2} + 2nd$

$(\frac{3}{2} - \frac{1}{2})\lambda = 2nd$

$\lambda = 2nd = \underline{\underline{851\,nm}}$

- $m = 2$

$(\frac{1}{2} + 2)\lambda = \frac{\lambda}{2} + 2nd$

$(\frac{5}{2} - \frac{1}{2})\lambda = 2nd$

$2\lambda = 2nd$

$\lambda = nd = \underline{\underline{426\,nm}}$

c) $\Delta\varphi_1 = \pi$

$\Delta\varphi_2 = 0$