

MASARYKOVA UNIVERZITA V BRNĚ  
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA  
FYZIKÁLNÍ SEKCE

# ÚVOD DO FYZIKÁLNÍCH MĚŘENÍ

Petr Pánek

## PŘEDMLUVA

Skriptum „Úvod do fyzikálních měření“ je určeno především studentům 1. ročníku oboru odborná fyzika, biofyzika, učitelských kombinací s fyzikou, fyzikálního inženýrství a optometrie, kteří navštěvují základní fyzikální praktika na přírodovědecké fakultě Masarykovy univerzity v Brně. Skriptum podává výklad vlastností experimentálních dat a způsobu statistického přístupu k výsledkům experimentu. Důraz je kladen na pochopení souvislosti mezi naměřenými hodnotami, odhadem hodnot měřených veličin a jejich skutečnou hodnotou. Výklad zahrnuje také základní numerické metody pro zpracování fyzikálních závislostí. Text je doplněn řadou řešených příkladů, které usnadňují využití získaných poznatků v praxi.

Děkuji celé řadě kolegů a zvláště RNDr. Ludku Bočánkovi, CSc. a také RNDr. Zdeňku Bochníčkoví, Ph.D. za množství cenných rad a připomínek k obsahu skript. Dále děkuji mé ženě Monice za pomoc při přípravě rukopisu.

Petr Pánek

# Obsah

<b>1</b>	<b>Vlastnosti experimentálních dat</b>	<b>7</b>
1.1	Význam experimentu ve fyzice . . . . .	7
1.2	Fyzikální veličiny a jednotky . . . . .	9
1.3	Základní metody fyzikálních měření . . . . .	11
1.4	Zdroje a druhy chyb . . . . .	13
1.4.1	Systematické chyby měření . . . . .	15
1.4.2	Náhodné chyby přímých měření . . . . .	17
1.4.2.1	Hustota pravděpodobnosti . . . . .	18
1.4.2.2	Normální rozdělení a jeho vlastnosti . . . . .	24
1.4.2.3	Rozdělení $\chi^2$ , Studentovo a rovnoměrné rozdělení . . . . .	34
1.4.2.4	Odhad parametrů normálního rozdělení . . . . .	37
1.4.3	Hrubé chyby měření . . . . .	45
1.4.4	Chyby měřidel, celková chyba měření . . . . .	46
1.4.5	Chyby nepřímých měření, zákon přenosu chyb . . . . .	48
1.5	Zápis výsledku měření a jeho chyby . . . . .	52
<b>2</b>	<b>Počtení metody zpracování měření fyzikálních závislostí</b>	<b>63</b>
2.1	Interpolace, extrapolace a aproximace . . . . .	64
2.1.1	Lineární interpolace . . . . .	64
2.2	Metoda nejmenších čtverců . . . . .	66
2.2.1	Rozsah platnosti metody nejmenších čtverců . . . . .	69
2.3	Postupná metoda . . . . .	72
<b>3</b>	<b>Zásady tvorby grafů</b>	<b>77</b>
	<b>Dodatek A - Vážení</b>	<b>79</b>
	<b>Dodatek B - Vlastnosti měřicích přístrojů</b>	<b>89</b>
	<b>Dodatek C - Studentovy koeficienty</b>	<b>95</b>

# 1 Vlastnosti experimentálních dat

## 1.1 Význam experimentu ve fyzice

Historický vývoj fyzikálních měření a jejich postavení v metodách poznání se prolíná s celou historií fyziky. Počátky fyzikálních měření v širším smyslu můžeme najít již ve starověku, tedy v době, kdy fyzika ještě nebyla pojímána jako samostatná nauka. Fyzikálního charakteru byla například měření poměrné vzdálenosti Měsíce a Slunce od Země provedené řeckým astronomem Aristarchem ze Samu (asi 320–250 př. n. l.) a měření poloměru Země provedené řeckým matematikem a astronomem Eratosthenem z Kyrény (asi 275–194 př. n. l.). Výsledky těchto měření ukazují, že experimentální zručnost a úroveň fyzikálního myšlení byly v tehdejší době na vysoké úrovni. Významnou úlohu v dalším vývoji sehrálo učení antického filozofa Aristotela ze Stageiry (asi 384–322 př. n. l.). Aristotelovo fyzikální myšlení bylo zaměřeno pouze na pozorování a nevěnuje téměř žádnou pozornost fyzikálnímu experimentu. Jeho závěry nevycházely z analýzy pozorování, ale z obecných filozofických principů. Tyto deduktivní metody (tj. postupy vedoucí od obecných pravidel ke konkrétním závěrům) vedly často ke špatným závěrům. Aristotelova díla byla ve středověku neotřesitelnou autoritou. Až ve 12. a 13. století nastává odklon od jeho filozofie.

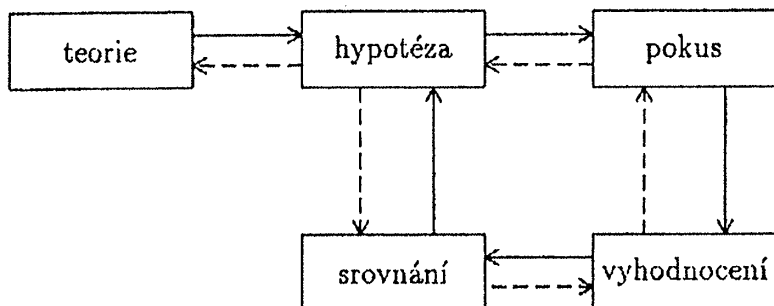
Prvním průkopníkem experimentálních metod byl anglický filozof a přírodovědec Roger Bacon (1214–1296). Jako první začal zdůrazňovat experiment jako nástroj pro ověřování poznatků. Sám se však technickou stránkou fyzikálních experimentů nezabýval. Další významný pokrok učinil německý filozof a přírodovědec Mikuláš Kuzánský (1401–1464). Podle něj je možné všechny jevy v přírodě vzájemně porovnávat a důsledkem této porovnatelnosti je jejich měřitelnost. Zdůraznil také význam matematiky pro vyhodnocení měření. Z metod měření se podrobněji zabýval vážením.

Od 15. století došlo k rozkvětu obchodu, stavebnictví a mořeplavectví, tedy technicky náročnějších oborů, které si vyžádaly uplatnění měření přímo v praxi. Nejvýznamnějším představitelem této nové epochy fyzikálního myšlení byl italský fyzik, matematik a astronom Galileo Galilei (1564–1642). Měření bylo pro Galileiho základní metodou poznání. K závěrům dochází pomocí indukce (tj. vyhodnocením jednotlivých konkrétních situací vytváří obecný závěr). Závěry svých experimentů již formuloval matematicky jako fyzikální zákony. Problematické samotného měření však nevěnoval příliš velkou pozornost. Byla to pro něj pomůcka, která byla věcí experimentální zručnosti. Význam měření si však uvědomoval natolik, že požadoval „*měřit vše co je měřitelné, a co není měřitelné, měřitelným učinit*“.

Další významný krok pro rozvoj fyzikálních měření učinil anglický matematik, fyzik, astronom a filozof Isaac Newton (1643–1727). Newton zavedl základní fyzikální pojmy jako míry, kterým přiřazoval číselné hodnoty, tj. fyzikální veličiny v dnešním pojetí. To umožnilo lepší interpretaci fyzikálních experimentů a navíc umožnilo provést i jejich přípravu na základě výpočtů.

Vlastnostmi měřených veličin se zabývali francouzský matematik, fyzik a astronom Pierre Simon de Laplace (1749–1827) a německý matematik a astronom Karl Friedrich Gauss (1777–1855). Měřené veličiny považovali za náhodné proměnné, pro jejichž vyhodnocení využili teorii pravděpodobnosti a vypracovali teorii chyb. Gauss navíc v roce 1832 vypracoval systém nezávislých základních veličin a jednotek, z nichž byly odvozeny další jednotky. Tím vnesl pořádek do tehdejšího systému s velkým množstvím jednotek.

Fyzika v dnešním pojetí je chápána jako jedna z přírodních věd. Jejím základním zdrojem poznání jsou pozorování a experiment neboli pokus. Experiment je nástroj pro ověřování teorií a současně je zdrojem pro jejich další rozvoj. Schéma systému poznání ve fyzice je na obr. 1.



Obr. 1: Schéma poznávacího procesu ve fyzice

Podle předmětu zkoumání vybíráme příslušnou teorii pro plánování experimentu. Na základě teorie se připraví popis konkrétní experimentální situace (model) a stanoví se očekávaný výsledek, tzv. hypotéza. Z ní vyplývá, jaké veličiny musíme změřit. V rámci hypotézy se provádí i rozbor chyb, který určí, s jakou přesností musíme dané veličiny změřit, případně jaký typ měřících přístrojů musíme použít. Po této přípravě můžeme provést experiment. Výsledky pokusu zpracujeme postupem navrženým v hypotéze. Poslední fází je srovnání výsledků vyhodnocení s očekávaným výsledkem (teoretickou hodnotou nebo výsledkem jiného experimentu). Pokud se výsledná a očekávaná hodnota shodují v rámci chyby, lze říci, že celý řetězec včetně předpokladů je správný. V případě, že nedojde k souladu mezi získaným výsledkem a očekáváním, ve výše uvedeném postupu byl některý krok proveden chybně, nebo některý z použitých předpokladů je špatný. Při hledání chybného kroku postupujeme v řetězci zpět, tj. nejprve prověříme, zda jsme provedli správně vyhodnocení experimentu a jeho provedení, dále posoudíme správnost navržené hypotézy a na závěr, když nenajdeme žádnou chybu, můžeme začít prověřovat správnost použité teorie.

Při plánování a vyhodnocování fyzikálních experimentů musíme pamatovat na dva základní požadavky kladené na fyzikální experiment:

**výběrovost** — fyzikální experiment provádíme za určitých podmínek, které buď sami ovlivňujeme a volíme nebo tyto podmínky alespoň registrujeme (např. teplota, tlak a vlhkost vzduchu v laboratoři). Parametry, které musíme sledovat, určíme na základě modelu experimentu, popř.

sledujeme i parametry, u kterých je předpoklad, že by nějakým způsobem mohly průběh pokusu ovlivňovat.

**reprodukovatelnost** — opakované provádění experimentu různými osobami musí poskytovat srovnatelné výsledky. Tato vlastnost úzce souvisí s výběrovostí, protože pro zajištění reprodukovatelnosti musíme pokus provádět za stejných podmínek.

Jen po splnění těchto dvou požadavků lze experiment považovat za objektivní ověření teorie a jejího vztahu k měřenému či pozorovanému jevu. Z hlediska charakteru pokusu rozlišujeme dva druhy experimentů: kvalitativní (zjišťujeme pouze kvalitativní charakteristiky, např. zda jev nastal nebo ne nebo jinou charakteristiku bez míry) a kvantitativní (zjišťujeme míru daného jevu, tj. provádíme měření, výsledkem je tedy nejčastěji číslo). My se budeme dále zabývat pouze plánováním a vyhodnocováním kvantitativních experimentů (měření).

## 1.2 Fyzikální veličiny a jednotky

Fyzikální veličiny vyjadřují míru sledovaných jevů. Výsledkem měření je číslo, jehož velikost závisí na tom, z jaké soustavy jednotek přitom vycházíme. Fyzikální veličiny proto v sobě zahrnují jak údaj o kvantitě (číslo), tak o kvalitě (informace o použité jednotce). Jeden údaj bez druhého ztrácí smysl. Pro fyzikální měření je důležité dělení veličin podle jejich matematického charakteru na skaláry, vektory a tenzory. Vektory a tenzory jsou veličiny skládající se z několika skalárních veličin. Vektorem je například síla, rychlost, posunutí. Tenzorem může být např. moment setrvačnosti tělesa nebo napětí v tuhém tělese (k danému směru v tělese tenzor napětí přiřadí vektor napětí, který nemusí mít nutně směr totožný se zvoleným směrem). Výsledkem měření bývá nejčastěji číslo, tj. výsledkem bývá skalární veličina. Při měření vektorových a tenzorových veličin proto musíme provádět několik měření, ve kterých zjišťujeme jejich jednotlivé skalární složky. Tyto složky jsou stejného druhu - mají stejnou jednotku.

Mezinárodní soustava jednotek SI používaná ve fyzice má sedm základních a dvě doplňkové veličiny (viz tabulka 1). Rozměry všech ostatních veličin lze vyjádřit pomocí těchto základních jednotek. Často se využívá také jednotek, které jsou odvozeny ze základních jednotek (např. watt, pascal). Zásady týkající se fyzikálních veličin, rovnic, značek veličin a jednotek a soustavy jednotek SI jsou dány normami [1].

Doplňkové veličiny lze podle definice chápat také jako bezrozměrné, a proto se často radián a steradián v jednotkách nepíše (pokud je ze souvislosti zřejmé, že se jedná o úhlovou míru), tj.  $\text{rad s}^{-1} \equiv \text{s}^{-1}$ . Častým omylem bývá špatné vyjádření jednotky času. Jednotku sekunda nelze zaměňovat s jednotkou vteřina, která je vedlejší jednotkou rovinného úhlu.

V případech, kdy se hodnoty některé veličiny řádově odlišují od hodnoty odpovídající základní jednotce, lze s výhodou využít násobné a dílčí jednotky. Tyto jednotky se tvoří pomocí předpon z jednotek hlavních. Předpony

veličina	jednotka	
	název	zkratka
délka	metr	m
hmotnost	kilogram	kg
čas	sekunda	s
elektrický proud	ampér	A
teplota	kelvin	K
látkové množství	mol	mol
svítivost	kandela	cd
rovinný úhel	radián	rad
prostorový úhel	steradián	sr

Tabulka 1: Základní a doplňkové jednotky soustavy SI

Předpona		Násobek	Předpona		Násobek
název	značka		název	značka	
yotta	Y	$10^{24}$	deci	d	$10^{-1}$
zetta	Z	$10^{21}$	centi	c	$10^{-2}$
exa	E	$10^{18}$	mili	m	$10^{-3}$
peta	P	$10^{15}$	mikro	$\mu$	$10^{-6}$
tera	T	$10^{12}$	nano	n	$10^{-9}$
giga	G	$10^9$	piko	p	$10^{-12}$
mega	M	$10^6$	fernto	f	$10^{-15}$
kilo	k	$10^3$	atto	a	$10^{-18}$
hekto	h	$10^2$	zepto	z	$10^{-21}$
deka	da	$10^1$	yokto	y	$10^{-24}$

Tabulka 2: Předpony pro tvorbu násobných a dílčích jednotek

se zpravidla připojují k první z jednotek v celé jednotce, výjimečně lze předponu připojit i k dalším jednotkám, pokud je tomu tak zvykem. V jednotce nelze použít více předpon současně. Předpony spolu s jejich významem jsou uvedeny v tabulce 2.

#### Příklad 1.1

Příklady využití předpon:

$$100 \text{ V m}^{-1} = 0,1 \text{ kV m}^{-1}$$

$$100 \text{ V m}^{-1} = 1 \text{ V cm}^{-1} \text{ (používaná jednotka)}$$

$$1000 \text{ N m} = 1 \text{ kN m}$$

$$1000 \text{ N m} = 1 \text{ N km} \text{ (nelze - neuzívá se)}$$

$$1000 \text{ kg m}^{-3} = 1 \text{ g cm}^{-3} \text{ (používaná jednotka)}$$

$$1000 \text{ kg m}^{-3} = 1 \text{ kg dm}^{-3} \text{ (nelze - neuzívá se)}$$

Norma připouští použití i tzv. vedlejších jednotek. Jsou to jednotky, které jsou vžité (např. litr, hektar), ale ve fyzice se běžně nepoužívají. Staré jednotky (např. kalorie, torr) nejsou povoleny. Při zápisu veličiny musíme uvážlivě volit předponu a formu zápisu hodnoty, aby výsledný zápis byl přehledný (např. aby neobsahoval příliš mnoho nul). Hodnoty veličin lze zapisovat i v exponenciálním tvaru, tento zápis není vhodné kombinovat s použitím předpon.

### Příklad 1.2

Uvedeme si několik způsobů zápisu rychlosti:

$v = 2,8$  (chyba - není uvedena jednotka, rychlost není bezrozměrná veličina)

$v = 2,8 \text{ m s}^{-1}$

$v = 0,0000053 \text{ m s}^{-1}$  (nevhodné - příliš mnoho nul činí zápis nepřehledným)

$v = 5,3 \cdot 10^{-6} \text{ m s}^{-1}$

$v = 5,3 \mu\text{m s}^{-1}$

$v = 5,3 \cdot 10^{-3} \text{ mm s}^{-1}$  (nevhodné)

## 1.3 Základní metody fyzikálních měření

Cílem fyzikálního měření je stanovit velikost měřené veličiny. Metodou měření rozumíme způsob, jakým danou veličinu měříme. Nejjednodušší metodou je subjektivní metoda měření, která využívá přímého působení měřeného objektu na lidské smysly. Tato metoda má však značně omezené možnosti, protože lidské smysly neumožňují provádět absolutní měření s příliš velkou přesností. Navíc úroveň vjemu není lineárně závislá na intenzitě vnějšího působení. Poněkud lepších výsledků lze dosáhnout při srovnávání dvou vjemů (např. srovnávání intenzit světla, barev, frekvencí zvuku atd.). Výsledek je ale vždy závislý na osobě experimentátora a jeho momentální kondici. Z tohoto důvodu se vždy snažíme měření objektivizovat tak, aby byla zajištěna reprodukovatelnost experimentu. Objektivní metoda měření využívá měřících přístrojů. Měřený objekt tak působí na měřicí přístroj, který měřenou veličinu převádí na informaci pro lidské smysly snadněji kvantifikovatelnou, tj. vyjádřitelnou číslem (např. poloha ručičky na stupnici přístroje, číslo na displeji). Pro správnou interpretaci výsledků měření musíme dobře pochopit nejen vlastnosti měřeného objektu, ale i měřicího přístroje, a způsob, jakým interaguje s měřeným objektem - tzv. měřicí princip. Například měřicí princip stanovení hustoty hustoměrem je založen na Archimedově zákoně, měření teploty kapalinovým teploměrem je založeno na teplotní objemové roztažnosti kapalin. Často opomíjeným faktem je oboustrannost interakce. Měřený objekt působí na měřicí přístroj, ale naopak měřicí přístroj působí na měřený objekt a může sám ovlivnit měřitelným způsobem jeho stav. Ve většině případů je tento vliv zanedbatelný (při měření tělesné teploty nepředpokládáme, že chladnější teploměr ochladí pacienta), ale například při měření



malých vzorků může dojít ke značným zkreslením. Některé druhy měření naopak tuto interakci přímo předpokládají (např. měření optických vlastností látek) a při měřeních v oblasti částicové fyziky již nelze vliv měřicího přístroje oddělit.

Výběr měřicí metody je dán typem měřené veličiny, hypotézou vypracovanou před měřením (tj. vztahem, ze kterého vychází zpracování měření) a také požadovanou přesností měření. Výběr správné měřicí metody je velmi náročnou a důležitou součástí přípravy měření. Vzhledem k rozsahu celé problematiky rozdělme měřicí metody podle následujících hledisek:

---

**metody přímé** — Pomocí přímé metody měříme veličinu na základě její definice. Například přímé měření hustoty se provádí měřením hmotnosti  $m$  a objemu tělesa  $V$  (definiční vztah  $\rho = m/V$ ). *metoda - kuba*

**metody nepřímé** — Nepřímé metody vycházejí z jiných než definičních vztahů. Například nepřímé měření hustoty lze provádět měřením hmotnosti  $m$  a měření objemu vážením v kapalině známé hustoty. Ve vztahu pro výpočet hustoty pak nebude přímo vystupovat objem tělesa, ale jeho hmotnost, tíha v kapalině a hustota kapaliny.

---

**metody absolutní** — Výsledkem absolutních měření je hodnota měřené veličiny přímo v zadaných jednotkách. Například povrchové napětí vody  $\sigma = 73 \cdot 10^{-3} \text{ N m}^{-1}$ .

**metody relativní** — Relativní metody umožňují srovnat dvě veličiny téhož druhu. Výsledkem je hodnota podílu těchto veličin. Například relativní měření povrchového napětí vody a lihu dá výsledek, že povrchové napětí vody je 3,3 krát větší než povrchové napětí lihu.

---

**metody statické** — Statické metody využívají klidového stavu měřeného objektu, tj. hodnoty měřených veličin se stanovují jako klidové hodnoty. Například statické měření modulu pružnosti v tahu lze provádět pomocí průhybu při zatěžování nosníku ze zkoumaného materiálu.

**metody dynamické** — U dynamických metod se stav měřeného objektu mění s časem a měříme časovou závislost sledovaných veličin. Například dynamické měření modulu pružnosti v tahu lze provést měřením kmitů nosníku ze zkoumaného materiálu.

Podle výše uvedeného dělení lze např. měření teploty kapalinovým teploměrem označit jako statickou, absolutní a nepřímou metodu. Bylo by zde možné uvést další způsoby klasifikace měřicích metod, jednou z nich, metodou postupných měření, se budeme zabývat dále.

## 1.4 Zdroje a druhy chyb

Při opakovaném měření téže veličiny za stejných podmínek dostaneme zpravidla různé hodnoty. Měřené veličině však přísluší jediná správná hodnota, kterou se snažíme měřením určit. Vzhledem k tomu, že měřením dostáváme různé hodnoty, nelze naměřenou hodnotu ztotožňovat s hodnotou skutečnou. Měřené hodnoty jsou vždy zatíženy chybou. Chybou měření  $\Delta x$  rozumíme rozdíl skutečné hodnoty  $x^*$  a naměřené hodnoty  $x$ :

absolutní chyba  $\Delta x = x - x^*$  (1.1)

Chyba může mít kladnou, tak i zápornou hodnotu, její rozměr je stejný jako má měřená veličina. Samotná informace o velikosti chyby však často nedává představu, jaký je její vliv na výsledky měření. Například údaj o tom, že určitá metoda vážení je zatížena chybou 1 gram, představuje chybu zcela zanedbatelnou při vážení 50 kg pytle brambor, ale naopak při vážení dvou gramů léčiva může být velmi závažná. Z tohoto důvodu vyjadřujeme často chybu relativně vůči měřené veličině

relativní chyba  $r = \frac{\Delta x}{x^*}$  (1.2)

Takto definovaná chyba je bezrozměrná veličina a nazývá se relativní chyba. Někdy se relativní chyba udává v procentech, pak je dána vztahem

$r = \frac{\Delta x}{x^*} 100$  v procentech (1.3)

Pro výše uvedený příklad je v prvním případě relativní chyba 0,002% a v druhém 50%. Ve všech dále uvedených vzorcích je relativní chyba uvažována ve svém základním tvaru, tj. podle definice (1.2). Pro lepší rozlišení obou typů chyb budeme dále označovat chybu definovanou vztahem (1.1) jako chybu absolutní.

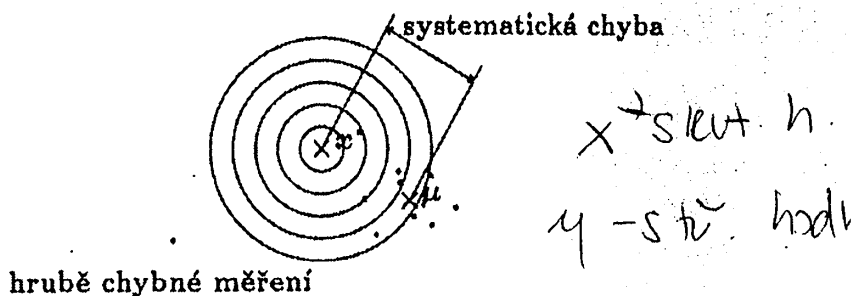
Podle charakteru chyby rozlišujeme tři druhy chyb:

systematické chyby — Ovlivňují výsledek měření zcela určitým a pravidelným způsobem. Bývají funkcí času nebo parametrů měřicího procesu. Důsledkem je to, že naměřené hodnoty v případě konstantní systematické chyby jsou trvale sníženy nebo zvýšeny o určitou hodnotu. Jejich odhalování bývá značně obtížné a vyžaduje dobrou znalost měřicího systému. Konstantní systematické chyby lze někdy odhalit kalibrací přístroje nebo porovnáním měření s výsledky jiného měřicího přístroje, nelze je odhalit opakovaním měření. Velikost systematické chyby je mírou správnosti měření - čím je chyba menší, tím je měření správnější.

náhodné chyby — Kolísají náhodně co do velikosti i znaménka při opakování měření. Pro daný měřicí akt nelze předvídat jejich přesnou hodnotu, projevují se kolísáním naměřených hodnot. Náhodné chyby nelze při měření odstranit. Velikost náhodných chyb je mírou přesnosti měření.

hrubé chyby — Způsobují, že jednotlivé měření, které je zatížené hrubou chybou, se výrazně liší od ostatních měření. Vyskytují se zpravidla jen u malého počtu naměřených hodnot.

Charakter jednotlivých typů chyb si můžeme přiblížit příkladem střelby na terč (viz obr. 2). Uprostřed terče leží náš cíl, tj. v případě fyzikálního měření skutečná hodnota měřené veličiny  $x^*$ . Na terči se vytvoří střelbou skupina zásahů. Poloha této skupiny vyjádřená bodem uprostřed skupiny představuje ve fyzikálních měřeních střední hodnotu měřené veličiny  $\mu$ . Vzdálenost skupiny od středu terče představuje systematickou chybu, vzdálenosti jednotlivých zásahů od středu skupiny pak chybu náhodnou. Zásah ležící daleko od celé skupiny znázorňuje hrubě chybné měření, tj. hodnotu zatíženou hrubou chybou. V případě střelby lze systematickou chybu určit snadno, protože známe polohu cíle (středu terče). Cílem fyzikálních měření je ale získat informaci o neznámé skutečné hodnotě, tj. poloze cíle. V tom spočívá problém s odhalováním systematických chyb.



Obr. 2: Znázornění druhů chyb pomocí střelby do terče

Zdrojů chyb je velké množství. Každý zdroj může přispívat k celkové chybě různou mírou a typem chyby. Mezi zdroje chyb patří:

měřený objekt — Pokud měřený objekt nemá přesně takové vlastnosti, jaké jsme předpokládali (např. tvar, teplotu, složení atd.), je zdrojem chyb. Jeho parametry se také mohou během měření měnit (např. ohřívání při dotyku experimentátora, postupná oxidace atd.).

prostředí — Jestliže zanedbáme vliv prostředí na měřený objekt nebo měřící přístroj, může dojít ke vzniku jak systematických, tak i náhodných chyb.

měřicí metoda — V případě, kdy zvolíme nevhodnou měřicí metodu, můžeme dostávat zkreslené výsledky (např. pro měření malých rozměrů použijeme měřidlo s příliš hrubou stupnicí).

měřicí zařízení — Měřicí zařízení způsobuje chyby například vlivem špatně usazené stupnice, kolísáním napájecího napětí, elektromagnetickým rušením atd.

pozorovatel — K chybám způsobeným pozorovatelem dochází např. vlivem jeho reakční doby, odečítáním údaje stupnice ze strany (ručička se promítá na jiné místo stupnice - tzv. paralaxa), chybným zápisem naměřené hodnoty atd.

vyhodnocení — Použitím nevhodných statistických a numerických metod může dojít k silně zkresleným výsledkům i při použití velmi přesné a výkonné výpočetní techniky. Často opomíjeným zdrojem chyb je zokrouhlování čísel v počítači.

Zdroji, vlastnostmi a zpracováním jednotlivých druhů chyb se budeme zabývat v následujících kapitolách.

#### 1.4.1 Systematické chyby měření

Zaměříme se nyní na jednotlivé zdroje systematických chyb a rozebereme příčiny jejich vzniku a způsoby identifikace a odstranění.

chyby metody — vznikají v důsledku nepřesnosti, přibližnosti vztahů použitých pro popis měřeného objektu. Rovněž teoretický model dané experimentální situace nemusí být adekvátní, tj. dopouštíme se chyby v důsledku nedostatečně propracované hypotézy. Odstranění tohoto druhu systematické chyby lze provést zpřesněním teoretického modelu a z něj vyplývajících vztahů. Například při měření tíhového zrychlení kyvadlem se můžeme v hypotéze dopustit chyby tím, že použijeme vztah pro dobu kyvu pro nekonečně malý rozkvy nebo tím, že považujeme kyvadlo za matematické i přesto, že každé reálné kyvadlo je fyzické, nebo tím, že zanedbáme odpor vzduchu a nebo zanedbáme tření v závěsu kyvadla atd. Modely lze často zpřesňovat v mnoha detailech, proto musíme při upřesňování modelu dobře uvážit velikost systematické chyby, které se dopustíme určitým zjednodušením modelu. Nemá smysl snažit se odstraňovat systematické chyby, které jsou mnohem menší než náhodné chyby měření. Vytváření příliš složitých modelů značně komplikuje samotné měření, protože vyžaduje měření velkého počtu veličin.

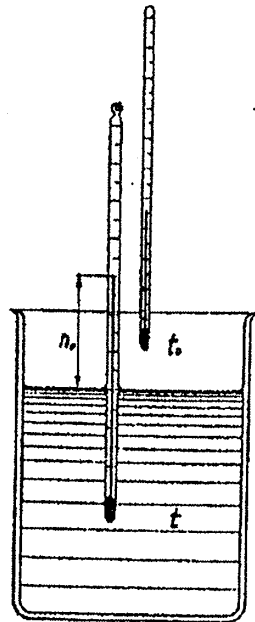
chyby měřidel — jsou způsobeny nedokonalým provedením měřících přístrojů, jejich špatným seřízením nebo nevhodným použitím. Příkladem může být posunutá nebo špatně nakreslená stupnice přístroje, nečistoty usazené na závažích nebo usazení měřícího přístroje do nevhodné polohy. Odhalení tohoto druhu chyby je jednoduché, pokud máme k dispozici normál (tzv. etalon) měřené veličiny (například galvanický článek s přesně definovaným napětím). Pomocí normálu lze provést seřízení měřících přístrojů, nebo pokud seřízení není možné, vytvořit korekční tabulku nebo křivku, pomocí které můžeme naměřené hodnoty dodatečně opravit. Lze využít i vzájemného srovnání údajů dvou měřidel, pokud máme jistotu, že systematická chyba srovnávacího měřidla je zanedbatelná. Systematické chyby měřidel se s časem mění, proto je nutné provádět seřizování pravidelně.

chyby pozorování — vyplývají z nedokonalých pozorovacích schopností člověka (například omezená rozlišovací schopnost oka, reakční doba) a někdy i ze špatných přístupů a návyků experimentátora (již zmíněná paralaxa nebo špatný odhad zlomků dílků na stupnici). Tyto chyby lze odstranit vyloučením lidského faktoru z měřicího procesu (objektivizace měření), nebo alespoň opakováním měření různými experimentátory.

chyby vyhodnocování — jsou důsledkem použití nevhodné numerické metody. Při výpočtech pomocí kalkulátoru nebo počítače nahrazujeme spojité fyzikální veličiny jejich obrazem v paměti, který má diskrétní charakter (číslo je zapsáno omezeným počtem bitů). To vede ke vzniku systematických chyb například při sčítání velkého a malého čísla nebo při odečítání dvou velkých nepřilíš se lišících čísel. Odstranění těchto chyb vyžaduje změnu výpočetního postupu nebo alespoň použití číselného typu s větší přesností (zápis čísel do většího počtu bitů). Tato problematika je značně rozsáhlá a nebudeme se jí zde věnovat. Více informací lze nalézt např. v [2]

### Příklad 1.3

Ukážeme si, jak vzniká systematická chyba metody při měření teploty kapalinovým teploměrem. Teploměr ponoříme zčásti do kapaliny, jejíž teplotu měříme. Na stupnici odečteme po ustálení teplotu. Tento postup je zdánlivě v pořádku, ale jak si ukážeme, čtené hodnoty teploty jsou zatíženy systematickou chybou. Teploměry jsou totiž cejchovány tak, aby udávaly správnou teplotu ve svislé poloze, jsou-li zcela obklopeny měřenou lázní. V našem případě tomu tak není, proto pouze ponořená část má po ustálení teplotu stejnou jako měřená lázeň. Zbývající část je ochlazována nebo ohřívána okolním vzduchem. Tím dojde ke změně objemu měřicí kapaliny v části kapiláry, která vyčnívá nad měřenou kapalinu, a také ke změně objemu kapiláry samotné. Je-li  $\beta_1$  teplotní objemová roztažnost



měřicí kapaliny a  $\beta_2$  teplotní objemová roztažnost skla kapiláry, sloupec měřicí kapaliny o délce  $l$  změní svoji délku o  $l(\beta_1 - \beta_2)\tau$ , kde  $\tau$  je rozdíl teploty ponořené a neponořené části teploměru. Délce  $l$  na stupnici odpovídá určitý počet dílků stupnice  $n_0$ . Předpokládáme, že teplotní délková roztažnost stupnice je zanedbatelná. Změna délky odpovídá potom změně údaje teploty o  $n_0(\beta_1 - \beta_2)\tau$ . Teplotu vyčnívajícího sloupce můžeme přibližně zjistit pomocí druhého teploměru, kterým změříme teplotu uprostřed vyčnívající části ( $t_0$ ). Pro velikost systematické chyby  $\Delta t$  pak dostaneme

$$\Delta t = n_0(\beta_1 - \beta_2)(t - t_0) .$$

Pro skleněný teploměr se rtuťovým sloupcem je hodnota rozdílu objemových roztažností  $\beta_1 - \beta_2 = 0,00016 \text{ K}^{-1}$ . Pokud čtenou hodnotu  $t$  opravíme o hodnotu  $\Delta t$ , odstraníme tento druh systematické chyby.

Například rtuťový teploměr ponořený do kapaliny až po dílek  $15^\circ\text{C}$  ukazuje teplotu  $86,3^\circ\text{C}$ . Teplota ve středu vyčnívajícího sloupce byla naměřena  $27,5^\circ\text{C}$ . Teplotní oprava na vyčnívající sloupec pak činí  $\Delta t = 0,67^\circ\text{C}$ . Opravená hodnota teploty je tedy  $87,0^\circ\text{C}$ .

---

Systematické chyby se mohou měnit s časem, tento druh chyby lze odhalit opakováním měření a tím také odstranit zavedením patřičných korekcí. Na odstranění konstantních systematických chyb není jednoznačný návod, způsob identifikace a odstranění je značně závislý na konkrétní experimentální situaci. V dalším výkladu se nebudeme již systematickými chybami zabývat.

### 1.4.2 Náhodné chyby přímých měření

Při opakovaném měření veličiny s konstantní hodnotou zjistíme, že naměřené hodnoty se navzájem liší. Pro každé jednotlivé měření nelze předem přesně určit, jakou hodnotu měřením získáme - měřením získáváme náhodné hodnoty. Náhodný charakter měření ale neznamená úplnou ztrátu informace o měřené veličině. Nedokážeme sice popsat jednotlivá měření, ale soubor většího počtu měření vykazuje určité charakteristiky, ze kterých lze odhadovat skutečnou hodnotu měřené veličiny. Popisem vlastností náhodných proměnných se zabývá statistika, a proto se pro zpracování výsledků měření používá statistických metod. Tento popis je různý pro veličiny diskrétní a spojité.

Všimněme se nejprve krátce popisu chování diskrétních náhodných veličin. Tyto veličiny nabývají pouze konečně nebo spočetně mnoha hodnot. Pro každou její hodnotu  $x$  pak můžeme zadat pravděpodobnost, s jakou se vyskytne ve velkém souboru měření právě tato hodnota  $P(x)$ . Součet všech pravděpodobností pro všechny možné hodnoty  $x$  je roven jedničce (tj. jistý jev - při měření vždy dostaneme některou hodnotu z definičního oboru náhodné proměnné).

#### **Příklad 1.4**

Jednoduchým příkladem diskrétní náhodné proměnné je výsledek hodu kostkou. Množina možných výsledků je konečná:  $\{1,2,3,4,5,6\}$ . Součet pravděpodobností pro všechny hodnoty je

$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1,$$

tj. při každém hodu kostkou nám padne některé číslo z výše uvedené množiny. Pokud je kostka symetrická, pravděpodobnosti výskytu každé z možných hodnot jsou stejné

$$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6).$$

Z toho dostaneme

$$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6}.$$

Pokud bychom vykonali velký počet hodů (měření)  $n$ , daná hodnota by se v souboru výsledků vyskytovala přibližně  $\frac{n}{k}$  krát.

Spojité náhodné veličiny mohou nabývat nespočetně mnoha hodnot. Tyto hodnoty se od sebe libovolně málo liší, a proto je nutné k jejich popisu využít jiných metod. Mohlo by se zdát, že ve fyzikálních měřeních se s diskrétními veličinami setkáváme jen zřídka. Ve skutečnosti většina měření poskytuje diskrétní hodnoty buď díky použití digitálních přístrojů, nebo díky omezené přesnosti čtení na stupnici. Důležitý je vztah mezi nejmenší rozlišitelnou hodnotou měření a tzv. směrodatnou odchylkou měřené proměnné (viz vztah 1.47). Pokud je směrodatná odchylka podstatně větší než je nejmenší rozlišitelná hodnota měření, lze považovat měřenou veličinu za spojitou.

#### 1.4.2.1 Hustota pravděpodobnosti

U spojitých náhodných veličin nemá smysl zjišťovat pravděpodobnost výskytu dané hodnoty, protože množina možných hodnot je nespočetná. Hodnoty pravděpodobnosti výskytu dané hodnoty  $x$  jsou nekonečně malé:

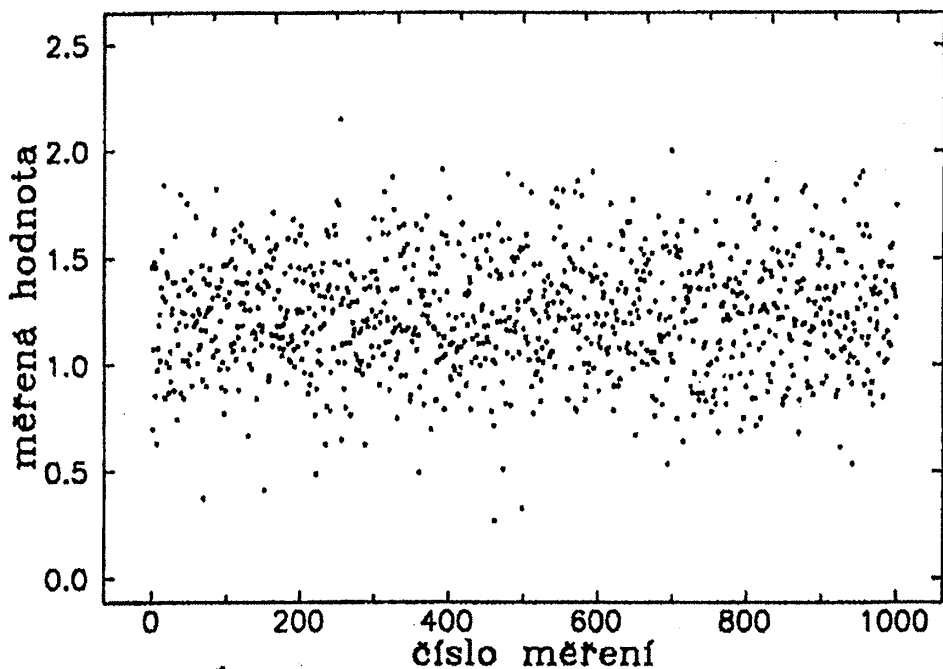
$$P(x) \rightarrow 0.$$

Kdybychom například při výzkumu vzrůstu skupiny osob zjišťovali, kolik z nich má přesně danou určitou výšku, došli bychom k závěru, že u žádné osoby nemůžeme absolutně přesně zaručit výšku této hodnoty. Má ale smysl zjišťovat, kolik osob má výšku v intervalu 170 – 180 cm, 180 – 190 cm atd. U spojitých veličin tedy zadáváme pravděpodobnost výskytu její hodnoty v daném intervalu  $P(x_1, x_2)$ . Počet výsledků měření spadajících do daného intervalu nazýváme četností  $Q$ . Výhodnější je používat relativní četnosti  $q$

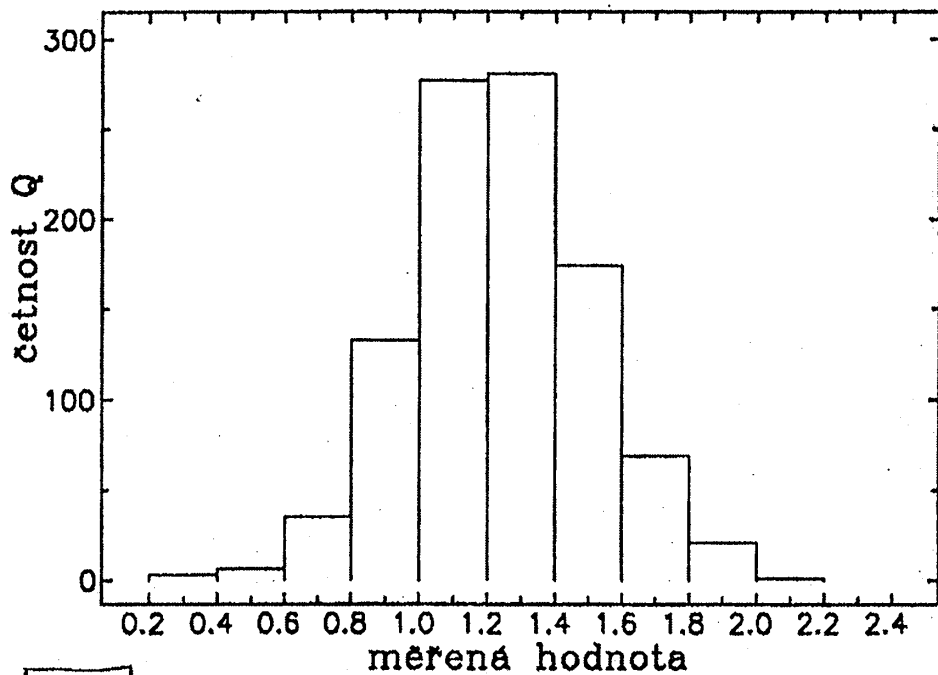
$$q = \frac{Q}{N}, \quad (1.4)$$

kde  $N$  je celkový počet měření. Součet relativních četností ze všech disjunktivních intervalů pokrývajících definiční obor měřené veličiny je roven jedné.

Příklad měření náhodné proměnné je na obrázku 3. V grafu je zobrazeno 1000 měření výstupního signálu optického měřicího přístroje. Kolísání naměřených hodnot je způsobeno velkým množstvím vlivů (např. změny intenzity světla zdroje, změny citlivosti detektoru, změny složení vzduchu v trase paprsku, otřesy atd.). Vidíme, že většina hodnot leží v intervalu  $(1, 0; 1, 5)$ . Tento hrubý odhad však pro přesné zpracování nedostačuje. Můžeme zjistit četnosti výskytu naměřených hodnot v určitých intervalech a tyto četnosti znázorníme graficky tzv. histogramem. Z histogramu na obr. 4 vidíme, že nejvíce hodnot padlo do intervalu  $(1, 2; 1, 4)$ , o něco méně do intervalu  $(1, 0; 1, 2)$  atd. Náš odhad skutečné hodnoty, předpokládáme-li, že v její blízkosti se nachází největší množství naměřených hodnot, je omezen šířkou intervalů (tzv. tříd) histogramu. Z obr. 4 například nepoznáme, zda je více hodnot v intervalu  $(1, 2; 1, 3)$  nebo v intervalu  $(1, 3; 1, 4)$ . Pokud zkusíme sestavit histogram



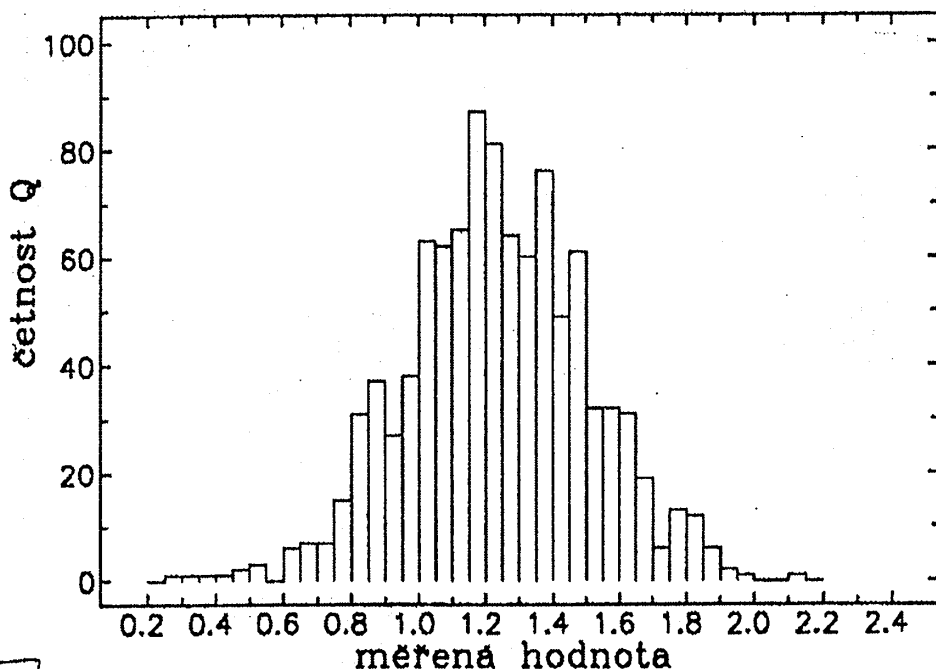
Obr. 3: Měření výstupního signálu optického přístroje



Obr. 4: Histogram absolutních četností naměřených hodnot z obr. 3

s velmi úzkými intervaly např. v našem případě 0,05 (viz obr. 5), dostaneme sice podrobnější informaci o rozdělení naměřených hodnot, ale rychle klesá četnost v jednotlivých intervalech. Histogram, který tak získáme, sice reprezentuje naše měření, ale začne ztrácet vypovídací schopnost o celkovém chování měřené náhodné veličiny. Pak se může stát, že jinou sadou stejného





Obr. 5: Histogram absolutních četností naměřených hodnot z obr. 3 s větším počtem tříd než na obrázku 4

počtu měření dostaneme histogram jiného tvaru. Při volbě počtu tříd (intervalů) histogramu je tedy nutné nalézt kompromis. Při malém počtu tříd máme málo přesnou informaci o rozdělení hodnot a poloze maxima, naopak při příliš velkém počtu tříd zaniká hledaná informace v šumu. Pro vhodnou volbu počtu tříd  $k$  lze použít vztah

$$k \approx 2,46(N - 1)^{0,4}, \quad (1.5)$$

kde  $N$  je počet měření [3]. Šířku tříd  $\Delta x$  pak dostaneme rozdělením intervalu mezi maximální a minimální hodnotou v souboru měření na daný počet tříd. Při plánování měření můžeme vycházet naopak z požadavku na velikost tříd histogramu a naplánovat počet měření.

Představme si, že bychom zvětšovali počet naměřených hodnot a tím mohli zmenšovat hodnotu  $\Delta x$ . Horní zubatý okraj histogramu by se tím vyhlazoval, až by v limitním případě přešel v hladkou křivku. Získanou hladkou funkci  $f(x)$  limitního případu definujeme vztahem

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x, x + \Delta x)}{\Delta x}, \quad (1.6)$$

kde  $P(x, x + \Delta x)$  je pravděpodobnost, že hodnota měřené veličiny padne do intervalu  $\langle x; x + \Delta x \rangle$ . Funkce  $f(x)$  udává tzv. hustotu pravděpodobnosti a plně popisuje vlastnosti náhodné proměnné. Hodnoty hustoty pravděpodobnosti nejsou na rozdíl od relativní četnosti bezrozměrné veličiny, ale mají rozměr reciproký k rozměru měřené veličiny. Z definičního vztahu (1.6) také plyne, jak vypočítat pravděpodobnost toho, že výsledek měření padne do

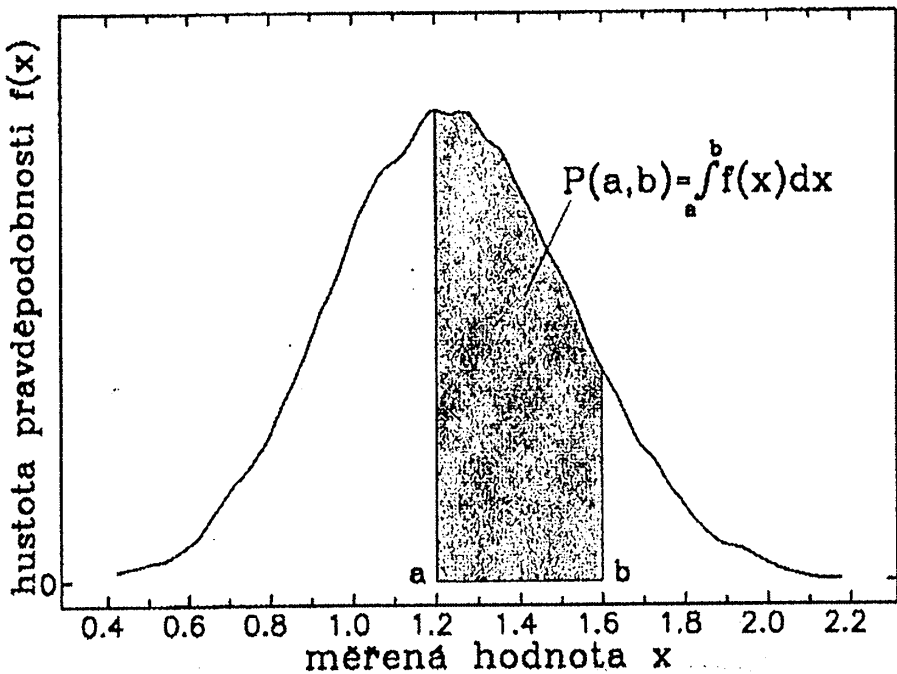
intervalu  $\langle a; b \rangle$ :

$$P(a, b) = \int_a^b f(x) dx. \quad (1.7)$$

Velikost pravděpodobnosti je tedy rovna velikosti příslušné plochy pod křivkou funkce  $f(x)$ . Z toho také vyplývá, že integrál přes celý definiční obor náhodné proměnné je roven jednotce

$$\int_{\text{def. obor}} f(x) dx = 1. \quad (1.8)$$

Znamená to, že naměření hodnoty v definičním oboru je jev jistý a plocha pod celou křivkou funkce  $f(x)$  je rovna jedné. Velikost pravděpodobnosti můžeme názorně vyjádřit v grafu (viz obr. 6). Z výše uvedeného je zřejmé, že přesný



Obr. 6: Graf hustoty pravděpodobnosti a její souvislost s pravděpodobností

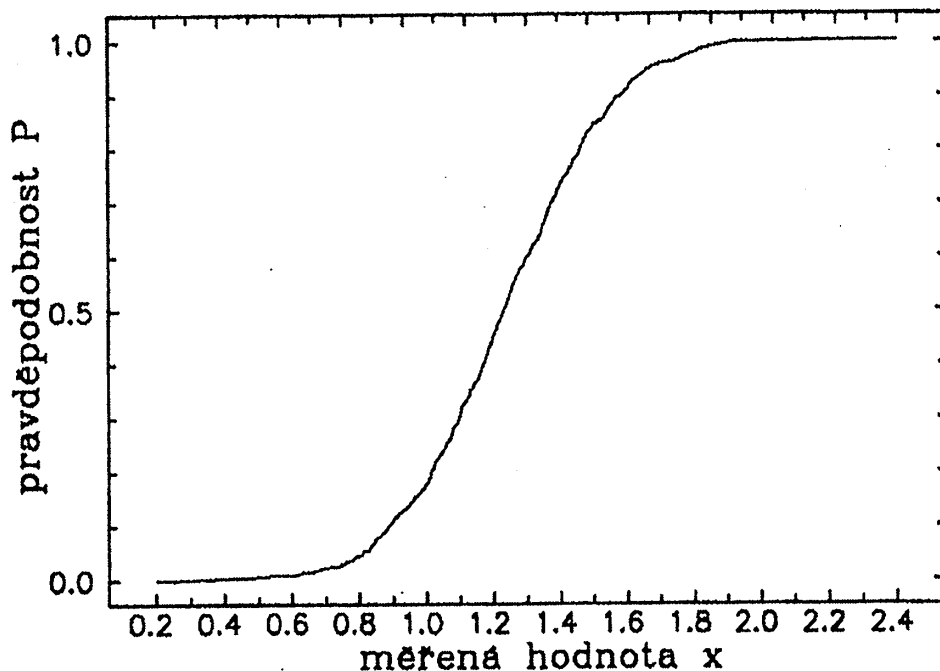
průběh hustoty pravděpodobnosti nelze experimentálně zjistit, protože by bylo nutné provést nekonečně mnoho měření. Je ale možné získat jeho odhad dále uvedeným postupem.

Další důležitou charakteristikou náhodné proměnné je tzv. distribuční funkce, která je definována vztahem

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt. \quad (1.9)$$

Hodnota distribuční funkce  $F(x)$  udává velikost pravděpodobnosti, s jakou hodnota náhodné proměnné padne do intervalu  $(-\infty; x)$ . Z toho vidíme, že obor hodnot distribuční funkce je  $\langle 0; 1 \rangle$  a funkce je neklesající. Přibližná konstrukce této funkce z experimentálních dat vychází z definice. Přibližnou hodnotu funkce  $F(x)$  vypočítáme jako relativní četnost naměřených hodnot

v intervalu  $(-\infty; x)$ . Tím získáme schodovitou funkci, která má skok vždy v hodnotách získaných měření. Při dostatečně velkém počtu hodnot přestávají být schody výrazné. Na obrázku 7 je znázorněna distribuční funkce sestavená z měření na obr. 3.



Obr. 7: Odhad distribuční funkce z naměřených hodnot na obr. 3

Podle definice (1.9) platí

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} \quad (1.10)$$

Pomocí tohoto vztahu lze sestavit graf hustoty pravděpodobnosti numerickou derivací distribuční funkce. Před derivací je nutné vhodnou numerickou metodou odstranit na distribuční funkci malé schody [2]. Tak byl sestaven i graf hustoty pravděpodobnosti na obrázku 6. Srovnáním hustoty pravděpodobnosti nebo distribuční funkce s teoretickým modelem lze získat řadu užitečných informací.

Pomocí distribuční funkce lze také vypočítat hodnotu pravděpodobnosti  $P(a, b)$ . Výpočet vychází z následující úvahy. Hodnota  $F(b)$  udává velikost pravděpodobnosti  $P(-\infty, b)$ , hodnota  $F(a)$  pak  $P(-\infty, a)$ . Pro  $a < b$  pak platí

$$P(a, b) = P(-\infty, b) - P(-\infty, a) = F(b) - F(a) \quad (1.11)$$

Významným parametrem popisujícím náhodnou proměnnou je její střední hodnota  $E$ , která je definována vztahem

$$E(x) = \int_{\text{def. obor}} x f(x) dx \quad (1.12)$$

Tento parametr udává polohu rozdělení. Důležitou vlastností střední hodnoty je to, že střední hodnota lineární kombinace náhodných proměnných je rovna lineární kombinaci jejich středních hodnot, tj.

$$E(a_1x_1 + \dots + a_nx_n) = a_1E(x_1) + \dots + a_nE(x_n). \quad (1.13)$$

Důkaz tohoto tvrzení lze provést dosazením do (1.12), viz např. [4]. Je nutné poznamenat, že střední hodnota neexistuje vždy. Je možno najít takové příklady hustot pravděpodobnosti, pro které integrál (1.12) nekonverguje.

### Příklad 1.5

Hustota pravděpodobnosti je dána vztahem

$$f(x) = \frac{p}{1+x^2}.$$

Určete:

- hodnotu konstanty  $p$
- průběh funkce
- distribuční funkci a její průběh
- pravděpodobnost toho, že proměnná  $x$  nabývá hodnoty z intervalu  $(-1; 1)$

Řešení:

- Hodnotu konstanty  $p$  určíme ze vztahu (1.8). Musí tedy platit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p}{1+x^2} dx = 1,$$

integrací

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p}{1+x^2} dx = p [\operatorname{arctg} x]_{-\infty}^{\infty} = p\pi,$$

$$p = \frac{1}{\pi}.$$

Hustota pravděpodobnosti má tvar

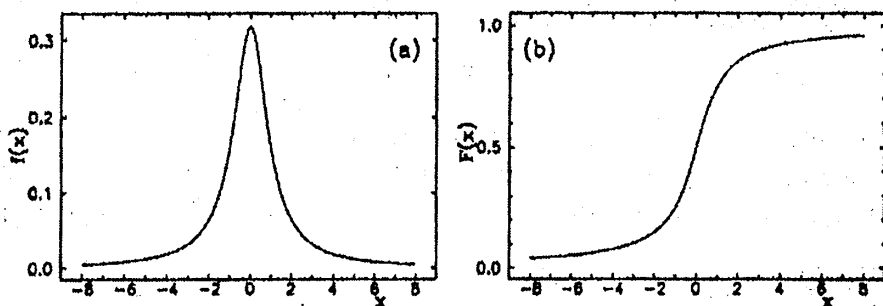
$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Jedná se tzv. Cauchyovo rozdělení.

- Graf hustoty pravděpodobnosti je na obrázku 8a.
- Tvar distribuční funkce je podle (1.9)

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\pi(1+t^2)} dt = \frac{1}{\pi} [\operatorname{arctg} t]_{-\infty}^x = \frac{\operatorname{arctg} x}{\pi} + \frac{1}{2}.$$

Graf distribuční funkce je na obrázku 8b.



Obr. 8: Graf hustoty pravděpodobnosti Cauchyova rozdělení (a) a jeho distribuční funkce (b)

- d) Pravděpodobnost  $P(-1, 1)$  můžeme určit z hustoty pravděpodobnosti

$$P(-1, 1) = \int_{-1}^1 \frac{dx}{\pi(1+x^2)} = \left[ \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} x \right]_{-1}^1 = \frac{1}{2},$$

nebo jednodušším způsobem z distribuční funkce

$$P(-1, 1) = F(1) - F(-1) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Znamená to, že ve velkém souboru naměřených hodnot veličiny, která se řídí tímto zákonem, bude polovina všech hodnot ležet v intervalu  $(-1; 1)$ .

#### 1.4.2.2 Normální rozdělení a jeho vlastnosti

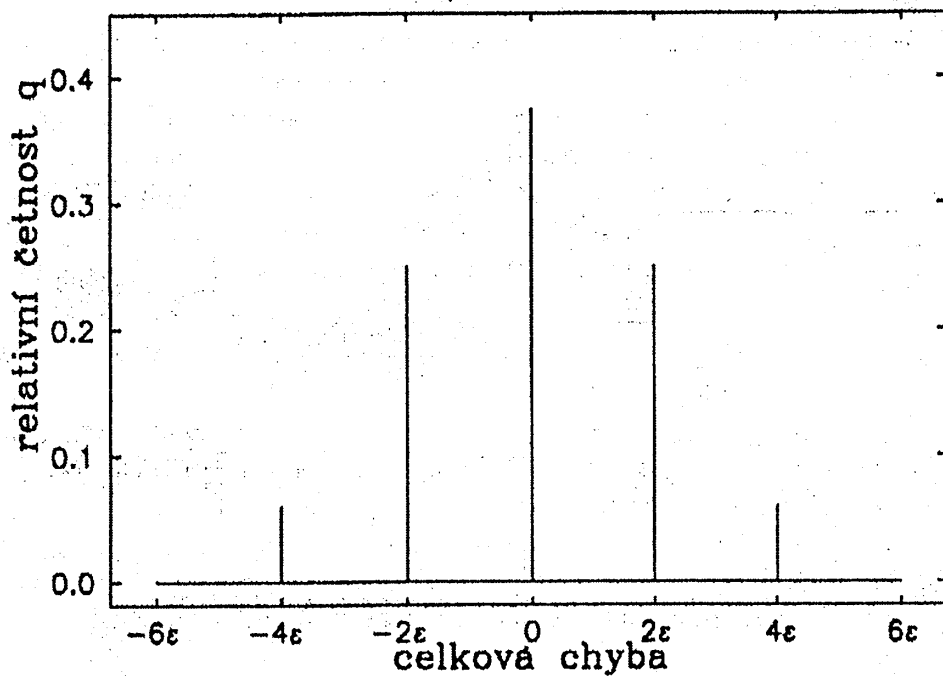
Příkladem náhodné proměnné, se kterou se nejčastěji setkáme v praxi, je veličina, jejíž hodnota je ovlivňována velkým počtem náhodných vlivů. Působením těchto vlivů vznikají elementární náhodné chyby, které jsou navzájem nezávislé a jejichž hodnota se přičítá ke skutečné hodnotě měřené veličiny. Výsledná hodnota je dána součtem velkého množství elementárních náhodných chyb se skutečnou hodnotou. To je typická situace přímo měřených veličin.

Tuto situaci si můžeme přiblížit pomocí velmi zjednodušeného příkladu. Předpokládejme, že měření je ovlivněno působením čtyř elementárních náhodných chyb s konstantní velikostí  $\varepsilon$ . U těchto chyb se náhodně a navzájem nezávisle mění znaménko, tj. náhodné chyby nabývají pouze hodnot  $-\varepsilon$  a  $\varepsilon$ . V tabulce 3 jsou shrnuty všechny možné případy jejich současného působení.

V takto zjednodušené situaci jsme dostali diskrétní náhodnou proměnnou nabývající pouze pěti hodnot. Graf relativních četností je na obrázku 9. Vidíme, že ve většině případů se působení jednotlivých vlivů navzájem vyloučilo a výsledná chyba byla nulová. K tomu, abychom dosáhli velké výsledné chyby,

znaménko				hodnota	abs. četnost	rel. četnost
-	-	-	-	$-4\epsilon$	1	0,06
+	-	-	-	$-2\epsilon$	4	0,25
-	+	-	-			
-	-	+	-			
-	-	-	+			
+	+	-	-	0	6	0,375
+	-	+	-			
+	-	-	+			
-	+	+	-			
-	+	-	+			
-	-	+	+			
+	+	+	-	$2\epsilon$	4	0,25
+	+	-	+			
+	-	+	+			
-	+	+	+			
+	+	+	+	$4\epsilon$	1	0,06

Tabulka 3: Příklad působení čtyř elementárních chyb



Obr. 9: Graf relativních četností diskrétní náhodné proměnné

musí nastat takový případ, kdy mnoho elementárních chyb má současně stejné znaménko. Taková situace je málo pravděpodobná, proto relativní četnost s rostoucí velikostí výsledné chyby klesá. Rozdělení na obrázku 9 je příkladem tzv. binomického rozdělení, které popisuje výše uvedený případ chování diskrétní náhodné proměnné. Další informace o binomickém rozdělení můžeme čtenář najít např. v [5, 6].

V reálných situacích však elementární chyby mění nejenom své znaménko, ale i svoji velikost, a jejich počet bývá podstatně vyšší. Takovou situaci si můžeme modelovat pomocí počítače. Náhodná proměnná  $x$  byla modelována pomocí vztahu:

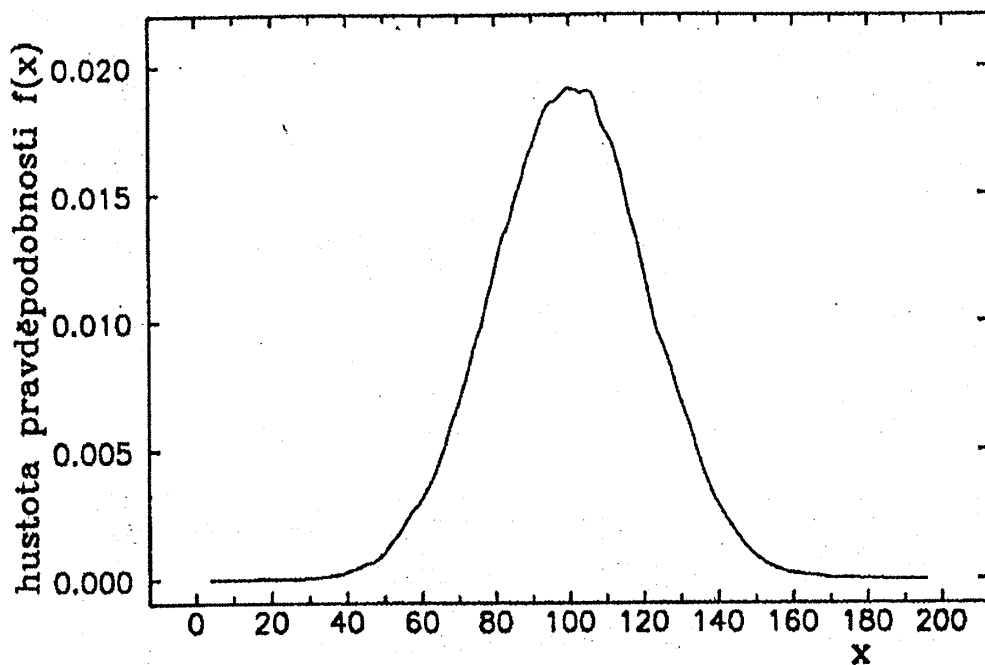
$$x = 100 + \sum_{n=1}^{50} 10 \cdot (\text{RND}(1) - 0,5), \quad (1.14)$$

kde výraz  $\text{RND}(1)$  představuje funkci tzv. generátoru náhodných čísel počítače, která vytváří náhodná čísla v intervalu  $(0; 1)$ . Výraz  $10 \cdot (\text{RND}(1) - 0,5)$  tedy představuje náhodnou proměnnou, jejíž hodnota se mění v intervalu  $(-5; 5)$ . V našem modelu pak vystupuje jako elementární chyba. Těchto elementárních chyb působí současně 50 a jejich hodnoty se navzájem sčítají a výsledná chyba se přičítá k pevné hodnotě 100. Za účelem výzkumu chování takové proměnné bylo vygenerováno 10000 hodnot takových náhodných čísel. Z nich byla pak sestrojena distribuční funkce, jak již bylo popsáno dříve, a z ní pak derivací podle vztahu (1.10) byla získána hustota pravděpodobnosti. Její graf je na obrázku 10. Z grafu vidíme, že většina hodnot naší náhodné proměnné leží v blízkosti pevné hodnoty 100, tj. ve většině případů se vliv elementárních chyb navzájem zeslabuje. Podobně jako v předchozím modelu je výskyt velkých chyb málo pravděpodobný.

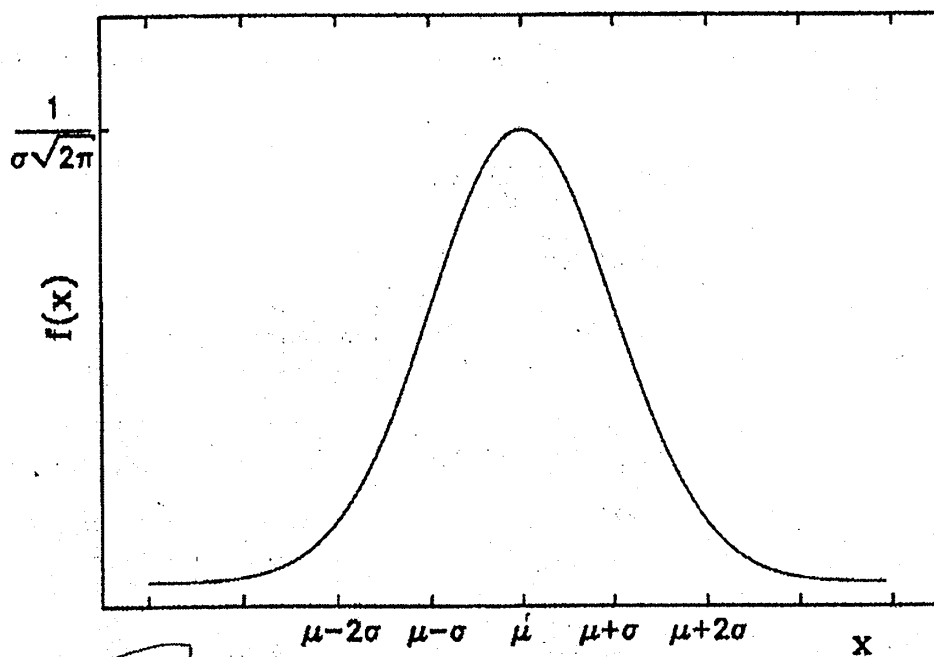
Náš model je sice oproti reálným situacím stále zjednodušený (např. jsme omezili velikost elementárních chyb určitým intervalem, všechny elementární chyby mají stejný charakter), ale křivka grafu hustoty pravděpodobnosti svým zvonovitým tvarem dobře odpovídá teoretickému modelu tzv. normálního rozdělení. Normální rozdělení, které nezávisle na sobě objevili Gauss a Laplace (proto se také nazývá Gaussovým rozdělením nebo někdy také Laplaceovým rozdělením), má hustotu pravděpodobnosti danou vztahem:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right] \quad (1.15)$$

kde  $\sigma$  a  $\mu$  jsou parametry, jejichž význam si odvodíme dále. Graf hustoty pravděpodobnosti normálního rozdělení má zvonovitý tvar (viz obr. 11). Funkce (1.15) popisuje rozdělení náhodné spojité veličiny, která vzniká složením (součtem) velkého počtu navzájem nezávislých různých náhodných vlivů, z nichž každý ovlivňuje výslednou veličinu jen malým příspěvkem. Vztah (1.15) lze odvodit limitním přechodem z binomického rozdělení [6].



Obr. 10: Graf hustoty pravděpodobnosti náhodné proměnné z počítačového modelu



Obr. 11: Graf hustoty pravděpodobnosti normálního rozdělení



Prozkoumejme nyní vlastnosti normálního rozdělení:

1. Hustota pravděpodobnosti normálního rozdělení je definována pro všechna reálná  $x$  a pro všechna  $x$  z intervalu  $(-\infty, \infty)$  je  $f(x) > 0$ , tj. připouští výskyt jakékoliv reálné hodnoty náhodné proměnné  $x$ .

2. Pro  $x = \mu$  nabývá funkce  $f(x)$  maxima. To si snadno ukážeme pomocí derivace

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{\mu - x}{\sigma^3 \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right] \quad (1.16)$$

V maximu musí být

$$\frac{df(x)}{dx} = 0,$$

z toho vyplývá, že

$$x = \mu.$$

Parametr  $\mu$  tedy udává polohu maxima normálního rozdělení. Maximální funkční hodnota je

$$f(\mu) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}}. \quad (1.17)$$

3. Normální rozdělení je sudá funkce vůči poloze maxima:

$$f(\mu + x) = f(\mu - x). \quad (1.18)$$

To znamená, že výskyt kladných a záporných náhodných chyb téže velikosti má stejnou pravděpodobnost.

4. Střední hodnota  $E$  náhodné proměnné  $x$ , která se řídí normálním rozdělením, je podle (1.12)

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right] dx,$$

substitucí  $z = x - \mu$  dostaneme

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z + \mu}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{z^2}{2\sigma^2} \right] dz =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{z}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{z^2}{2\sigma^2} \right] dz + \mu \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{z^2}{2\sigma^2} \right] dz.$$

První z integrálů musí být nutně roven nule, protože integrujeme lichou funkci v intervalu  $(-\infty, \infty)$ . Druhý integrál musí být podle (1.8) roven jedničce, proto dostaneme

$$E(x) = \mu, \quad (1.19)$$

tj. poloha maxima rozdělení odpovídá současně i střední hodnotě náhodné proměnné.

5. Střední hodnota náhodné veličiny je rovna její skutečné hodnotě  $x^*$ , tj. platí

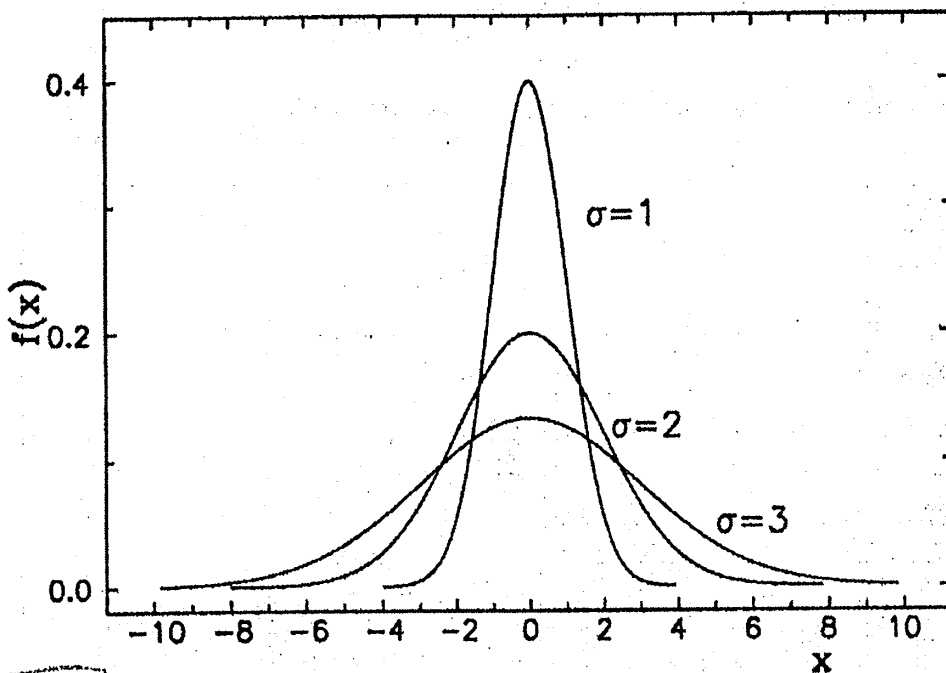
$$\mu = x^* . \quad (1.20)$$

Toto tvrzení lze dokázat následující úvahou. Jednotlivé hodnoty náhodné veličiny můžeme zapsat jako součet skutečné pevné hodnoty a výsledné náhodné chyby

$$x = x^* + \epsilon . \quad (1.21)$$

Jelikož  $x^*$  je konstanta, musí mít  $\epsilon$  také normální rozdělení. Pravděpodobnost výskytu kladných a záporných náhodných chyb dané velikosti je stejně velká, proto musí být střední hodnota  $\epsilon$  rovna nule. Střední hodnota  $x$  je proto rovna  $x^*$ . Tento závěr je velmi důležitý pro fyzikální měření. Pokud by se nám podařilo určit střední hodnotu měřené veličiny, dostali bychom tím její skutečnou hodnotu.

6. Vyšetříme nyní význam parametru  $\sigma$ . Na obrázku 12 jsou zobrazena normální rozdělení s různými hodnotami  $\sigma$  a s pevnou hodnotou  $\mu = 0$ . Vidíme, že s rostoucí hodnotou  $\sigma$  se křivka rozšiřuje a klesá hodnota



Obr. 12: Graf hustoty pravděpodobnosti normálního rozdělení s různými parametry  $\sigma$

v maximu v souladu s (1.17) tak, aby plocha pod křivkou zůstávala jednotková. Jedná se tedy o šířkový parametr. Zkusíme najít jeho přesný význam. Často udávaným šířkovým parametrem ve fyzice je šířka v polovině výšky označovaná zkratkou FWHM (z anglického Full Width at Half Maximum) nebo pološířka v polovině výšky označovaná zkratkou HWHM (z anglického Half Width at Half Maximum). Viz obrázek 13. Vztah těchto parametrů k hodnotě  $\sigma$  lze snadno vypočítat. Označme

hodnoty nezávisle proměnné odpovídající šířce v polovině výšky  $x_{1,2}$ .  
Pro šířku v polovině výšky platí

$$\exp \left[ -\frac{(x_{1,2} - \mu)^2}{2\sigma^2} \right] = \frac{1}{2},$$

$$\frac{(x_{1,2} - \mu)^2}{2\sigma^2} = \ln 2,$$

$$x_{1,2} - \mu = \pm \sigma \sqrt{2 \ln 2}.$$

Pološířka v polovině výšky (HWHM) je tedy  $\sigma \sqrt{2 \ln 2} \doteq 1,18\sigma$  a šířka v polovině výšky (FWHM) je  $2\sigma \sqrt{2 \ln 2} \doteq 2,36\sigma$ . Vidíme, že tyto šířkové parametry jsou přímo úměrné  $\sigma$ , ale význam  $\sigma$  nám neobjasňují.

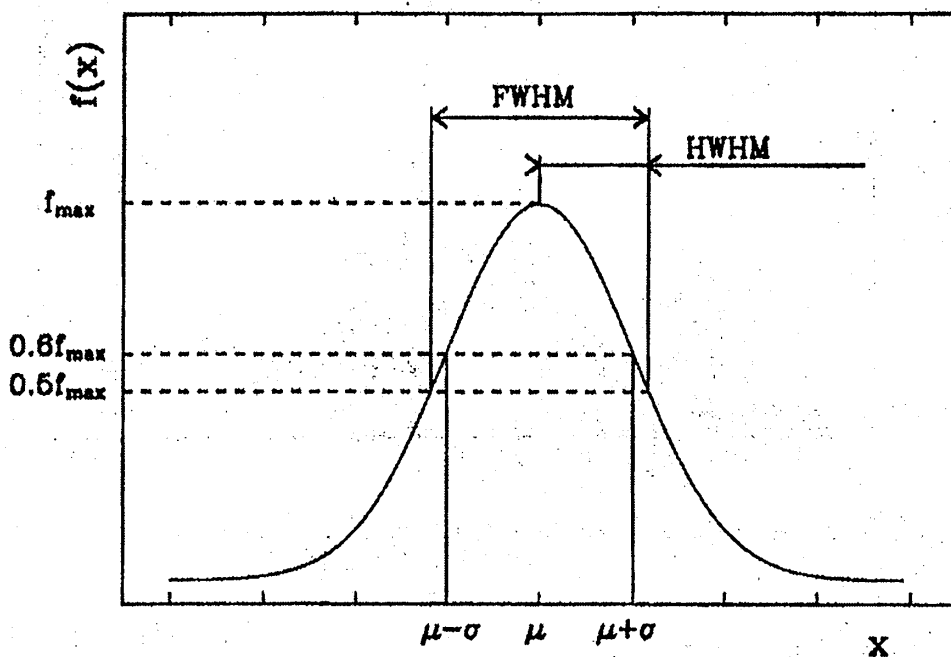
Funkční hodnota v bodech  $x = \mu \pm \sigma$  je

$$f(\mu \pm \sigma) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{\sigma^2}{2\sigma^2} \right] = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi e}}$$

a její poměr k hodnotě v maximu (1.17)

$$\frac{f(\mu \pm \sigma)}{f(\mu)} = \frac{1}{\sqrt{e}} \doteq 0,61.$$

Parametr  $\sigma$  tedy nemá ani zvláštní význam z hlediska funkční hodnoty.



Obr. 13: Šířkové parametry normálního rozdělení

Vyšetřujme dále průběh funkce a hledějme inflexní body, tj. body, pro které platí

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = 0.$$

Druhou derivaci spočítáme derivací (1.16)

$$\frac{d^2f}{dx^2} = -\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \left\{1 - \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right\}.$$

V inflexním bodě musí být nulová složená závorka v posledním výrazu

$$x - \mu = \pm\sigma.$$

Parametr  $\sigma$  proto udává pološířku křivky normálního rozdělení mezi inflexními body.

7. Parametr  $\sigma$  je významnou veličinou z hlediska pravděpodobnostního počtu. S rostoucí hodnotou  $\sigma$  se křivka normálního rozdělení rozšiřuje, a tím roste velikost hustoty pravděpodobnosti pro hodnoty náhodné proměnné, které jsou vzdálenější od maxima. Roste tak rozptyl jejich hodnot a klesá přesnost měření. Hodnota  $\sigma$  se proto nazývá směrodatná odchylka nebo krátce chyba měření. Pravděpodobnost, že náhodná proměnná padne do intervalu  $(\mu - \sigma; \mu + \sigma)$ , je

$$P(\mu - \sigma, \mu + \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx \doteq 0,6827. \quad (1.22)$$

To znamená, že ve velkém souboru měření bude zhruba 68% hodnot ležet v intervalu  $(\mu - \sigma; \mu + \sigma)$ . Podobně další hodnoty

$$P(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\mu-2\sigma}^{\mu+2\sigma} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx \doteq 0,9545, \quad (1.23)$$

$$P(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\mu-3\sigma}^{\mu+3\sigma} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx \doteq 0,9973. \quad (1.24)$$

Výše uvedené hodnoty byly získány numerickou integrací, protože tyto integrály nelze řešit analyticky. Poslední z integrálů říká, že do intervalu  $(\mu - 3\sigma; \mu + 3\sigma)$  padne naměřená hodnota s pravděpodobností 99,73%. Pravděpodobnost 0,27%, že některá naměřená hodnota padne mimo tento interval, lze pro většinu běžných účelů považovat za velmi malou. Proto hodnotu  $3\sigma$  považujeme za maximální chybu, které se běžně dopouštíme, a označujeme ji jako tzv. mezní chybu. Mezní chybu budeme označovat symbolem  $\kappa$ .

$$\boxed{\kappa = 3\sigma} \quad (1.25)$$

Někdy se také uvádí tzv. pravděpodobná chyba  $\gamma$ , pro kterou platí

$$P(\mu - \gamma, \mu + \gamma) = 0,5.$$

Opět z numerických výpočtů vyplývá

$$\gamma \doteq \frac{2}{3}\sigma.$$

8. Lineární kombinace náhodných proměnných  $x_i$  s normálním rozdělením

$$x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$$

je náhodná proměnná, která má opět normální rozdělení s parametry

$$\begin{aligned} \mu &= a_1 \mu_1 + a_2 \mu_2 + \dots + a_n \mu_n, \\ \sigma^2 &= a_1^2 \sigma_1^2 + a_2^2 \sigma_2^2 + \dots + a_n^2 \sigma_n^2. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Platnost tohoto tvrzení si ověříme na zjednodušeném případě součtu dvou náhodných proměnných  $x_1$  a  $x_2$ . Nechť jsou hustoty pravděpodobnosti těchto náhodných proměnných dány funkcemi  $f_1$  a  $f_2$

$$\begin{aligned} f_1(x_1) &= \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{(x_1 - \mu_1)^2}{2\sigma_1^2} \right], \\ f_2(x_2) &= \frac{1}{\sigma_2 \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{(x_2 - \mu_2)^2}{2\sigma_2^2} \right], \end{aligned}$$

Hledáme hustotu pravděpodobnosti náhodné proměnné

$$x = x_1 + x_2. \quad (1.27)$$

Aby výsledná hodnota měření byla  $x$  a přitom první náhodná proměnná má hodnotu  $x_1$ , musí mít druhá proměnná  $x_2$  současně hodnotu  $x - x_1$ . Pravděpodobnost současného splnění dvou náhodných jevů je dána součinem jejich pravděpodobností. Hustota pravděpodobnosti  $f(x)$  bude dána součtem hustot pravděpodobnosti všech případů, kdy byl splněn vztah (1.27)

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x_1) f_2(x - x_1) dx_1. \quad (1.28)$$

Vztah (1.28) je tzv. konvoluce dvou funkcí. Dosazením

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ -\frac{(x_1 - \mu_1)^2}{2\sigma_1^2} \right] \exp \left[ -\frac{(x - x_1 - \mu_2)^2}{2\sigma_2^2} \right] dx_1, \\ f(x) &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp \left[ -\frac{\mu_1^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(x - \mu_2)^2}{2\sigma_2^2} \right] \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2} \right) x_1^2 + \left( \frac{\mu_1}{\sigma_1^2} + \frac{x - \mu_2}{\sigma_2^2} \right) x_1 \right] dx_1. \end{aligned}$$

Využijeme vztahu [7]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-p^2 x^2 \pm qx) dx = \exp \left( \frac{q^2}{4p^2} \right) \frac{\sqrt{\pi}}{p} \quad [p > 0]$$

a po úpravě dostaneme

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}} \exp \left[ -\frac{(\mu_1 + \mu_2 - x)^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)} \right],$$

což je normální rozdělení s parametry  $\mu = \mu_1 + \mu_2$  a  $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$ . Podobnou úvahou a indukcí lze důkaz rozšířit na libovolnou lineární kombinaci náhodných proměnných.

9. Zvláštním případem normálního rozdělení je tzv. standardní normální rozdělení, které má tvar

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{x^2}{2}\right] \quad (1.29)$$

Jedná se tedy o normální rozdělení s parametry  $\mu = 0$  a  $\sigma = 1$ . Každou náhodnou proměnnou  $x$  s normálním rozdělením můžeme převést na proměnnou  $X$  se standardním normálním rozdělením pomocí transformace

$$X = \frac{x - \mu}{\sigma}, \quad (1.30)$$

kde  $\mu$  a  $\sigma$  jsou parametry příslušející rozdělení proměnné  $x$ .

10. Distribuční funkci normálního rozdělení podle (1.9) nelze analyticky vyjádřit. Distribuční funkci standardního normálního rozdělení

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left[-\frac{t^2}{2}\right] dt$$

lze pro  $x \geq 0$  s přesností lepší než  $10^{-7}$  aproximovat vztahem [5]:

$$F(x) \approx 1 - \frac{\exp(-x^2/2)}{\sqrt{2\pi}} y(a - by + cy^2 - dy^3 + ey^4), \quad (1.31)$$

kde

$$y = \frac{1}{1 + 0,2316419x}$$

$$a = 0,3193815$$

$$b = 0,3565638$$

$$c = 1,781478$$

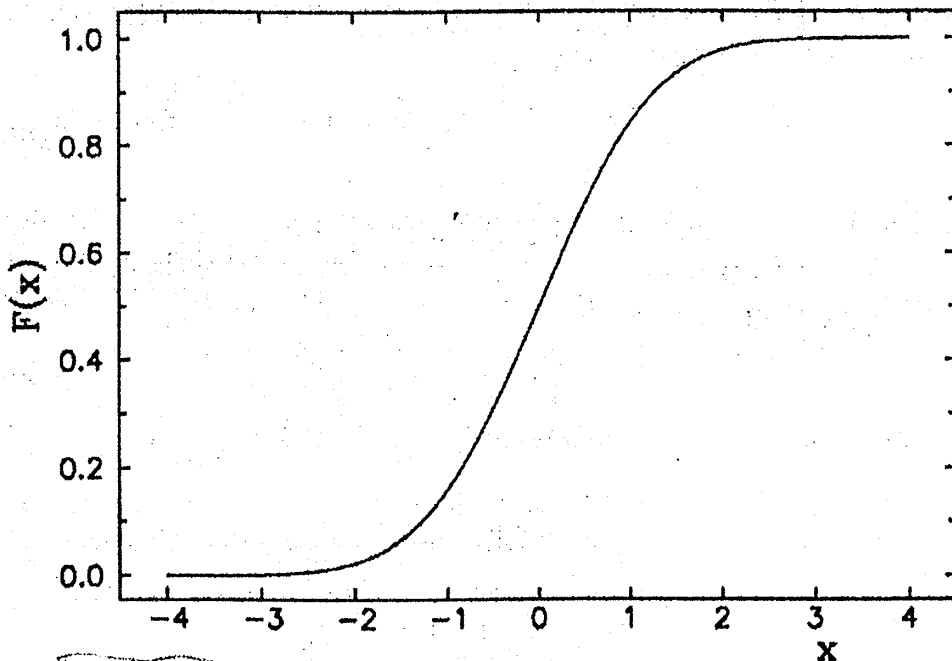
$$d = 1,821256$$

$$e = 1,330274$$

Pro  $x < 0$  se využije vztahu

$$F(x) = 1 - F(-x), \quad (1.32)$$

který lze snadno odvodit z (1.18) a (1.8). Graf této aproximativní funkce je na obrázku 14. Tento vztah může být s výhodou využit například pro porovnání teoretické distribuční funkce a skutečné distribuční funkce zkonstruované z naměřených dat. Na základě tohoto srovnání lze usuzovat, zda mají experimentální data normální rozdělení či nikoliv. Například srovnáním obrázku 14 a obrázku 7 lze usoudit, že náhodná proměnná popisující výstup z optického přístroje (příklad s daty v obrázku 3) by mohla mít normální rozdělení.



Obr. 14: Distribuční funkce standardního normálního rozdělení

### 1.4.2.3 Rozdělení $\chi^2$ , Studentovo a rovnoměrné rozdělení

Přestože je normální rozdělení nejčastějším případem, můžeme se setkat i s jinými druhy rozdělení. Příkladem může být měření výkonu elektrického proudu uvolňovaného na rezistoru. Obvodem může protékat elektrický proud, jehož velikost má normální rozdělení (proud může mít kladnou i zápornou hodnotu - může protékat oběma směry), ale výkon je kladná veličina ( $P = RI^2$ ). Jen tímto jednoduchým rozbořem zjistíme, že hodnoty výkonu nemohou mít normální rozdělení, protože normální rozdělení připouští výskyt jakékoli reálné (tj. i záporné) hodnoty náhodné proměnné. Výkon el. proudu musí mít tedy takové rozdělení, pro které platí  $g(x) = 0$  pro  $x < 0$ . V tomto případě se jedná o rozdělení odvozené z rozdělení  $\chi^2$  (čti  $\chi^2$  kvadrát). Takové rozdělení má veličina, která je součtem  $n$  kvadrátů nezávislých proměnných se standardním normálním rozdělením.

Pro lepší pochopení si odvodíme hustotu pravděpodobnosti  $g$  veličiny  $x$ , pro kterou platí

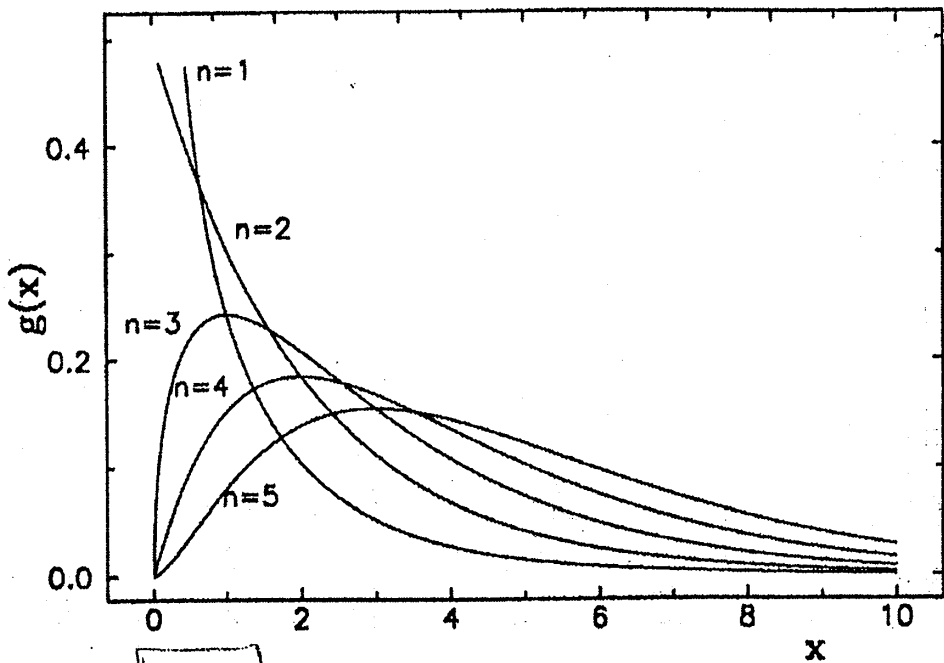
$$x = y^2,$$

kde  $y$  je veličina se standardním normálním rozdělením. Pravděpodobnost toho, že hodnota veličiny  $x$  bude ležet v intervalu  $(0; x)$ , je rovna pravděpodobnosti toho, že veličina  $y$  bude mít hodnotu v intervalu  $(-\sqrt{x}; \sqrt{x})$ . Pravděpodobnosti vyjádříme pomocí distribučních funkcí

$$G(x) = F(\sqrt{x}) - F(-\sqrt{x}).$$

Pro distribuční funkci standardního normálního rozdělení  $F$  využijeme vztahu (1.32)

$$G(x) = 2F(\sqrt{x}) - 1.$$



Obr. 15: Rozdělení  $\chi^2$  pro různé stupně volnosti  $n$

Derivací rovnice podle  $x$  (viz vztah (1.10)) dostaneme hustotu pravděpodobnosti  $g$ . Na pravou stranu dosadíme hustotu pravděpodobnosti standardního normálního rozdělení (1.29) s argumentem  $\sqrt{x}$  a derivací argumentu:

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \exp\left[-\frac{x}{2}\right]. \quad (1.33)$$

Obecnějším případem je rozdělení veličiny, která je součtem  $n$  kvadrátů veličin se standardním normálním rozdělením. Pak mluvíme o rozdělení  $\chi^2$  s  $n$ -stupni volnosti [5]<sup>1</sup>

$$g(x) = \frac{1}{2\Gamma(n/2)} \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^{n-2}} \exp\left[-\frac{x}{2}\right]. \quad (1.34)$$

Vztah (1.33) je speciálním případem (1.34) pro  $n = 1$  ( $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ ). Graf rozdělení  $\chi^2$  pro různé stupně volnosti je na obrázku 15. Střední hodnota rozdělení (1.34) je

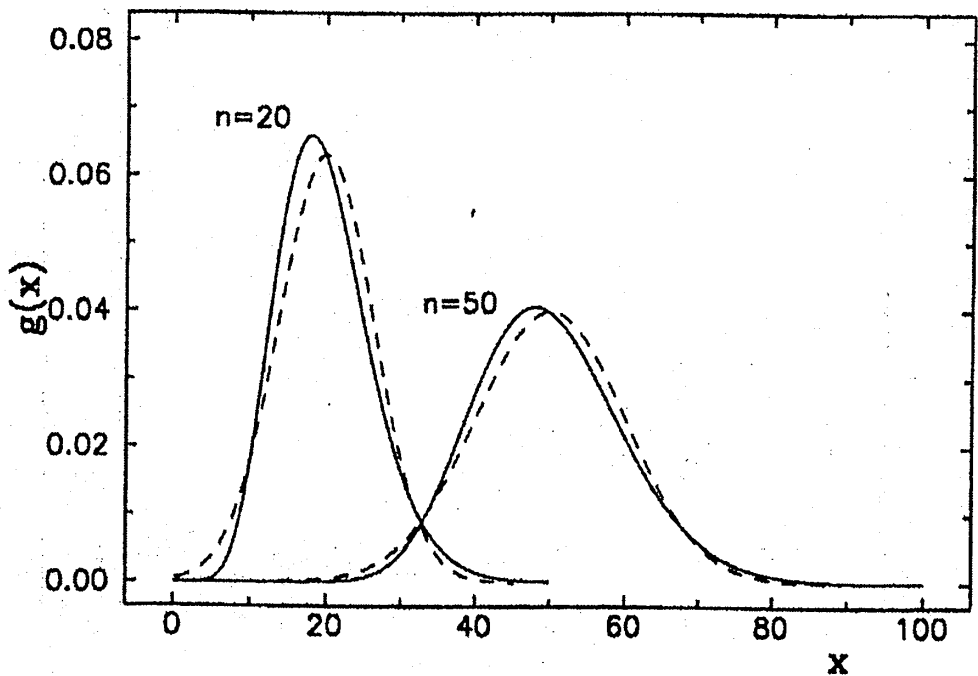
$$E(x) = n. \quad (1.35)$$

Při velkém počtu stupňů volnosti se rozdělení  $\chi^2$  blíží k normálnímu rozdělení. To je znázorněno na obrázku 16.

<sup>1</sup>Ve vztahu je speciální funkce  $\Gamma$ , která je definována integrálem [7]

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} \exp(-t) dt.$$





Obr. 16: Srovnání rozdělení  $\chi^2$  (plná čára) s normálním rozdělením se stejnou střední hodnotou (přerušovaná čára)

W. S. GOSSET

Dalším rozdělením, se kterým budeme pracovat je Studentovo rozdělení<sup>2</sup> (někdy je označováno jako t-rozdělení). Tímto rozdělením se řídí náhodná veličina  $t$ , která je definována vztahem

$$t = \frac{x_0}{\sqrt{x/n}}$$

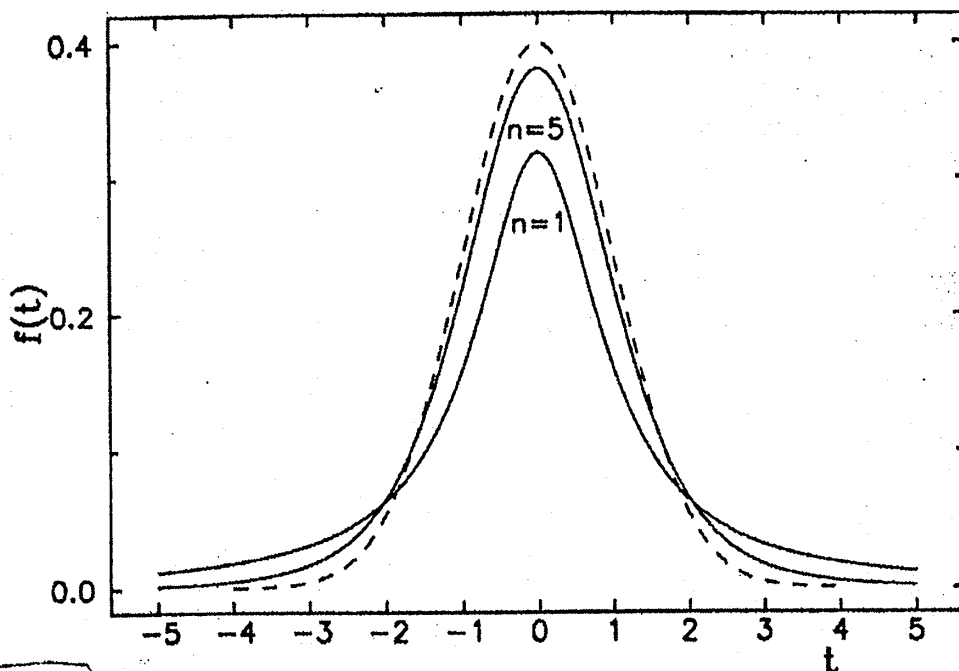
kde náhodná proměnná  $x_0$  má standardní normální rozdělení a náhodná proměnná  $x$  má rozdělení  $\chi^2$  s  $n$  stupni volnosti. Proměnné  $x_0$  a  $x$  jsou navzájem nezávislé. Proměnná  $t$  má pak Studentovo rozdělení s  $n$  stupni volnosti, které je popsáno vztahem [5]

$$f(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \quad (1.36)$$

Graf Studentova rozdělení je na obrázku 17, na kterém můžeme porovnat tvar rozdělení se standardním normálním rozdělením. Je zřejmé, že s rostoucím počtem stupňů volnosti se Studentovo rozdělení rychle blíží normálnímu.

Posledním příkladem rozdělení je tzv. rovnoměrné rozdělení. Takové rozdělení má náhodná proměnná, která nabývá libovolné hodnoty z intervalu

<sup>2</sup>Název Studentovo rozdělení pochází z pseudonymu „Student“, pod kterým publikoval své práce anglický chemik a matematik W. S. Gosset. Pracoval v laboratoři pivovaru Guinness v Dublinu, kde se snažil statisticky podchytit faktory ovlivňující kvalitu piva. V roce 1908 vydal článek o intervalovém odhadu střední hodnoty normálního rozdělení, ve kterém se právě tohoto rozdělení využívá.



Obr. 17: Srovnání Studentova rozdělení (plná čára) se standardním normálním rozdělením (přerušovaná čára)

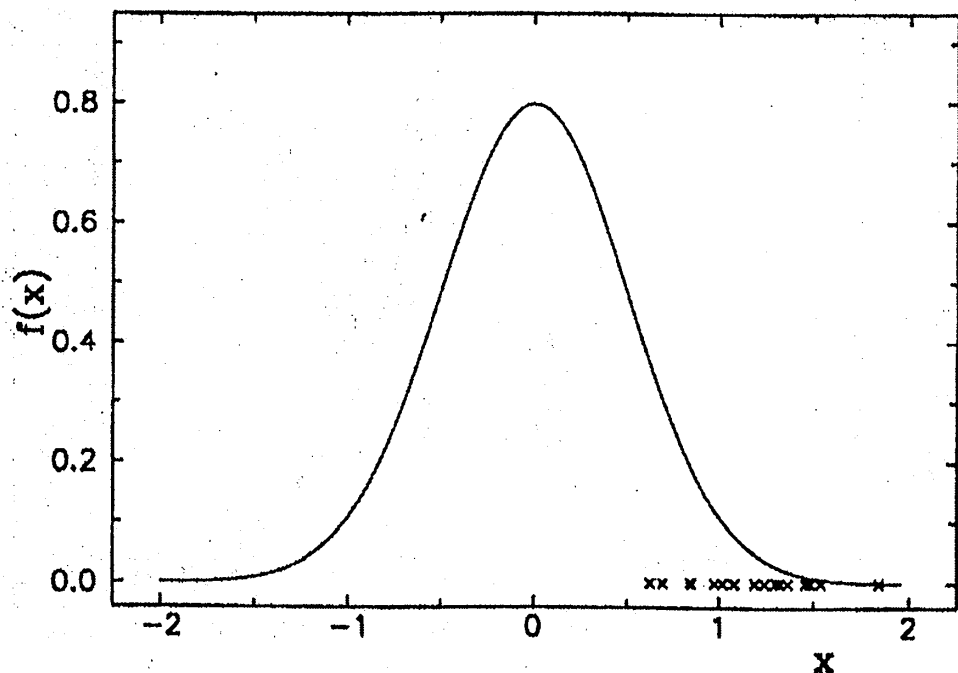
$a; b$ ) s konstantní hustotou

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{b-a} & x \in \langle a; b \rangle \\ f(x) &= 0 & x \notin \langle a; b \rangle \end{aligned} \quad (1.37)$$

Velikost hustoty pravděpodobnosti je taková, aby plocha pod křivkou byla jednotková (viz 1.8). Takové rozdělení mají například náhodné chyby vznikající zaokrouhlováním čísel při výpočtech.

#### 1.4.2.4 Odhad parametrů normálního rozdělení

V předchozích kapitolách jsme se seznámili s několika rozděleními. Nyní se budeme zabývat rozdělením, které je pro fyzikální měření nejdůležitější, tj. normálním rozdělením. Cílem fyzikálního měření je získat údaj o skutečné hodnotě měřené veličiny. Víme již, že tato hodnota je rovna střední hodnotě normálního rozdělení. Výsledkem měření není ale hustota pravděpodobnosti, nýbrž soubor naměřených hodnot. Stojíme tedy před problémem, jakým způsobem z těchto hodnot určit parametry rozdělení, kterým se měřená veličina řídí. Vzhledem k tomu, že soubor naměřených hodnot je vždy konečný, nelze nikdy určit hledané parametry neomezeně přesně. Zpracováním měření tedy získáme odhad parametrů rozdělení, nikdy nelze získat přesné skutečné hodnoty. Výsledkem jakýchkoli matematických operací s hodnotami náhodné proměnné je totiž opět hodnota náhodné proměnné. Takto je nutné pohlížet i na výsledky získané zpracováním měření. Znalosti chování náhodných proměnných nám ale umožňují říci, jak kvalitní je náš výsledek, tj. s ja-



Obr. 18: Špatný odhad parametrů rozdělení a naměřené hodnoty (křížky)

kou pravděpodobností se v oblasti, kterou jsme vymezili naším odhadem, nachází skutečná hodnota. Tato nejistota by nás neměla odrazovat od využívání výsledků měření, protože vhodnou organizací experimentu a volbou počtu měření lze skutečnou hodnotu často určit s přesností, která je v praxi dostatečná. Možností, jak odhadnout velikost hledaného parametru, je jistě mnoho. Dobrý odhad by měl mít následující vlastnosti:

nestrannost - odhad je nestranný (nevychýlený), jestliže střední hodnota odhadu je rovna jeho skutečné hodnotě (nezávisle na počtu měření)

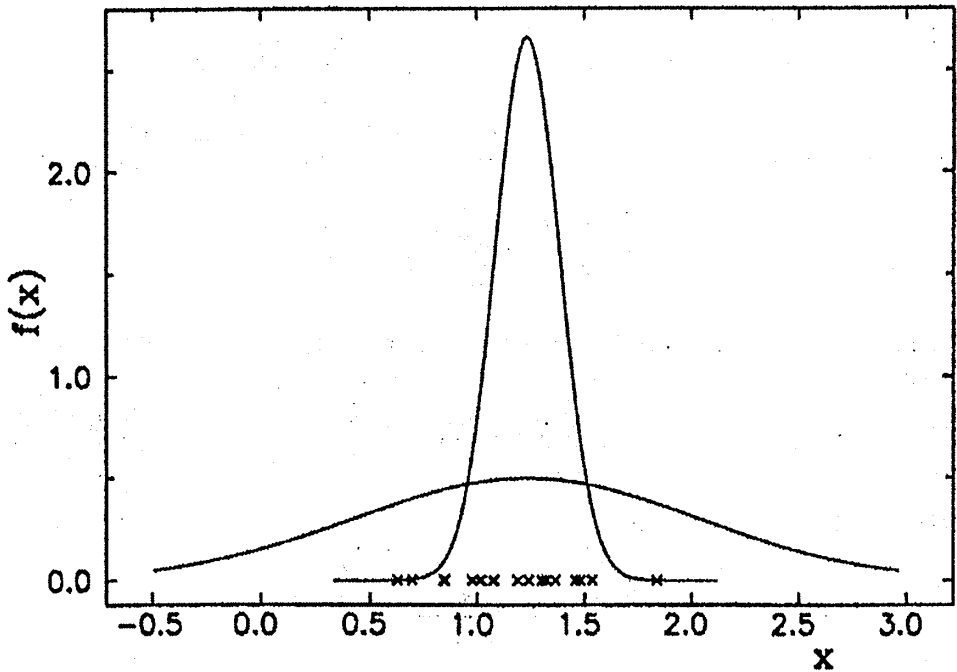
konzistence - odhad je konzistentní, jestliže s rostoucím počtem měření hodnota odhadu konverguje ke skutečné hodnotě

efektivnost - odhad je efektivní, jestliže jeho rozptyl je minimální (zpravidla se rozptyl zmenšuje s rostoucím počtem měření)

Mějme soubor  $N$  naměřených hodnot  $x_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) náhodné veličiny s normálním rozdělením (1.15). Z naměřených hodnot máme odhadnout hodnoty parametrů  $\mu$  a  $\sigma$ . Hodnoty odhadů budeme značit  $\hat{\mu}$  a  $\hat{\sigma}$  tak, abychom je odlišili od neznámých skutečných hodnot.

Na obrázku 18 jsou zakresleny hodnoty získané měřením (vyznačené křížky) a příklad zvolené hustoty pravděpodobnosti. Parametry rozdělení byly v tomto případě zvoleny evidentně špatně, protože některé naměřené hodnoty leží v oblasti, kde rozdělení udává velmi malou hodnotu hustoty pravděpodobnosti, tj. je velmi nepravděpodobné, aby v takových místech ležely naměřené hodnoty. Většinu naměřených hodnot můžeme očekávat v blízkosti maxima rozdělení.

Rozdělení s lépe zvolenou hodnotou  $\hat{\mu}$  jsou na obrázku 19. Skupina naměřených bodů již leží v blízkosti maxima rozdělení. Dalším problémem je ale volba šířkového parametru  $\hat{\sigma}$ . Pokud zvolíme šířku příliš malou (viz úzká křivka na obrázku), některé naměřené hodnoty se opět dostanou do oblasti s malou hodnotou hustoty pravděpodobnosti. Pokud zvolíme šířku příliš velkou (viz široká křivka na obrázku), v okolí skupiny naměřených hodnot zůstane široký interval, ve kterém je ještě velká hodnota hustoty pravděpodobnosti, ale neleží zde žádné naměřené hodnoty, což je opět nepravděpodobná situace. Princip této úvahy vede k metodě pro objektivní stanovení  $\hat{\mu}$  a  $\hat{\sigma}$ .



Obr. 19: Rozdělení s různými šířkovými parametry a naměřené hodnoty (křížky)

Zavedeme veličinu, která vyjadřuje vhodnost volby parametrů rozdělení pro naměřené hodnoty. Tato veličina se nazývá věrohodnost (označ.  $L$ ). Věrohodnost zkoumaného rozdělení je dána součinem hustot pravděpodobnosti zvoleného rozdělení pro naměřené hodnoty

$$L(\mu, \sigma) = f(x_1)f(x_2) \dots f(x_N). \quad (1.38)$$

Smysl této veličiny vyplývá z předchozí diskuse. Jestliže některá naměřená hodnota padne do oblasti s malou hodnotou hustoty pravděpodobnosti (špatná volba  $\hat{\mu}$  nebo příliš malé  $\hat{\sigma}$ ), pak celý součin bude mít malou hodnotu, a tedy malou věrohodnost. V případě volby příliš velké šířky  $\hat{\sigma}$  všechny body sice mohou ležet v oblasti s relativně velkou hodnotou hustoty pravděpodobnosti, ale příliš velkým rozšířením klesá velikost hustoty pravděpodobnosti v maximu, a tím klesá i celková věrohodnost zvolených parametrů. Hledáme tedy takové parametry, pro které má věrohodnost  $L$  maximum. Pro snazší

výpočet budeme hledat maximum logaritmu věrohodnosti, neboť funkce  $L$  a  $\ln L$  mají extrém ve stejných hodnotách  $\mu$  a  $\sigma$

$$\ln L(\mu, \sigma) = \sum_{i=1}^N \ln f(x_i). \quad (1.39)$$

V maximum musí být <sup>3</sup>

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = 0 \quad \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = 0. \quad (1.40)$$

Do vztahu (1.39) dosadíme za funkci  $f$  normální rozdělení (1.15) a dostaneme

$$\ln L(\mu, \sigma) = -\frac{N}{2}(\ln \sigma^2 + \ln 2\pi) - \sum_{i=1}^N \frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}. \quad (1.41)$$

Hledáme nyní maximum logaritmu věrohodnosti. Podle první podmínky v (1.40)

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = \sum_{i=1}^N \frac{x_i - \mu}{\sigma^2}.$$

Položíme derivaci rovnu nule a získáme odhad  $\hat{\mu}$

$$\sum_{i=1}^N (x_i - \hat{\mu}) = 0, \quad (1.42)$$

z toho sečtením dostaneme

$$\hat{\mu} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i. \quad (1.43)$$

Nejlepším odhadem střední hodnoty normálního rozdělení (a tím i skutečné hodnoty měřené veličiny) je aritmetický průměr naměřených hodnot.

Podle druhé podmínky v (1.40) hledáme takové  $\hat{\sigma}^2$ , pro které bude maximální věrohodnost

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = \sum_{i=1}^N \frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^4} - \frac{N}{2\sigma^2}$$

<sup>3</sup>Zde se setkáváme s pojmem parciální derivace, který se označuje symbolem  $\partial$ . Parciální derivace jsou derivace funkcí více proměnných. Při jejich výpočtu derivujeme danou funkci jako funkci jedné proměnné (vzhledem ke které máme vypočítat derivaci). Ostatní proměnné přitom pokládáme za konstanty a používáme pak pravidla pro derivace funkcí jedné proměnné. Geometrický význam parciální derivace si můžeme představit tak, že derivaci počítáme pro křivku, která je řezem plochy grafu funkce. Řez je určen hodnotami ostatních zařixovaných proměnných. Například pro funkci  $z = x^2y$  je

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x^2y \quad \text{a} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^2.$$

Další informace o parciálních derivacích může čtenář najít např. v [7].

Pro maximálně věrohodný odhad  $\hat{\sigma}^2$  musí být pravá strana rovnice rovna nule

$$\sum_{i=1}^N (x_i - \hat{\mu})^2 = N\hat{\sigma}^2,$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \hat{\mu})^2. \quad (1.44)$$

Ukážeme si, že takto získaný odhad  $\hat{\sigma}^2$  je takzvaně vychýlený, tj. jeho střední hodnota se nerovná skutečné hodnotě  $\sigma^2$ . Rovnici (1.44) upravíme a vydělíme kvadrátem skutečné hodnoty šířkového parametru

$$\frac{N\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^N \left( \frac{x_i - \hat{\mu}}{\sigma} \right)^2. \quad (1.45)$$

Výraz na pravé straně lze upravit do tvaru <sup>4</sup>

$$\frac{N\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \left( \frac{x_j}{\sigma\sqrt{2}} - \frac{x_i}{\sigma\sqrt{2}} \right)^2.$$

Na pravé straně rovnice je součet kvadrátů proměnných, které mají podle (1.26) standardní normální rozdělení. Každý ze sčítanců na pravé straně rovnice má proto rozdělení  $\chi^2$  se stupněm volnosti  $n = 1$ . Podle (1.35) je střední hodnota takového rozdělení rovna 1. Podle (1.13) střední hodnotu výrazu na

---

<sup>4</sup>Dokážeme si, že platí

$$\sum_{i=1}^N \left( \frac{x_i - \hat{\mu}}{\sigma} \right)^2 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \left( \frac{x_j}{\sigma\sqrt{2}} - \frac{x_i}{\sigma\sqrt{2}} \right)^2.$$

Výraz na pravé straně formálně rozšíříme o prvky  $i = j$ . Hodnotu výrazu však tímto nezměníme. Úpravami dostaneme

$$2N \sum_{i=1}^N (x_i - \hat{\mu})^2 = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N (x_j - x_i)^2.$$

Umocněním získáme

$$2N \left( \sum_{i=1}^N x_i^2 - 2\hat{\mu} \sum_{i=1}^N x_i + N\hat{\mu}^2 \right) = \sum_{j=1}^N \left( Nx_j^2 - 2x_j \sum_{i=1}^N x_i + \sum_{i=1}^N x_i^2 \right).$$

Dosazením z (1.43) a úpravou:

$$2N \left( \sum_{i=1}^N x_i^2 - N\hat{\mu}^2 \right) = N \sum_{j=1}^N x_j^2 - 2N\hat{\mu} \sum_{j=1}^N x_j + N \sum_{i=1}^N x_i^2,$$

$$2N \sum_{i=1}^N x_i^2 - 2N^2\hat{\mu}^2 = 2N \sum_{i=1}^N x_i^2 - 2N^2\hat{\mu}^2.$$

pravé straně rovnice získáme tak, že sečteme střední hodnoty jednotlivých sčítanců. Tím dostaneme hodnotu  $N^2 - N$ , protože součet obsahuje  $N^2 - N$  prvků. Dosazením a úpravou získáme střední hodnotu  $\hat{\sigma}^2$

$$E\left(\frac{N\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}\right) = N - 1,$$

$$E(\hat{\sigma}^2) = \sigma^2 \frac{N - 1}{N}. \quad (1.46)$$

Náš odhad  $\hat{\sigma}^2$  je sice vychýlený ( $E(\hat{\sigma}^2) \neq \sigma^2$ ), ale tzv. konzistentní (pro  $N \rightarrow \infty$  je  $E(\hat{\sigma}^2) \rightarrow \sigma^2$ ). Podle vztahu (1.46) je zřejmé, že nevychýleným odhadem  $\sigma^2$  je

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N - 1} \sum_{i=1}^N (x_i - \hat{\mu})^2. \quad (1.47)$$

Výše uvedená veličina  $\hat{\sigma}$  se nazývá směrodatná odchylka jednoho měření. Musíme mít stále na paměti, že získané veličiny  $\hat{\mu}$  a  $\hat{\sigma}$  jsou odhady skutečných hodnot a jsou to náhodné veličiny, neboť byly získány výpočtem z jiných náhodných veličin. Při opakování celého pokusu bychom z dalších  $N$  měření získali jiné hodnoty, i když charakterizují tutéž veličinu. Veličina  $\hat{\mu}$  byla podle vztahu 1.43 získána jako lineární kombinace veličin s normálním rozdělením a má proto sama normální rozdělení. Podle (1.26) je střední hodnota tohoto rozdělení  $\mu$  a šířkový parametr, jehož odhad označíme  $\hat{\delta}$ , je

$$\hat{\delta}^2 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{N^2} \hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{\sigma}^2}{N}. \quad (1.48)$$

Dosazením z (1.47) dostaneme

$$\hat{\delta} = \sqrt{\frac{1}{N(N - 1)} \sum_{i=1}^N (x_i - \hat{\mu})^2}. \quad (1.49)$$

Dostali jsme tzv. Besselův vztah<sup>5</sup>, který vyjadřuje směrodatnou odchylku aritmetického průměru.

<sup>5</sup>Tento vztah lze upravit do tvaru, který někdy může být pro výpočty výhodnější:

$$\sum_{i=1}^N (x_i - \hat{\mu})^2 = \sum_{i=1}^N x_i^2 - 2\hat{\mu} \sum_{i=1}^N x_i + \sum_{i=1}^N \hat{\mu}^2 = \sum_{i=1}^N x_i^2 - 2N\hat{\mu}^2 + N\hat{\mu}^2 = \sum_{i=1}^N x_i^2 - N\hat{\mu}^2.$$

Dosazením

$$\hat{\delta} = \sqrt{\frac{1}{N(N - 1)} \left( \sum_{i=1}^N x_i^2 - N\hat{\mu}^2 \right)}.$$

Co nám umožňují získané parametry říci o skutečné hodnotě? Lze například tvrdit, že v intervalu  $(\hat{\mu} - \hat{\delta}; \hat{\mu} + \hat{\delta})$  leží skutečná hodnota  $\mu$ ? Statistika umí dát na tuto otázku odpověď opět ve formě pravděpodobnosti. Otázku lze formulovat i obecněji:

*Jaká je pravděpodobnost toho, že skutečná střední hodnota  $\mu$  leží v intervalu  $(\hat{\mu} - k\hat{\delta}; \hat{\mu} + k\hat{\delta})$ ?*

Úpravou výrazu lze zjišťovat i pravděpodobnost toho, že

$$-k < \frac{\hat{\mu} - \mu}{\hat{\delta}} < k.$$

Pokud najdeme rozdělení veličiny  $(\hat{\mu} - \mu)/\hat{\delta}$ , odpověď získáme výpočtem pravděpodobnosti výskytu této veličiny v intervalu  $(-k; k)$ . Úpravou získáme výraz

$$\frac{\hat{\mu} - \mu}{\hat{\delta}} = \frac{\hat{\mu} - \mu}{\delta} \frac{\delta}{\hat{\delta}},$$

kde  $\delta$  je skutečná hodnota šířkového parametru normálního rozdělení aritmetického průměru. Pomocí vztahů (1.48) a (1.47) dostaneme

$$\frac{\hat{\mu} - \mu}{\delta} \frac{\delta}{\hat{\delta}} = \frac{\hat{\mu} - \mu}{\delta} \left( \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}} \right)^{-1} = \frac{\hat{\mu} - \mu}{\delta} \left( \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \left( \frac{x_i - \hat{\mu}}{\sigma} \right)^2} \right)^{-1}.$$

Veličina  $(\hat{\mu} - \mu)/\delta$  má podle (1.30) standardní normální rozdělení. Výraz

$$\sum_{i=1}^N \left( \frac{x_i - \hat{\mu}}{\sigma} \right)^2$$

má rozdělení  $\chi^2$  s  $N - 1$  stupni volnosti<sup>6</sup>. Veličina  $(\hat{\mu} - \mu)/\hat{\delta}$  má proto Studentovo rozdělení s  $N - 1$  stupni volnosti. Abychom odpověděli na výše uvedenou otázku, stačí vypočítat plochu pod křivkou Studentova rozdělení v intervalu  $(-k; k)$ . K tomu musíme znát počet stupňů volnosti, který je roven počtu měření zmenšenému o jedničku. V praxi se setkáme spíše s opačně formulovanou otázkou.

*Jakou hodnotu  $k$  musíme zvolit, aby skutečná střední hodnota  $\mu$  ležela v intervalu  $(\hat{\mu} - k\hat{\delta}; \hat{\mu} + k\hat{\delta})$  s danou pravděpodobností?*

Jinak řečeno hledáme takovou hodnotu  $k$ , aby plocha pod křivkou Studentova rozdělení s daným počtem stupňů volnosti byla rovna určité hodnotě. Tento výpočet lze provést pouze numericky. Výsledky výpočtu jsou uvedeny v tabulce v dodatku C. Hodnoty  $k$  se nazývají Studentovy koeficienty. Vynásobíme-li hodnotu  $\delta$  těmito koeficienty, dostaneme interval, ve kterém leží skutečná hodnota s danou pravděpodobností (tzv. hladina spolehlivosti). Běžně používaný způsob zápisu výsledků měření má hladinu spolehlivosti 0,6827. Pokud výsledek zapisujeme s jinou hladinou spolehlivosti, musíme to u výsledku uvést.

<sup>6</sup>Stejně jako v (1.45) lze výraz rozložit na součet kvadrátů veličin se standardním normálním rozdělením. Pouze  $N - 1$  těchto veličin je vzájemně nezávislých, protože z  $N$  hodnot  $x_i$  vytváříme dvojice  $x_i - x_j$ . Intuitivně lze určit, že součet má rozdělení  $\chi^2$  s  $N - 1$  stupni volnosti. Důkaz lze nalézt např. v [4].



### Příklad 1.6

Měřením napětí byly získány tyto hodnoty (ve voltech):

3,85 3,42 3,92 3,64 3,73 3,58 3,66

Určete:

- střední hodnotu napětí
- směrodatnou odchylku jednoho měření
- směrodatnou odchylku odhadu střední hodnoty
- interval, ve kterém leží skutečná hodnota napětí s pravděpodobností 0,5
- interval, ve kterém leží skutečná hodnota napětí s pravděpodobností 0,6827
- interval, ve kterém leží skutečná hodnota napětí s pravděpodobností 0,9

Řešení:

- Střední hodnotu odhadneme pomocí (1.43), tj. aritmetickým průměrem:  $\bar{\mu} = 3,6857$  V.
- Směrodatnou odchylku jednoho měření odhadneme pomocí (1.47):  $\hat{\sigma} = 0,1675$  V.
- Směrodatnou odchylku aritmetického průměru získáme pomocí Besselova vztahu (1.49):  $\hat{\delta} = 0,0633$  V.
- Interval s hladinou spolehlivosti 0,5 získáme tak, že hodnotu  $\hat{\delta}$  vynásobíme Studentovým koeficientem z tabulky v dodatku C pro 6 stupňů volnosti tj.  $k = 0,718$ . Dostaneme tedy interval  $(3,686 \pm 0,045)$  V, tj. v intervalu  $(3,641; 3,731)$  V leží skutečná hodnota napětí s pravděpodobností 50%.
- Podobným způsobem budeme postupovat pro hladinu spolehlivosti 0,6827. Studentův koeficient je  $k = 1,091$ . Dostaneme tedy interval  $(3,686 \pm 0,069)$  V, tj.  $(3,617; 3,755)$  V.
- Pro hladinu spolehlivosti 0,9 máme Studentův koeficient  $k = 1,943$ . Skutečná hodnota leží s pravděpodobností 90% v intervalu  $(3,69 \pm 0,12)$  V, jinak zapsáno  $(3,57; 3,81)$  V. Je zřejmé, že s rostoucí hladinou spolehlivosti roste šířka intervalu.

Pozn.: Pro správný zápis výsledků měření platí pravidla, kterými se budeme zabývat později.

---

### 1.4.3 Hrubé chyby měření

Při rozboru druhů chyb v úvodní kapitole 1.4 jsme se seznámili s tzv. hrubými chybami. Tyto chyby vznikají mimořádným způsobem: náhlou změnou podmínek experimentu nebo nepozorností experimentátora. Proto se tyto chyby neřídí stejnými pravidly jako náhodné chyby. Řekli jsme si, že hrubě chybná měření se výrazně odlišují od ostatních měření. Tyto vlastnosti umožňují hrubě chybná měření identifikovat. Pro hranici, kdy lze říci, že naměřená hodnota se výrazně odlišuje od ostatních hodnot, můžeme využít intervalu mezní chyby (1,25). Pravděpodobnost, že naměřená hodnota zatížená pouze náhodnou chybou padne dovnitř tohoto intervalu, je 99,73%. Je tedy velmi málo pravděpodobné (0,27%), že správně naměřená hodnota bude ležet mimo tento interval. Proto lze všechna měření ležící mimo tento interval považovat za hrubě chybná a vyloučit je. Postup při zpracování měření je následující:

1. Ze souboru naměřených hodnot vypočítáme aritmetický průměr (odhad střední hodnoty)  $\hat{\mu}$  a odhad směrodatné odchylky jednoho měření  $\hat{\sigma}$ .
2. Vypočítáme odhad mezní chyby  $\hat{k} = 3\hat{\sigma}$ .
3. Ze souboru vyloučíme hodnoty ležící mimo interval  $(\hat{\mu} - \hat{k}; \hat{\mu} + \hat{k})$ .
4. Předchozí kroky opakujeme tak dlouho, až nedojde k vyloučení žádné hodnoty.

#### Příklad 1.7

Měřením odporu byly získány tyto hodnoty (v  $\Omega$ ):

125,3435	125,3859	125,6928	125,3712	125,3592
125,3355	125,3115	125,3526	125,3680	125,3866
125,4105	125,3847	125,3700	125,1123	125,3952
125,3351	125,3499	125,3847	125,3210	125,3129

Z těchto hodnot stanovíme odhady střední hodnoty a směrodatné odchylky jednoho měření:

$$\hat{\mu} = 125,3645 \Omega,$$

$$\hat{\sigma} = 0,0990 \Omega.$$

Interval mezní chyby je  $(125,0675; 125,6615)\Omega$ . Mimo tento interval leží hodnota 125,6928  $\Omega$ , kterou vyloučíme:

125,3435	125,3859		125,3712	125,3592
125,3355	125,3115	125,3526	125,3680	125,3866
125,4105	125,3847	125,3700	125,1123	125,3952
125,3351	125,3499	125,3847	125,3210	125,3129

Opakováním výpočtu získáme:

$$\hat{\mu} = 125,3469 \Omega,$$

$$\hat{\sigma} = 0,0635 \Omega.$$

Interval mezní chyby je nyní (125, 1564; 125, 5374)Ω. Vyloučíme hodnotu 125,1123Ω, která leží mimo:

125,3435	125,3859		125,3712	125,3592
125,3355	125,3115	125,3526	125,3680	125,3866
125,4105	125,3847	125,3700		125,3952
125,3361	125,3499	125,3847	125,3210	125,3129

Parametry tohoto souboru jsou:

$$\hat{\mu} = 125,3599 \Omega,$$

$$\hat{\sigma} = 0,0291 \Omega.$$

Interval mezní chyby: (125, 2726; 125, 4472)Ω. Všechny hodnoty již leží v tomto intervalu. Soubor naměřených hodnot je tak očištěn od hrubě chybných měření. Tento proces příliš neovlivnil odhad střední hodnoty, ale podstatně snížil směrodatnou odchylku.

#### 1.4.4 Chyby měřidel, celková chyba měření

Vlastnosti měřicích přístrojů jsou velmi důležitým faktorem, který může určovat výsledné chování měřené náhodné veličiny. Nevhodnou volbou měřicího přístroje může například dojít k situaci, kdy rozptyl měřené veličiny na vstupu do měřicího přístroje je tak malý, že její změny nejsou na stupnici přístroje pozorovatelné. Pozorovateli se pak může zdát, že měřená veličina se vůbec nemění. Bylo by mylné domnívat se, že chyba měřené veličiny je nulová a měření je absolutně přesné. Čtená hodnota může být konstantní, přestože objektivně dochází k malým změnám měřené veličiny. Tyto změny jsou však menší než je nejmenší změna, kterou lze na přístroji zaznamenat. Příznivější je opačná situace, kdy rozlišení měřicího přístroje je podstatně menší než skutečný rozptyl měřené veličiny. Měřidla charakterizujeme pomocí chyby měřidla. Je to souhrnná vlastnost měřidla vyjadřující chyby (systematické a náhodné), kterou měřidlo vnáší do měření. Chyba měřidla se udává jako mezní chyba. To znamená, že skutečná hodnota měřené veličiny se téměř jistě neliší od naměřené hodnoty více, než je chyba měřidla.

Pro stanovení chyby měřidla platí různá pravidla podle typu přístroje. U mechanických měřidel (pravítko, posuvka, mikrometr atd.) se chyba měřidla nejčastěji odhaduje jako jeden nebo polovina dílku stupnice. Například pro teploměr se stupnicí po 0,5 °C bude odhad chyby měřidla 0,5 °C nebo 0,25 °C. Zkušený experimentátor dokáže při vhodné velikosti dílku stupnice (0,7 až 7 mm) odhadovat i desetiny dílku. Proto při stanovení chyby měřidla bereme v úvahu i vlastní schopnosti. U měřidel ručkových (voltmetry, ampérmetry atd.) se hodnota chyby měřidla vypočítá pomocí tzv. třídy přesnosti přístroje, která bývá uvedena přímo na stupnici. Pokud není uvedena, lze použít pravidlo pro mechanická měřidla. U digitálních přístrojů hodnotu chyby nebo návod na její výpočet udává výrobce v dokumentaci k přístroji. Pokud tento údaj nemáme k dispozici, za hodnotu chyby považujeme jeden digit, tj. hodnotu nejmenší změny, kterou může přístroj na daném rozsahu

zobrazit (například pokud na displeji máme tři desetinná místa, pak chybu přístroje odhadneme jako 0,001). Důležitá je správná volba měřicího rozsahu přístroje, protože na něm závisí velikost chyby měřidla. Výpočtem chyb měřidel se budeme podrobněji zabývat v dodatku o vlastnostech měřicích přístrojů. Specifickým případem je měření času pomocí stopek. Chybu měřidla určenou podle stupnice (displeje) musíme zvětšit o reakční dobu pozorovatele, která představuje systematickou chybu měření.

Pro odhad celkové chyby měření je určující směrodatná odchylka střední hodnoty měřené veličiny a chyba měřidla  $\Delta$ . Celková mezní chyba  $\Delta_c$  se nejčastěji počítá podle vztahu

$$\Delta_c = \sqrt{(k\hat{\delta})^2 + \Delta^2}. \quad (1.50)$$

Musíme mít na paměti, že chyba měřidla  $\Delta$  je mezní chyba, a proto směrodatnou odchylku  $\hat{\delta}$  musíme převést na stejnou hladinu spolehlivosti (tj. 0,9973) pomocí Studentova koeficientu  $k$ . Výsledná chyba  $\Delta_c$  je také mezní chybou. Pro odhad celkové směrodatné odchylky měření lze využít vztahu 1.25

$$\hat{\delta}_c = \sqrt{\hat{\delta}^2 + \left(\frac{\Delta}{3}\right)^2}. \quad (1.51)$$

#### **Příklad 1.8**

Z deseti měření vodivosti digitálním konduktometrem s chybou  $\Delta = 0,01 \mu\text{S cm}^{-1}$  jsme získali střední hodnotu  $\hat{\mu} = 8,25 \mu\text{S cm}^{-1}$  a směrodatnou odchylku  $\hat{\delta} = 0,03 \mu\text{S cm}^{-1}$ . Studentův koeficient pro mezní chybu a 10 měření je  $k = 4,094$ . Celková mezní chyba měření je podle (1.50)

$$\Delta_c = \sqrt{(4,094 \cdot 0,03)^2 + 0,01^2} = 0,12 \mu\text{S cm}^{-1}.$$

V tomto případě je chyba měřidla zanedbatelná, protože výsledná mezní chyba je stejná jako mezní chyba střední hodnoty.

#### **Příklad 1.9**

Při 8 měřeních délky posuvkou jsme přečetli vždy stejnou hodnotu 6,35 mm. Chyba posuvky je 0,05 mm. V tomto případě je chyba měřidla určující, protože z naměřených hodnot bychom získali nulovou směrodatnou odchylku. Celková mezní chyba je

$$\Delta_c = 0,05 \text{ mm}.$$

Zvětšením počtu měření nelze v tomto případě chybu snížit.

### 1.4.5 Chyby nepřímých měření, zákon přenosu chyb

Zatím jsme se zabývali zpracováním přímých měření, tj. měření, při kterých jsou naměřené hodnoty hodnotami zkoumané veličiny. V praxi jsou častějším případem nepřímá měření, kdy z měřených veličin počítáme jinou veličinu. Zkoumaná veličina přitom může záviset na jedné přímo měřené veličině (například objem koule můžeme měřit nepřímo měřením průměru) nebo na více veličinách (například měření odporu může být založeno na měření úbytku napětí a proudu protékajícího měřeným rezistorem). Obecně nepřímo měřená veličina  $y$  závisí na  $n$  přímo měřených veličinách

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (1.52)$$

Předpokládejme, že veličiny  $x_i$  jsou navzájem nezávislé. Pro každou přímo měřenou veličinu  $x_i$  jsme získali z opakovaných měření odhady střední hodnoty  $\hat{\mu}_i$  a její směrodatné odchylky  $\hat{\delta}_i$ . Pro nepřímo měřenou veličinu  $y$  pak hledáme její střední hodnotu  $\hat{\mu}$  a směrodatnou odchylku  $\hat{\delta}$ . Odhad střední hodnoty získáme dosazením odhadů středních hodnot do vztahu (1.52) <sup>7</sup>

$$\hat{\mu} \approx f(\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \dots, \hat{\mu}_n). \quad (1.53)$$

Větším problémem je výpočet  $\hat{\delta}$ . V případě závislosti na jedné přímo měřené veličině by bylo možné vypočítat interval chyby dosazením hodnot  $\hat{\mu}_1 - \hat{\delta}_1$  a  $\hat{\mu}_1 + \hat{\delta}_1$  do vztahu (1.52) (za předpokladu, že funkce  $f$  je na tomto intervalu monotónní). Tento postup však nelze uplatnit u funkcí více proměnných. Dále uvedený postup výpočtu je sice aproximativní, ale není obecně na újmu přesnosti, protože pracujeme s hodnotami odhadů, tj. s „nepřesnými hodnotami“.

Označme  $\Delta x_i$  jako malou odchylku odhadu střední hodnoty  $i$ -té veličiny od její střední hodnoty  $\mu_i$

$$\Delta x_i = \hat{\mu}_i - \mu_i. \quad (1.54)$$

Zajímá nás, o kolik se změní funkční hodnota  $y$  v okolí bodu daném středními hodnotami  $\hat{\mu}_i$  při malých změnách všech veličin. To lze zjistit pomocí Taylorova rozvoje funkce  $f$

$$\Delta y = \frac{1}{1!} \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i + \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \Delta x_i \Delta x_j + \dots \quad (1.55)$$

Všechny parciální derivace jsou počítány pro hodnoty  $\hat{\mu}_i$ . Předpokládejme, že všechny členy řady od druhého a dále jsou zanedbatelné proti prvnímu členu. Tento předpoklad vychází z toho, že hodnoty  $\Delta x_i$  jsou malá navzájem

<sup>7</sup>Přesnější vztah je

$$\hat{\mu} \approx f(\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \dots, \hat{\mu}_n) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \hat{\delta}_i^2.$$

Rozdíl proti vztahu (1.53) však bývá často menší než velikost chyby.

nezávislá čísla a v dalších členech řady jsou v součinu, což jsou hodnoty řádově menší. Pak dostaneme

$$\Delta y = \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_{\hat{\mu}_1, \dots, \hat{\mu}_n} \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \Big|_{\hat{\mu}_1, \dots, \hat{\mu}_n} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \Big|_{\hat{\mu}_1, \dots, \hat{\mu}_n} \Delta x_n, \quad (1.56)$$

což je lineární aproximace funkce  $f$ . Funkční plochu jsme tedy nahradili v malém okolí odhadu střední hodnoty rovinou, jejíž analytické vyjádření je dáno lineární kombinací veličin  $\Delta x_i$ . Veličina  $\Delta x_i$  je náhodná proměnná s nulovou střední hodnotou a směrodatnou odchylkou  $\hat{\delta}_i$ . Podle (1.26) bude mít veličina  $\Delta y$  směrodatnou odchylku

$$\hat{\delta}^2 = a_1^2 \hat{\delta}_1^2 + a_2^2 \hat{\delta}_2^2 + \dots + a_n^2 \hat{\delta}_n^2,$$

kde  $a_i$  jsou koeficienty lineární kombinace (1.56)

$$a_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{\hat{\mu}_1, \dots, \hat{\mu}_n}.$$

Dostáváme vztah tzv. zákona přenosu chyb

$$\hat{\delta} = \sqrt{\left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_{\hat{\mu}_1, \dots, \hat{\mu}_n} \hat{\delta}_1 \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial x_2} \Big|_{\hat{\mu}_1, \dots, \hat{\mu}_n} \hat{\delta}_2 \right)^2 + \dots + \left( \frac{\partial f}{\partial x_n} \Big|_{\hat{\mu}_1, \dots, \hat{\mu}_n} \hat{\delta}_n \right)^2}. \quad (1.57)$$

Výše provedené aproximace omezují rozsah platnosti zákona přenosu chyb na situace, kdy se nepohybujeme v blízkosti bodu s nulovou první derivací funkce  $f$ .

Uvedený vztah dává do souvislosti odhady směrodatných odchylek středních hodnot přímo měřených veličin a odhad směrodatné odchylky nepřímo měřené veličiny. Pro výpočet chyby s danou hladinou spolehlivosti postupujeme stejně jako v případě přímo měřených veličin, počet stupňů volnosti nepřímo měřené veličiny je dán tzv. efektivním počtem stupňů volnosti  $n_{\text{eff}}$  (viz [8]):

$$n_{\text{eff}} = \hat{\delta}^4 \left[ \sum_{i=1}^n \frac{1}{n_i} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{\hat{\mu}_1, \dots, \hat{\mu}_n} \right)^4 \hat{\delta}_i^4 \right]^{-1}, \quad (1.58)$$

kde  $n_i$  jsou počty stupňů volnosti přímo měřených veličin a  $\hat{\delta}$  je dána vztahem (1.57). V případě veličiny, jejíž chyba je dána pouze chybou měřidla, budeme předpokládat, že  $n_i \rightarrow \infty$ .

Pokud však byly odhady směrodatných odchylek přímo měřených veličin zjištěny z dostatečně velkého počtu měření, kdy se Studentovy koeficienty pro danou hladinu spolehlivosti příliš neliší (do 10%) od hodnot pro nekonečný počet stupňů volnosti, lze většinou do zákona přenosu chyb dosazovat i chyby s danými hladinami spolehlivosti. Podmínkou však je, že všechny dosazované chyby musí mít hladinu spolehlivosti stejnou. Výsledná chyba má

pak hladinu spolehlivosti takovou, jakou mají chyby dosazované. Tento postup je aproximativní, většinou však poskytne stejnou chybu na dvě platná místa jako přesný výpočet.

Pro několik jednoduchých případů funkce  $f$  si odvodíme pravidla pro výpočet chyb:

- $y = ax_1 \pm bx_2$

Vypočteme nejprve parciální derivace

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = a \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = \pm b.$$

Dosazením do (1.57) dostaneme

$$\hat{\delta} = \sqrt{a^2 \hat{\delta}_1^2 + b^2 \hat{\delta}_2^2}.$$

Tento výsledek lze také napsat přímo z (1.26).

Pro efektivní počet stupňů volnosti platí podle (1.58)

$$n_{\text{eff}} = \hat{\delta}^4 \left[ \frac{(a \hat{\delta}_1)^4}{n_1} + \frac{(b \hat{\delta}_2)^4}{n_2} \right]^{-1}.$$

- $y = ax_1 x_2$

Parciální derivace

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = ax_2 \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = ax_1.$$

Dosazením dostaneme

$$\hat{\delta} = \sqrt{(a \hat{\mu}_2)^2 \hat{\delta}_1^2 + (a \hat{\mu}_1)^2 \hat{\delta}_2^2}.$$

Rovnici vydělíme střední hodnotou veličiny  $y$ , tj.  $\hat{\mu} = a \hat{\mu}_1 \hat{\mu}_2$

$$\frac{\hat{\delta}}{\hat{\mu}} = \sqrt{\left( \frac{a \hat{\mu}_2}{a \hat{\mu}_1 \hat{\mu}_2} \right)^2 \hat{\delta}_1^2 + \left( \frac{a \hat{\mu}_1}{a \hat{\mu}_1 \hat{\mu}_2} \right)^2 \hat{\delta}_2^2} = \sqrt{\left( \frac{\hat{\delta}_1}{\hat{\mu}_1} \right)^2 + \left( \frac{\hat{\delta}_2}{\hat{\mu}_2} \right)^2}.$$

Dochází tedy ke sčítání kvadrátů relativních chyb

$$\hat{r} = \sqrt{\hat{r}_1^2 + \hat{r}_2^2}.$$

Pro  $x_1 \rightarrow 0$  nebo  $x_2 \rightarrow 0$  zákon přenosu chyb nelze použít, protože se jedná o body s nulovými prvními derivacemi funkce  $f$ .

Efektivní počet stupňů volnosti:

$$n_{\text{eff}} = \hat{\delta}^4 \left[ \frac{(a \hat{\mu}_2 \hat{\delta}_1)^4}{n_1} + \frac{(b \hat{\mu}_1 \hat{\delta}_2)^4}{n_2} \right]^{-1},$$

vytknutím hodnoty  $\hat{\mu}^4$  ze závorky a úpravou dostaneme

$$n_{\text{eff}} = \hat{r}^4 \left[ \frac{\hat{r}_1^4}{n_1} + \frac{\hat{r}_2^4}{n_2} \right]^{-1}.$$

- $y = ax_1/x_2$

Parciální derivace podle jednotlivých veličin:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{a}{x_2} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = -\frac{ax_1}{x_2^2}$$

Dosazením do (1.57)

$$\hat{\delta} = \sqrt{\frac{a^2}{\hat{\mu}_2^2} \hat{\delta}_1^2 + a^2 \frac{\hat{\mu}_1^2}{\hat{\mu}_2^4} \hat{\delta}_2^2}$$

Vydělením rovnice střední hodnotou  $\hat{\mu} = a\hat{\mu}_1/\hat{\mu}_2$  dostaneme opět

$$\hat{r} = \sqrt{\hat{r}_1^2 + \hat{r}_2^2}$$

Zákon přenosu chyb nelze použít pro  $x_1 \rightarrow 0$ .

Efektivní počet stupňů volnosti:

$$n_{\text{eff}} = \hat{\delta}^4 \left[ \frac{1}{n_1} \left( \frac{a\hat{\delta}_1}{\hat{\mu}_2} \right)^4 + \frac{1}{n_2} \left( \frac{a\hat{\mu}_1\hat{\delta}_2}{\hat{\mu}_2^2} \right)^4 \right]^{-1}$$

vytknutím hodnoty  $\hat{\mu}^4$  ze závorky a úpravou dostaneme

$$n_{\text{eff}} = \hat{r}^4 \left[ \frac{\hat{r}_1^4}{n_1} + \frac{\hat{r}_2^4}{n_2} \right]^{-1}$$

- $y = ax_1^b$

V tomto případě máme jen jednu nezávislou proměnnou.

$$\frac{df}{dx_1} = abx_1^{b-1}$$

Směrodatná odchylka veličiny  $y$  pak bude

$$\hat{\delta} = |ab\hat{\mu}_1^{b-1}| \hat{\delta}_1$$

Vydělením střední hodnotou  $\hat{\mu}$  získáme opět vztah pro relativní chyby

$$\hat{r} = |b| \hat{r}_1$$

Pro  $x_1 \rightarrow 0$  při  $b \neq 1$  nelze zákon přenosu chyb použít.

Efektivní počet stupňů volnosti:

$$n_{\text{eff}} = \hat{\delta}^4 \left[ \frac{1}{n_1} (ab\hat{\mu}_1^{b-1}\hat{\delta}_1)^4 \right]^{-1}$$

úpravou dostaneme

$$n_{\text{eff}} = \hat{r}^4 \left[ \frac{(b\hat{r}_1)^4}{n_1} \right]^{-1}$$



Konkrétní příklady použití zákona přenosu chyb si probereme v následující kapitole, kde bude vysvětleno, jak správně zapisovat výsledky získané zpracováním měření. Pro objasnění použití výše odvozených pravidel je uveden jeden příklad.

**Příklad 1.10**

Nepřímo měřená veličina  $y$  závisí na přímo měřených veličinách  $x_1$ ,  $x_2$  a  $x_3$  takto:

$$y = \frac{x_1^2 x_2}{x_3^4}$$

Odvoďte vztah pro relativní chybu  $r$  veličiny  $y$  a její efektivní počet stupňů volnosti.

*Řešení:*

Všechny měřené veličiny jsou v součinu nebo podílu, proto je možné využít vztah pro součty kvadrátů relativních chyb. Vztah v zadání rozdělme nejprve na jednotlivé činitele. Relativní chyba výrazu  $x_1^2$  je  $2r_1$ , kde  $r_1$  je relativní chyba  $x_1$ . Podobně relativní chyba  $x_3^4$  je  $4r_3$ . Nyní můžeme sečíst kvadráty relativních chyb jednotlivých činitelů a dostaneme

$$r = \sqrt{4r_1^2 + r_2^2 + 16r_3^2}$$

Podobným postupem pomocí výše odvozených pravidel získáme efektivní počet stupňů volnosti

$$n_{\text{eff}} = r^4 \left[ \frac{16}{n_1} r_1^4 + \frac{1}{n_2} r_2^4 + \frac{256}{n_3} r_3^4 \right]^{-1}$$

## 1.5 Zápis výsledku měření a jeho chyby

Výsledek měření obsahuje informaci kvalitativní – jednotku, ke které se vztahuje informace kvantitativní, tj. číselná hodnota výsledku. Pravidla pro správný zápis jednotek již byla uvedena dříve. Pravidla pro správný zápis číselného údaje výsledku vycházejí z toho, že nemá smysl zapisovat střední hodnotu měřené veličiny s větší přesností, než je hodnota chyby. Zpřesňování zápisu nepřináší již žádnou informaci, protože při opakovaném měření bychom dostali jinou hodnotu. Snahou je zapisovat výsledek s takovou přesností, aby se při opakovaném měření měnily cifry zapsaného výsledku pouze na posledním nebo dvou posledních místech. Z toho vyplývají následující pravidla:

- Chybu střední hodnoty zaokrouhlujeme vždy na jedno nebo dvě platná místa. První platné místo daného čísla je jeho první nenulová číslice zleva.

- Střední hodnotu zaokrouhlujeme na stejný řád jako chybu.

- Výsledek zapíšeme ve tvaru:

(střední hodnota ± chyba střední hodnoty) jednotka

**Příklad 1.11**

1. Měřením hustoty byly získány tyto výsledky:

Střední hodnota:  $\hat{\rho} = 0,7068493 \text{ g cm}^{-3}$

Chyba:  $\delta = 0,0436818 \text{ g cm}^{-3}$

První platné místo chyby je číslice 4 a druhé platné místo je číslice 3. Při zápisu chyby na jedno platné místo dostaneme zaokrouhlením hodnotu 0,04, střední hodnotu pak zaokrouhlíme na stejný řád, tedy na dvě desetinná místa, a dostaneme 0,71. Výsledek zapíšeme ve tvaru:

$$\rho = (0,71 \pm 0,04) \text{ g cm}^{-3}$$

Pokud chceme zapsat výsledek na dvě platná místa, zaokrouhlíme chyby dostaneme číslo 0,044 a střední hodnotu zaokrouhlíme na tři desetinná místa:

$$\rho = (0,707 \pm 0,044) \text{ g cm}^{-3}$$

2. Měřením tlaku byly získány tyto výsledky:

Střední hodnota:  $\hat{p} = 1\,738\,256 \text{ Pa}$

Chyba:  $\delta = 1\,325 \text{ Pa}$

První platné místo chyby je číslice 1 a druhé je 3. Zápis výsledku na jedno platné místo bude:

$$p = (1\,738\,000 \pm 1\,000) \text{ Pa}$$

nebo

$$p = (1\,738 \pm 1) \cdot 10^3 \text{ Pa}$$

U takto předloženého výsledku čtenář nepozná, zda je zapsán na jedno nebo dvě platná místa. Proto se někdy nulové číslice, které nejsou platnými místy, zapisují menším písmem:

$$p = (1\,738\,000 \pm 1\,000) \text{ Pa}$$

Zápis výsledku na dvě platná místa:

$$p = (1\,738\,300 \pm 1\,300) \text{ Pa}$$

3. Měřením momentu setrvačnosti byly získány tyto výsledky:

Střední hodnota:  $\hat{J} = 189\,304 \text{ kg m}^2$

Chyba:  $\delta = 402 \text{ kg m}^2$

Zápis výsledku na jedno platné místo:

$$J = (189\,300 \pm 400) \text{ kg m}^2$$

Zápis výsledku na dvě platná místa:

$$J = (189\,300 \pm 400) \text{ kg m}^2$$

4. Měřením napětí byly získány tyto hodnoty:

Střední hodnota:  $\hat{U} = 0,003268 \text{ V}$

Chyba:  $\delta = 0,02543 \text{ V}$

Zápis výsledku na jedno platné místo:

$$U = (0,00 \pm 0,03) \text{ V}$$

Zápis výsledku na dvě platná místa:

$$U = (0,003 \pm 0,025) \text{ V}$$

nebo

$$U = (3 \pm 25) \text{ mV}$$

**Příklad 1.12**

Měřením průměru koule  $d$  byly zjištěny tyto hodnoty (v cm):

4,32 4,36 4,28 4,41 4,40 4,31  
4,35 4,38 4,36 4,32 4,33 4,32

Určete objem koule.

*Řešení:*

Stanovíme střední hodnotu a směrodatnou odchylku jednoho měření:

$$\bar{d} = 4,3450 \text{ cm} ,$$

$$\hat{\sigma}_d = 0,039 \text{ cm} .$$

V intervalu mezní chyby (4,195; 4,495) leží všechny naměřené hodnoty, proto není žádné měření zatřžžené hrubou chybou. Směrodatná odchylka aritmetického průměru

$$\hat{\delta}_d = 0,0011 \text{ cm} .$$

Pro objem koule  $V$  platí

$$V = \frac{1}{6} \pi d^3 .$$

Dosažením střední hodnoty  $\bar{d}$  dostaneme střední hodnotu  $\hat{V}$ :

$$\hat{V} = 42,950466 \dots \text{ cm}^3 .$$

Pro směrodatnou odchylku objemu  $\hat{\delta}$  pak platí

$$\hat{\delta} = \frac{1}{2} \pi d^2 \hat{\delta}_d .$$

Dosažením dostaneme

$$\hat{\delta} = 0,03418 \dots \text{ cm}^3 .$$

Efektivní počet stupňů volnosti je

$$n_{\text{eff}} = \hat{\delta}^4 \left[ \frac{1}{n_d} \left( \frac{1}{2} \pi \bar{d}^2 \right)^4 \hat{\delta}_d^4 \right]^{-1} = n_d .$$

Směrodatnou odchylku vynásobíme odpovídajícím Studentovým koeficientem pro 11 stupňů volnosti. Výsledek se spolehlivostí 68,3% je

$$V = (42,95 \pm 0,03) \text{ cm}^3 .$$

**Příklad 1.13**

Sklonným tribometrem byl měřen kinetický součinitel smykového tření  $f$ . Pro výpočet hodnoty  $f$  platí

$$f = \operatorname{tg} \alpha,$$

kde  $\alpha$  je úhel nakloněné roviny, po které měřené těleso klouzalo rovnoměrným pohybem. Naměřené hodnoty úhlu  $\alpha$  jsou:

33,5° 34,5° 34,0° 33,5° 33,0° 33,5°

Stupnice tribometru je dělena po 1°. Určete hodnotu kinetického součinitele smykového tření.

*Řešení:*

Odhad střední hodnoty  $\alpha$  je

$$\bar{\alpha} = 33,666 \dots^\circ$$

Směrodatná odchylka jednoho měření

$$\hat{\sigma} = 0,52^\circ$$

Všechny hodnoty leží v intervalu mezní chyby, proto žádnou hodnotu nemusíme pro další výpočty vylučovat. Směrodatná odchylka střední hodnoty je podle Besselova vztahu

$$\hat{\delta}_\alpha = 0,21^\circ$$

Tato hodnota je srovnatelná s chybou přístroje, která činí asi polovinu dílku stupnice, tj.  $\Delta = 0,5^\circ$ . Celková směrodatná odchylka měření  $\delta_c$  podle (1.51) je

$$\delta_c = \sqrt{\hat{\delta}_\alpha^2 + \frac{\Delta^2}{9}} \doteq 0,268^\circ$$

Odhad střední hodnoty  $f$  získáme dosazením střední hodnoty  $\bar{\alpha}$  do vztahu pro výpočet  $f$

$$\hat{f} = 0,58435 \dots$$

Směrodatnou odchylku  $f$  vypočítáme podle zákona přenosu chyb

$$\hat{\delta} = \sqrt{\left(\frac{df}{d\alpha}\right)^2 \hat{\delta}_\alpha^2} = (\operatorname{tg}^2 \alpha + 1) \hat{\delta}_\alpha$$

Při dosazování do tohoto vztahu musíme pamatovat na to, že standardní způsob vyjadřování úhlů je v radiánech

$$\hat{\delta}_c = 0,268^\circ = 0,00468$$

$$\hat{\delta} = 0,00675$$

Při výpočtu efektivního počtu stupňů volnosti budeme do vztahu (1.58) dosazovat pouze odchylku  $\hat{\delta}_\alpha$ , protože chyba měření  $\Delta$  má nekonečný počet stupňů volnosti, a proto do výsledku nepřispívá

$$n_{\text{eff}} = \hat{\delta}^4 \left[ \frac{1}{n_\alpha} (\operatorname{tg}^2 \alpha + 1)^4 \hat{\delta}_\alpha^4 \right]^{-1}$$

dosazením dostaneme  $n_{\text{eff}} = 13,3$ . Odpovídající Studentův koeficient získaný interpolací v tabulce v dodatku C je  $k = 1.039$ . Výsledek se spolehlivostí 68,3% je

$$f = 0,584 \pm 0,007.$$

### Příklad 1.14

Máme změřit hustotu měděného válce přímou metodou, to znamená vážením a měřením rozměrů.

Při přípravě pokusu nejprve vyjdeme z teorie. V našem případě jde o definici hustoty

$$\rho = \frac{m}{V}.$$

Teorii využijeme pro náš konkrétní případ a vytvoříme tzv. hypotézu. Budeme předpokládat, že těleso je homogenní s hmotností  $m$  a má válcový tvar průměru  $d$  a výšky  $h$ . Pro hustotu pak dostaneme

$$\rho = \frac{4m}{\pi d^2 h}.$$

Před měřením uděláme i rozbor chyb, tj. podle zákona přenosu chyb vyjádříme, jak se jednotlivé veličiny podlejí na směrodatné odchylce hustoty

$$\hat{\delta} = \sqrt{\left(\frac{\partial \rho}{\partial m}\right)^2 \hat{\delta}_m^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial d}\right)^2 \hat{\delta}_d^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial h}\right)^2 \hat{\delta}_h^2}.$$

Provedením derivací dostaneme

$$\hat{\delta} = \sqrt{\left(\frac{4}{\pi d^2 h}\right)^2 \hat{\delta}_m^2 + \left(-\frac{8m}{\pi d^3 h}\right)^2 \hat{\delta}_d^2 + \left(-\frac{4m}{\pi d^2 h^2}\right)^2 \hat{\delta}_h^2}.$$

Názornější je výraz pro relativní chybu, který získáme vydělením předchozí rovnice  $\rho$ , nebo můžeme napsat přímo podle dříve odvozených pravidel pro relativní chybu součinu a podílu

$$\hat{r} = \sqrt{\hat{r}_m^2 + 4\hat{r}_d^2 + \hat{r}_h^2}.$$

Vidíme, že člen s relativní chybou průměru válce  $d$  je násoben faktorem 4. Optimální stav je takový, kdy každý ze sčítanců přispívá přibližně stejnou hodnotou do celkového součtu. Pak lze říci, že přesnosti měření jsou vyvážené. Proto musíme průměr  $d$  v našem případě změřit s přibližně poloviční relativní chybou než ostatní veličiny. Pro měření průměru použijeme přesnější měřidlo nebo provedeme větší počet měření.

Výsledky měření jsou:

$$\begin{array}{lll} \hat{d}=2,82 \text{ cm} & \hat{\delta}_d=0,01 & \text{z 60 měření} \\ \hat{h}=8,35 \text{ cm} & \hat{\delta}_h=0,06 & \text{z 30 měření} \end{array}$$

$$\bar{m} = 466,165 \text{ g} \quad \Delta_m = 0,001 \text{ g} \quad \text{z 1 měření}$$

Chyba posledního měření je uvedena jako mezní chyba, protože byla stanovena z přesnosti čtení na stupnici vah. Dosazením středních hodnot do vztahu pro hustotu dostaneme

$$\hat{\rho} = 8,93850 \dots \text{ g cm}^{-3}.$$

Tabulková hodnota hustoty mědi je  $\rho = 8,960 \text{ g cm}^{-3}$ . Tuto hodnotu budeme pro naše účely považovat za skutečnou hodnotu hustoty. Shoduje se náš výsledek s tabulkovou hodnotou? Pouhým srovnáním těchto hodnot bychom mohli dojít k závěru, že ke shodě nedošlo. Do vyhodnocení však musíme zahrnout i chybu měření. Chybu vypočítáme pomocí zákona přenosu chyb. Pro vážení byla stanovena mezní chyba, a proto do vztahu (1.57) budeme dosazovat směrodatnou odchylku hmotnosti vypočítanou podle (1.25) tj.

$$\hat{\delta}_m = \frac{\Delta_m}{3}.$$

Výpočtem např. pomocí relativních chyb dostaneme odhad směrodatné odchylky hustoty

$$\hat{\delta} = 0.089 \text{ g cm}^{-3}.$$

Efektivní počet stupňů volnosti je

$$n_{\text{eff}} = \hat{r}^4 \left[ \frac{1}{n_m} \hat{r}_m^4 + \frac{1}{n_d} (2\hat{r}_d)^4 + \frac{1}{n_h} \hat{r}_h^4 \right]^{-1},$$

dosazením dostaneme  $n_{\text{eff}} = 74,2$ . Odpovídající hodnota Studentova koeficientu je  $k = 1,007$ . Výsledek s hladinou spolehlivosti 68.3% je

$$\rho = (8,94 \pm 0,09) \text{ g cm}^{-3}.$$

Tabulková hodnota leží v tomto intervalu, proto lze konstatovat, že výsledek měření se shoduje s tabulkovou hodnotou. Pokud by tomu tak nebylo, museli bychom prověřit nejprve správnost výpočtů, provedení experimentu, prověřit kalibraci měřidel, pokus zopakovat, ověřit správnost předpokladů použitých při tvorbě hypotézy, zpřesnit hypotézu (např. započítat vliv teploty), ověřit vhodnost použité teorie a až na závěr zkoumat platnost teorie.

### **Příklad 1.15**

Pomocí osciloskopu byl změřen fázový posun  $\varphi$  mezi proudem a napětím na jistém prvku v obvodu střídavého proudu. Výsledek měření byl

$$\varphi = 6^\circ \pm 10^\circ.$$

Určete hodnotu účinníku  $\eta$

$$\eta = \cos \varphi.$$

**Řešení:** Střední hodnotu účinku spočítáme ze střední hodnoty fázového posunu:

$$\bar{\eta} = 0,99452 \dots$$

Zkusme vypočítat chybu podle zákona přenosu chyb (1.57)

$$\delta_{\eta} = \delta_{\varphi} \sin \varphi.$$

Dostaneme chybu (musíme dosazovat v radiánech)

$$\delta_{\eta} = 0,01824 \dots$$

Odtud bychom dostali interval chyby  $(0,81; 1,17)$ . Tento výsledek musí být chybný, protože účinek nemůže být podle definice větší než 1. Podmínky, za kterých byl odvozen zákon přenosu chyb, zde nejsou zřejmě splněny, neboť v rámci intervalu směrodatné odchylky leží nulová hodnota derivace zkoumané funkce. Obecné řešení takové situace je značně komplikované, protože hodnoty nepřímo měřené veličiny pak nemají normální rozdělení. Tento jednoduchý případ lze řešit úvahou. Představme si, že hodnotu  $\varphi$  měníme postupně v intervalu chyby, tj. od  $-4^{\circ}$  do  $16^{\circ}$ . Budeme sledovat, jak se mění hodnota  $\eta$ . Pro hodnotu  $\varphi = -4^{\circ}$  je  $\eta = 0,9976 \dots$ , při zvětšování  $\varphi$  nabývá  $\eta$  maxima pro  $\varphi = 0^{\circ}$  ( $\eta = 1$ ) a pak klesá až k hodnotě  $\eta = 0,96126 \dots$  pro  $\varphi = 16^{\circ}$ . Interval hodnot  $\eta$ , jestliže se  $\varphi$  mění v intervalu  $(-4^{\circ}; 16^{\circ})$ , je

$$\eta = (0,96; 1,00).$$

Všimněme si, že střední hodnota  $\eta$  neleží uprostřed intervalu. Je to způsobeno nesymetrií rozdělení, které popisuje chování veličiny  $\eta$ .

### **Příklad 1.16**

Na pracoviště broušení jsou dodávány destičky s tloušťkou  $d_1 = (430 \pm 10) \mu\text{m}$ . Podle předpisu mají mít destičky po broušení tloušťku  $d_2 = (350 \pm 20) \mu\text{m}$ . Jaká musí být tloušťka odbrušované vrstvy  $t$  a její tolerance, aby byl dodržen výrobní předpis? Předepsané tolerance lze považovat za mezní chyby střední hodnoty tloušťky výrobků.

*Špatné řešení:*

Tloušťku  $t$  vyjádříme jako rozdíl

$$t = d_1 - d_2.$$

Odtud získáme střední hodnotu  $t$

$$t = 80 \mu\text{m}.$$

Mezní chybu  $\hat{\kappa}_t$  vyjádříme podle zákona přenosu chyb

$$\hat{\kappa}_t = \sqrt{\hat{\kappa}_1^2 + \hat{\kappa}_2^2},$$

kde  $\hat{\kappa}_1$  a  $\hat{\kappa}_2$  jsou tolerance tlouštěk  $d_1$  a  $d_2$ .

$$\kappa_t = 22 \mu\text{m}$$

Výsledek je tedy

$$t = (80 \pm 22) \mu\text{m} .$$

Tolerance odbrušované vrstvy nám paradoxně vyšla větší, než je tolerance výsledné tloušťky. Tento výsledek je *špatný*, protože jsme při formulaci problému přehlédli příčinné souvislosti mezi veličinami. Velikost odbrušované tloušťky není totiž důsledkem změny tloušťky, ale naopak výsledná tloušťka  $d_2$  je dána rozdílem počáteční tloušťky a velikosti odbrušované vrstvy. Jinak řečeno  $d_1$  a  $d_2$  nejsou navzájem nezávislé, jak je předpokládáno v odvození zákona přenosu chyb.

*Správné řešení:*

Výsledná tloušťka je dána vztahem

$$d_2 = d_1 - t .$$

Veličiny  $d_1$  a  $t$  jsou navzájem nezávislé a podle zákona přenosu chyb

$$\kappa_2^2 = \kappa_1^2 + \kappa_t^2 .$$

Vyjádříme toleranci tloušťky  $t$

$$\kappa_t = \sqrt{\kappa_2^2 - \kappa_1^2} .$$

Dosažením dostaneme

$$\kappa_t = 17 \mu\text{m} .$$

Výsledek

$$t = (80 \pm 17) \mu\text{m} .$$

### **Příklad 1.17**

Máme stanovit měřením odporu  $R$  elektrický měrný odpor  $\rho$  materiálu, z něhož je zhotoven drát konstantního kruhového průřezu o průměru  $d$  a délky  $l$ . Určete, s jakou relativní chybou musíme změřit tyto veličiny, abychom získali  $\rho$  s relativní chybou menší než 2%.

*Řešení:*

Elektrický měrný odpor je v tomto případě

$$\rho = \frac{\pi R d^2}{4l} .$$

Pro relativní chybu  $\rho$  podle (1.57) platí

$$r_\rho = \sqrt{r_R^2 + 4r_d^2 + r_l^2} .$$

Přesnosti měření budou nejlépe vzájemně vyvážené, když každý ze sčítanců bude přispívat do celkového součtu stejnou hodnotou. Jelikož má být  $r_\rho = 0,02$  a menší, dostáváme pro maximální přípustné hodnoty relativních chyb

$$r_R^2 = 0,02^2/3 = 0,00013 ,$$



$$r_R = 0,012 ,$$

$$4r_d^2 = 0,02^2/3 = 0,00013 ,$$

$$r_d^2 = 0,000033 ,$$

$$r_d = 0,0058 ,$$

$$r_l^2 = 0,02^2/3 = 0,00013 ,$$

$$r_l = 0,012 .$$

Měření musíme volbou měřicích zařízení a počtem měření organizovat tak, abychom dosáhli u měření odporu a délky relativní chyby maximálně 1,2%, u průměru drátu maximálně 0,58%. Téže relativní chyby,  $r_\rho$  bychom mohli dosáhnout i jinými relativními chybami měření při splnění výše uvedeného vztahu, podmínky kladené na měření by však nebyly rovnocenné pro všechny měřené veličiny. Na přesnost měření některých veličin bychom měli příliš přísné požadavky, na některé naopak příliš malé.

Volbu vhodných měřicích přístrojů můžeme provést až v konkrétním případě podle očekávaných parametrů drátu. Například pro měření průměru drátu, který očekáváme asi 0,5 mm, musíme použít mikrometr, neboť musíme měřit s přesností do 3  $\mu\text{m}$ . V případě délky drátu asi 10 cm můžeme použít pásové měřítko, neboť požadovaná přesnost je 1 mm. Pro měření odporu musíme vybrat přístroj s třídou 1 nebo lepší (viz kapitola o měřicích přístrojích).

---

## Stručný přehled postupu zpracování měření

- Z naměřených hodnot vypočítáme odhad střední hodnoty  $\hat{\mu}$  (aritmetický průměr) podle vztahu (1.43) a vypočítáme odhad směrodatné odchylky jednoho měření  $\hat{\sigma}$  dle vztahu (1.47).
- Ze souboru naměřených hodnot vyloučíme naměřené hodnoty ležící mimo interval mezní chyby  $(\hat{\mu} - 3\hat{\sigma}; \hat{\mu} + 3\hat{\sigma})$ , které budeme považovat za zatížené hrubou chybou.
- Předchozí dva kroky opakujeme tak dlouho, až v souboru měření nejsou hodnoty ležící mimo interval mezní chyby.
- Vypočítáme směrodatnou odchylku aritmetického průměru  $\hat{\delta}$  pomocí vztahu (1.49) resp. (1.48).
- Porovnáme hodnotu chyby měřidla  $\Delta$  s hodnotou  $\hat{\delta}$ . Pokud neplatí  $\Delta \ll \hat{\delta}$ , chybu měřidla nelze zanedbat a musíme určit celkovou směrodatnou odchylku měření podle vztahu (1.51).
- Podle počtu naměřených hodnot  $N$ , které zůstaly, určíme počet stupňů volnosti  $n = N - 1$  a v tabulce v dodatku C určíme hodnotu Studentova koeficientu  $k$  pro požadovanou hladinu spolehlivosti. Koeficientem vynásobíme  $\hat{\delta}$  a tím získáme chybu měření na dané hladině spolehlivosti. Standardně se výsledky měření uvádějí s hladinou spolehlivosti 0,6827.
- Chybu měření zapíšeme na jedno nebo dvě platná místa a střední hodnotu na stejný počet desetinných míst jako chybu. U výsledku uvedeme odpovídající jednotku.
- V případě nepřímých měření vypočítáme střední hodnotu nepřímo měřené veličiny dle vztahu (1.53) a její směrodatnou odchylku dosazením do vztahu (1.57).
- Ověříme, zda se v rámci chyb jednotlivých veličin nenachází nulová hodnota derivace funkce popisující vztah mezi nepřímo měřenou veličinou a přímo měřenými veličinami.
- Vypočítáme efektivní počet stupňů volnosti podle vztahu (1.58) a určíme odpovídající Studentův koeficient, kterým násobíme směrodatnou odchylku nepřímo měřené veličiny. Pokud je počet měření pro všechny veličiny dostatečně velký tak, že hodnota Studentova koeficientu pro požadovanou hladinu spolehlivosti se neliší více než o 10% od hodnoty pro  $n \rightarrow \infty$ , můžeme do vztahu (1.57) dosazovat přímo chyby s danou hladinou spolehlivosti. Získaná chyba má stejnou hladinu spolehlivosti. Minimální počet stupňů volnosti pro splnění uvedeného předpokladu je uveden v tabulce v dodatku C.
- Výsledek zapíšeme dle stejných pravidel jako výsledky přímých měření (viz výše).

## 2 Početní metody zpracování měření fyzikálních závislostí

V předchozí kapitole jsme se zabývali případy, kdy měřené veličině, ať už přímo nebo nepřímo měřené, přísluší jedna stálá skutečná hodnota. Výsledkem měření pak byly náhodně proměnné hodnoty, z nichž jsme vyhodnocením získali jedinou hodnotu odhadu skutečné velikosti měřené veličiny.

Výše uvedený postup nebývá v praxi příliš častý, protože hodnotu studované veličiny zjišťujeme zpravidla nepřímo ze vzájemné závislosti některých přímo měřitelných veličin, které se mění dle cíleně upravovaných podmínek experimentu. Například koeficient teplotní délkové roztažnosti daného materiálu určujeme ze závislosti délky tyče na teplotě. Závislostí relativní délkové změny na teplotě je přímka, jejíž směrnice udává hodnotu hledaného koeficientu.

Výsledkem měření závislosti veličiny  $y$  na veličině  $x$  je tedy soubor dvojic  $(x_i, y_i)$ . Ve složitějších případech může jít o  $n$ -tice, když studujeme závislost na více veličinách současně. Podle cíle našeho měření mohou nastat tyto případy:

- Potřebujeme získat hodnotu  $y$  pro dané  $x$ . Pokud ji nemůžeme získat experimentálně, musíme ji odhadnout z již naměřených hodnot  $(x_i, y_i)$ . Leží-li  $x$  mezi některými změřenými hodnotami, provedeme tzv. interpolaci, leží-li mimo ně, provedeme extrapolaci.
- Neznáme teoretickou předpověď závislosti  $y$  na  $x$ , ale chceme změřenou závislost popsat některou zvolenou funkcí. V takovém případě provádíme aproximaci změřené závislosti zvolenou funkcí. Aproximační funkce nemusí na rozdíl od interpolačních metod nutně procházet body  $(x_i, y_i)$ .
- Známe typ funkce  $y = f(x)$ , která popisuje měřenou závislost. Naším cílem je určit z naměřených dat parametry funkce  $f(x)$  tak, aby funkce co nejlépe vystihla naměřenou závislost. Provádíme tzv. regresi. Regrese se liší od aproximace tím, že modelovou funkci máme danu např. teoretickým vztahem a zjištěným parametrům dáváme jejich fyzikální význam (např. koeficient teplotní délkové roztažnosti). Aproximace bývají založené na regresních metodách, ale funkce je volena bez hlubšího fyzikálního významu. Nejčastěji využívanou regresní metodou je metoda nejmenších čtverců, kterou se budeme dále zabývat. V literatuře najdeme i další metody jako skupinovou nebo postupnou [6]. Tyto metody poskytují vychýlené odhady hledaných parametrů a nebudeme se jimi podrobně zabývat. Mají význam spíše historický. Byly používány především díky jednoduchosti výpočtů na kterých jsou založeny. Takové zjednodušení již nemá v současné době opodstatnění. Na konci kapitoly se budeme krátce zabývat postupnou metodou.

## 2.1 Interpolace, extrapolace a aproximace

Jsou případy, kdy pro určitou funkci známe jen některé její funkční hodnoty, ale neznáme její analytické vyjádření, které by nám umožnilo funkční hodnoty vypočítat v libovolném bodě. Mohou to být například výsledky fyzikálních měření nebo výsledky složitého výpočtu, který není možné často opakovat.

Při interpolačním výpočtu neznámé funkční hodnoty pro zvolené  $x$  vytváříme funkci  $g(x)$ , která v uzlových bodech  $x_i$  nabývá zadaných hodnot  $y_i = g(x_i)$ . Interpolační metody se liší typem funkce  $g(x)$ , kterou využívají. Nejjednodušší metodou je lineární interpolace, kde funkce  $g(x)$  je po částech lineární funkce tvořící spojnici bodů  $(x_i, y_i)$ . Interpolace se může také zakládat na polynomických funkcích, trigonometrických funkcích, racionálních lomených funkcích atd. Interpolační metodu volíme podle:

- počtu zadaných bodů interpolované závislosti (malý počet bodů zne-  
možňuje využívat složitějších interpolačních metod)
- očekávaného charakteru závislosti
- rozložení zadaných bodů (některé metody předpokládají ekvidistantní  
rozložení bodů)
- požadavků na chování interpolační funkce (např. spojitost derivací,  
periodičnost atd.)

Extrapolace je založena na interpolačních metodách, výpočet ale provádíme mimo rozsah uzlových bodů  $x_i$ . Při extrapolaci je nutno zvláštní opatrnosti, neboť z chování interpolační funkce se snažíme učinit závěry pro oblast hodnot, kde již nemáme žádné informace. Extrapolace může vést k chybným závěrům, proto je nutné výsledky kriticky posoudit s ohledem na naše očekávání a jejich fyzikální význam (extrapolací můžeme například získat hodnoty, které nejsou fyzikálně přípustné).

### 2.1.1 Lineární interpolace

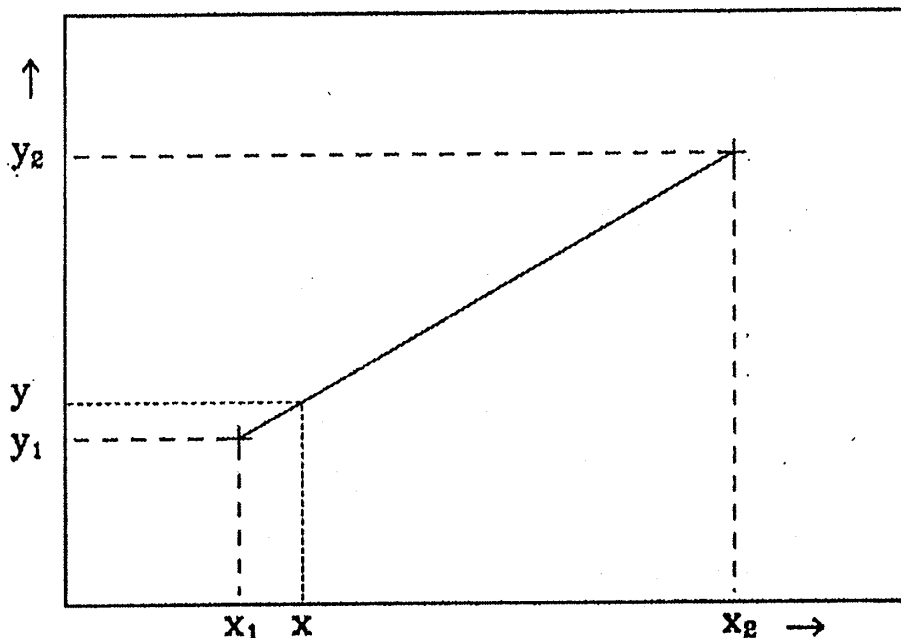
Lineární interpolace je nejjednodušší interpolační metodou. Interpolační funkce se skládá z úseček, které spojují sousední uzlové body  $(x_i, y_i)$ . Pro výpočet interpolované hodnoty pro hodnotu nezávisle proměnné  $x$  využíváme pouze dva sousední uzlové body  $x_i < x < x_{i+1}$  (viz obr. 20). Interpolovanou hodnotu  $y$  vypočítáme podle vztahu

$$y = y_1 + (y_2 - y_1) \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad (2.59)$$

Tento způsob interpolace se využívá nejčastěji při interpolaci v tabulkách.

#### **Příklad 2.1**

Rychlost zvuku ve vzduchu je závislá na teplotě. Hodnoty rychlosti při tlaku 101325 Pa jsou pro některé teploty uvedeny v tabulce:



Obr. 20: Lineární interpolace *um přímkou*

Teplota (°C)	0,0	5,0	10,0	15,0
Rychlost (m s <sup>-1</sup> )	331,5	334,5	337,5	340,6

Vypočítejte rychlost zvuku  $c$  při teplotě 7°C lineární interpolací.

*Řešení:*

Pro interpolaci využijeme hodnoty rychlosti zvuku při 5°C a 10°C. Podle vztahu (2.59)

$$c = 334,5 + (337,5 - 334,5) \cdot \frac{7 - 5}{10 - 5} = 335,7 \text{ m s}^{-1}.$$

### Příklad 2.2

Hustota vzduchu závisí na jeho teplotě a tlaku. Dále je uveden výřez z tabulky hustot suchého vzduchu v kg m<sup>-3</sup> pro vybrané teploty a tlaky:

	Tlak (kPa)		
	98,0	99,0	
Teplota (°C)	20,0	1,165	1,177
	21,0	1,161	1,173

Určete hustotu vzduchu  $\rho$  pro teplotu 20,8 °C a tlak 98 340 Pa lineární interpolací tabulkových hodnot.

*Řešení:*

Lineární interpolaci lze použít i v případě funkce dvou proměnných

(zde tlak a teplota). Nejprve provedeme interpolaci hustot pro teplotu 20,8 °C a tlaky 98 kPa a 99 kPa. Takto získané hodnoty budeme interpolovat pro tlak 98 340 Pa

$$\rho = 1,165 + (1,161 - 1,165) \cdot \frac{20,8 - 20}{21 - 20} = 1,1618 \text{ kg m}^{-3}.$$

To je hustota vzduchu při tlaku 98 kPa a teplotě 20,8 °C

$$\rho = 1,177 + (1,173 - 1,177) \cdot \frac{20,8 - 20}{21 - 20} = 1,1738 \text{ kg m}^{-3}.$$

To je hustota vzduchu při tlaku 99 kPa a teplotě 20,8 °C. Dále provedeme interpolaci pro tlak 98,34 kPa

$$\rho = 1,1618 + (1,1738 - 1,1618) \cdot \frac{98,34 - 98}{99 - 98} = 1,166 \text{ kg m}^{-3}.$$

To je hustota vzduchu při tlaku 98,34 kPa a teplotě 20,8 °C.

Interpolace lze provádět i v opačném pořadí, tj. nejprve pro tlak a pak pro teplotu.

$$\rho = 1,165 + (1,177 - 1,165) \cdot \frac{98,34 - 98}{99 - 98} = 1,1691 \text{ kg m}^{-3}.$$

To je hustota vzduchu při tlaku 98,34 kPa a teplotě 20 °C.

$$\rho = 1,161 + (1,173 - 1,161) \cdot \frac{98,34 - 98}{99 - 98} = 1,1651 \text{ kg m}^{-3}.$$

To je hustota vzduchu při tlaku 98,34 kPa a teplotě 21 °C.

$$\rho = 1,1691 + (1,1651 - 1,1691) \cdot \frac{20,8 - 20}{21 - 20} = 1,166 \text{ kg m}^{-3}.$$

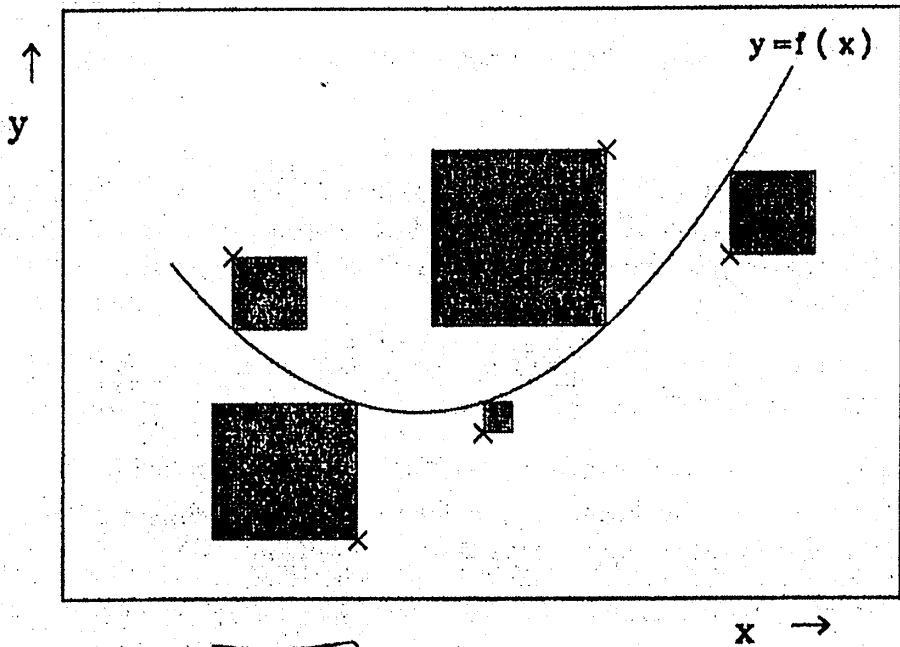
To je hustota vzduchu při tlaku 98,34 kPa a teplotě 20,8 °C.

## 2.2 Metoda nejmenších čtverců

Metoda nejmenších čtverců je nejběžnější regresní metodou. Využíváme ji v případech, kdy chceme, aby průběh daného typu funkce se co nejvíce přimykala zadaným bodům  $(x_i, y_i)$ ,  $(i = 1, \dots, N)$ . Hledáme tedy vhodné parametry jisté funkce. Pro matematické řešení tohoto problému musíme najít měřítko, kterým budeme určovat, do jaké míry se průběh funkce  $y = f(x)$  přimyká k zadaným bodům. Intuitivně lze najít řadu různých měřítek, lze ukázat [5], že k nalezení nejvěrohodnějšího hledaného průběhu funkce  $f(x)$  vede měřítko

$$S = \sum_{i=1}^N (f(x_i) - y_i)^2. \quad (2.60)$$

Měřítkem  $S$  je součet kvadrátů rozdílů zadaných a funkčních hodnot (odchylek), který chceme vhodnými parametry funkce  $f(x)$  minimalizovat. Graficky si to můžeme představit jako součet ploch čtverců v obrázku 21. Odtud pochází i název této metody.



Obr. 21: Metoda nejmenších čtverců

Parametry funkce  $f(x)$  si označme jako  $a, b, c, \dots$ . Velikost součtu čtverců odchylek  $S$  je funkcí těchto parametrů

$$S = S(a, b, c, \dots) \quad (2.61)$$

Hledáme minimum této funkce, tj. musí platit:

$$\left( \frac{\partial S}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial c} = 0, \dots \right) \quad (2.62)$$

Je zřejmé, že suma čtverců odchylek nemá maximum (vždy existuje taková volba parametrů, která dá větší hodnotu  $S$ ), proto hodnoty parametrů s nulovou derivací označují polohu minima. Minimální hodnota  $S_0$  je tzv. zbytková (reziduální) suma čtverců odchylek. Další postup řešení soustavy (2.62) závisí na typu funkce  $f(x)$ , proto si pro ukázkou vyřešíme dva jednoduché případy. V následujícím textu jsou meze sčítání od  $i = 1$  do  $i = N$ , kde  $N$  je počet bodů daných tabulkou.

•  $y = ax$

Vztah (2.60) pro sumu čtverců odchylek má tvar

$$S = \sum (ax_i - y_i)^2.$$

Derivací získáme

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 2 \sum (ax_i - y_i)x_i.$$

Pro minimum platí

$$\sum (\hat{a}x_i^2 - x_i y_i) = 0,$$

$$\hat{a} \sum x_i^2 = \sum x_i y_i .$$

Nejvěrohodnějším odhadem parametru  $a$  je

$$\hat{a} = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} . \quad (2.63)$$

Odhad parametru  $\hat{a}$  je vypočten z hodnot náhodné proměnné, a proto je zatížen chybou. Tuto chybu zjistíme ze zbytkové sumy  $S_0$ . Postup výpočtu odhadu chyby lze nalézt např. v [3], zde se omezíme pouze na výsledky výpočtu.

$$S_0 = \sum (\hat{a} x_i - y_i)^2 , \quad s = \sqrt{\frac{S_0}{N-1}} , \quad s_a = \frac{s}{\sqrt{\sum x_i^2}}$$

$$a = \hat{a} \pm s_a k ,$$

kde  $k$  je Studentův koeficient pro danou hladinu spolehlivosti  $P$  a počet stupňů volnosti (v tomto případě je to  $N - 1$ ).

- $y = ax + b$

$$S = \sum (ax_i + b - y_i)^2$$

V tomto případě hledáme dva parametry  $a$  a  $b$

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 2 \sum (ax_i + b - y_i) x_i ,$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 2 \sum (ax_i + b - y_i) .$$

Pro hledané minimum dostáváme soustavu rovnic

$$\sum (\hat{a} x_i^2 + \hat{b} x_i - x_i y_i) = 0 ,$$

$$\sum (\hat{a} x_i + \hat{b} - y_i) = 0 .$$

Úpravou

$$\hat{a} \sum x_i^2 + \hat{b} \sum x_i = \sum x_i y_i ,$$

$$\hat{a} \sum x_i + \hat{b} N = \sum y_i .$$

Řešením této soustavy získáme

$$\hat{a} = \frac{N \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} , \quad (2.64)$$

$$\hat{b} = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} . \quad (2.65)$$

Pro odhad chyby platí

$$S_0 = \sum (\hat{a} x_i + \hat{b} - y_i)^2 ,$$

$$s = \sqrt{\frac{S_0}{N-2}} , \quad s_a = s \sqrt{\frac{N}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}} , \quad s_b = s \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}}$$

$$a = \hat{a} \pm s_a k , \quad b = \hat{b} \pm s_b k .$$

Počet stupňů volnosti je  $N - 2$ .



### 2.2.1 Rozsah platnosti metody nejmenších čtverců

Metoda nejmenších čtverců předpokládá následující vlastnosti měřených veličin:

- Veličiny  $y$  a  $x$  jsou nenáhodné, tj. existuje mezi nimi příčinná souvislost.
- K určení hledaných parametrů funkce  $f$  musíme provést minimálně tolik měření při různě nastavených hodnotách  $x$ , kolik je hledaných parametrů.
- Veličina  $y$  je náhodná a veličina  $x$  je nenáhodná a libovolně nastavitelná. Předpokládá se tedy, že hodnoty  $x_i$  nejsou zatíženy chybou.
- Měřené hodnoty  $y_i$  nejsou zatíženy hrubými nebo systematickými chybami.

Tuto metodu lze rozšířit na funkce více proměnných zcela analogickým způsobem. Zadané hodnoty jsou tedy  $n$ -tice hodnot  $(y_i, x_{1i}, x_{2i}, \dots)$ . Vztahy pro určení parametrů funkce  $y = ax_1 + bx_2 + c$  metodou nejmenších čtverců lze nalézt např. v [7]. Do uvedených vztahů lze dosadit místo proměnných  $x$  libovolnou funkci  $g(x)$ , která neobsahuje hledané parametry. Tímto vlastně provedeme v grafu transformaci osy nezávisle proměnné, kterou se hledaná funkce zlinearizuje nebo převede na jiný typ, který lze snadněji analyzovat. Nelze však provádět transformace závislé veličiny  $y$ , které jsou nelineární, protože jednotlivé odchylky změní nesterjným způsobem pro různé naměřené hodnoty. Například funkci

$$y = a \exp(x)$$

lze převést na lineární funkci transformací

$$X = \exp(x),$$

$$y = aX,$$

pro kterou již máme odvozen vztah pro stanovení parametru  $a$ . Do vztahu (2.63) dosadíme místo  $x_i$  funkci  $\exp(x_i)$ :

$$\hat{a} = \frac{\sum \exp(x_i) y_i}{\sum (\exp(x_i))^2}.$$

Nelze však provést logaritmování výše uvedené funkce

$$\ln(y) = a + x$$

a provést transformaci  $Y = \ln(y)$ . Tento postup vede ke špatnému výsledku.

**Příklad 2.3**

Přímou metodou byl měřen modul pružnosti oceli. Ocelový drát o průměru  $d$  a délce  $l$  byl zatěžován závažími a bylo měřeno jeho prodloužení. Byly zjištěny rozměry drátu:

$$\begin{array}{lll} \hat{d} = 600 \mu\text{m} & \hat{\delta}_d = 5 \mu\text{m} & \text{z 15 měření} \\ \hat{l} = 985 \text{ mm} & \hat{\delta}_l = 2 \text{ mm} & \text{z 8 měření} \end{array}$$

Výsledky měření jsou v tabulce:

Hmotnost $m_i$ (kg)	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
Prodloužení $\Delta l_i$ ( $\mu\text{m}$ )	0	20	35	52	63	80	96	109

Určete modul pružnosti  $E$  oceli, z níž je zhotoven zkoumaný drát.

**Řešení:**

Závislost délky prodloužení válcového drátu na hmotnosti zátěže je dán Hookovým zákonem

$$\Delta l = \frac{4gl}{E\pi d^2} m.$$

Funkční vztah mezi závislou proměnnou a nezávislou proměnnou je sice typu  $y = ax$ , ale při měření nelze zaručit, že naměřená závislost prochází bodem  $[0,0]$ . I tento počáteční bod je zatížen chybou měření, proto i v tomto případě musíme volit typ závislosti  $y = ax + b$ , kde parametr  $b$  je opravou na chybu vynulování měřidla při nezátěženém drátu. Naměřené hodnoty proložíme přímkou dle vztahu (2.64) a (2.65). Ze získané směrnice  $a$  pak určíme modul pružnosti

$$E = \frac{4gl}{a\pi d^2}.$$

Odhad parametrů přímky metodou nejmenších čtverců je

$$\hat{a} = \frac{N \sum m_i \Delta l_i - \sum m_i \sum \Delta l_i}{N \sum m_i^2 - (\sum m_i)^2},$$

$$\hat{b} = \frac{\sum m_i^2 \sum \Delta l_i - \sum m_i \sum m_i \Delta l_i}{N \sum m_i^2 - (\sum m_i)^2}.$$

Z naměřených hodnot spočítáme jednotlivé součty

$$\sum m_i = 2,8 \text{ kg}, \quad \sum m_i^2 = 1,4 \text{ kg}^2,$$

$$\sum \Delta l_i = 455 \cdot 10^{-6} \text{ m}, \quad \sum m_i \Delta l_i = 223,7 \cdot 10^{-6} \text{ m kg}.$$

Dosažením získáme odhady parametrů

$$\hat{a} = 153,45 \cdot 10^{-6} \text{ m kg}^{-1}, \quad \hat{b} = 3,2 \cdot 10^{-6} \text{ m}.$$

Výsledné hodnoty modelového vztahu jsou shrnuty v následující tabulce.

Hmotnost $m_i$ (kg)	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
Prodloužení $\Delta l_i$ ( $\mu\text{m}$ )	0	20	35	52	63	80	96	109
Model $\hat{a}m_i + \hat{b}$ ( $\mu\text{m}$ )	3,2	18,5	33,9	49,2	64,6	79,9	95,3	110,6

Odtud lze spočítat i zbytkovou sumu čtverců odchylek

$$S_0 = \sum (\hat{a}m_i + \hat{b} - \Delta l_i)^2 = 27,2 \cdot 10^{-12} \text{ m}^2,$$

ze které vypočítáme odhad chyby směrnice

$$s_a = 3,28 \cdot 10^{-6} \text{ m kg}^{-1}.$$

Ze směrnice spočítáme hodnotu odhadu modulu pružnosti a jeho chybu dle zákona přenosu chyb

$$\hat{r} = \sqrt{\hat{r}_l^2 + \hat{r}_a^2 + 4\hat{r}_d^2}$$

a dostaneme  $\hat{r} = 0,02718$ . Vypočítáme efektivní počet stupňů volnosti

$$n_{\text{eff}} = \hat{r}^4 \left[ \frac{\hat{r}_l^4}{n_l} + \frac{\hat{r}_a^4}{n_a} + \frac{(2\hat{r}_d)^4}{n_d} \right]^{-1}.$$

Směrnice  $a$  určená metodou nejmenších čtverců má 6 stupňů volnosti. Dosazením dostaneme  $n_{\text{eff}} = 13,5$ . Odpovídající Studentův koeficient je  $k = 1,038$ , výsledek s hladinou spolehlivosti 68,3% je

$$E = (22,3 \pm 0,6) \cdot 10^{10} \text{ Pa}.$$

#### Příklad 2.4

Neznámá funkce je zadána tabulkou:

$x_i$	2	3	4	5	6	7	8
$y_i$	0,2	0,7	0,95	1,2	1,35	1,46	1,58

Pro aproximaci této funkce byla vybrána funkce  $y = a \ln(x) + b$ . Určete hodnoty parametrů  $a$  a  $b$  metodou nejmenších čtverců.

**Řešení:**

Pokud provedeme transformaci nezávisle proměnné

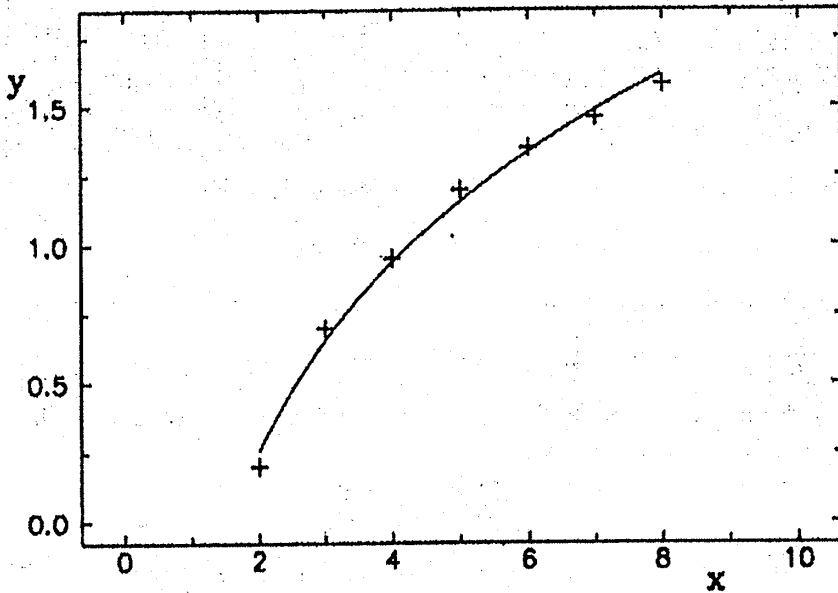
$$X = \ln(x),$$

dostaneme funkci tvaru  $y = aX + b$ . Pro výpočet koeficientů této funkce metodou nejmenších čtverců jsme již odvodili potřebné vztahy (2.64) a (2.65). V nich provedeme odpovídající transformaci, tj. místo  $x_i$  budeme dosazovat  $X_i = \ln(x_i)$ . Výpočtem získáme

$$\hat{a} = 0,98 \pm 0,04,$$

$$\hat{b} = -0,43 \pm 0,06.$$

Graf funkce je uveden na obrázku 22.



Obr. 22: Funkce  $y = a \ln(x) + b$  proložená metodou nejmenších čtverců

### 2.3 Postupná metoda

Postupnou metodou lze vyhodnotit soubor měření, která na sebe navazují tak, že koncový bod jednoho měření je počátečním bodem měření následujícího. Tato situace je častá při měření periodických objektů nebo dějů (například měření vzdálenosti uzlů vlnění, interferenčních čar, doby kmitu) nebo při měření lineárních závislostí, v nichž nezávisle proměnná nabývá ekvidistantních hodnot (například měření prodloužení drátu postupným zatěžováním, kalibrace pipety). Pro názornost si metodu vysvětlíme na příkladu měření vzdálenosti interferenčních čar (viz obr. 23).

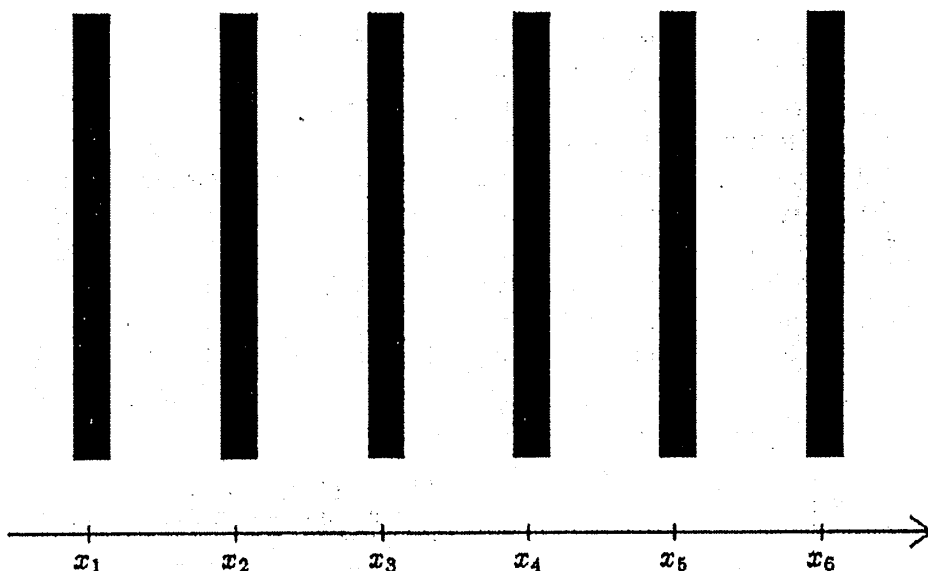
Ze změřených poloh čar ( $x_1, \dots, x_6$ ), máme určit střední hodnotu jejich vzdáleností  $\Delta$ . Mohlo by se zdát, že vhodný postup je spočítat vzdálenosti jednotlivých čar a z nich vypočítat průměr

$$\Delta = \frac{1}{5}(x_2 - x_1 + x_3 - x_2 + x_4 - x_3 + x_5 - x_4 + x_6 - x_5) = \frac{x_6 - x_1}{5}.$$

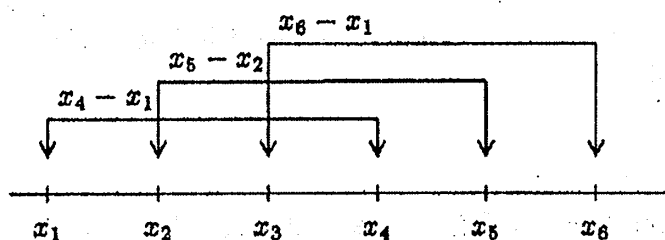
Vidíme, že výpočet vede k započítání pouze první a poslední polohy a informace o polohách čar mezi nimi není vůbec využita. Tento nedostatek odstraňuje právě postupná metoda. Její princip spočívá v tom, že měřené hodnoty vzestupně uspořádáme, rozdělíme na dvě stejně velké skupiny (předpokládáme sudý počet měření). Spočítáme rozdíly vždy mezi prvními body z obou skupin, vydělíme počtem intervalů mezi nimi a dále mezi druhými body atd. (viz obr. 24). Z takto získaných hodnot vypočítáme průměr. Výpočtem v našem případě získáme

$$\Delta = \frac{1}{3} \left( \frac{x_4 - x_1}{3} + \frac{x_5 - x_2}{3} + \frac{x_6 - x_3}{3} \right).$$

Postupná metoda však může dávat vychýlené odhady, a proto se od jejího využití ustupuje. Význam má spíše historický a pedagogický, protože



Obr. 23: Měření vzdálenosti čar postupnou metodou



Obr. 24: Princip postupné metody

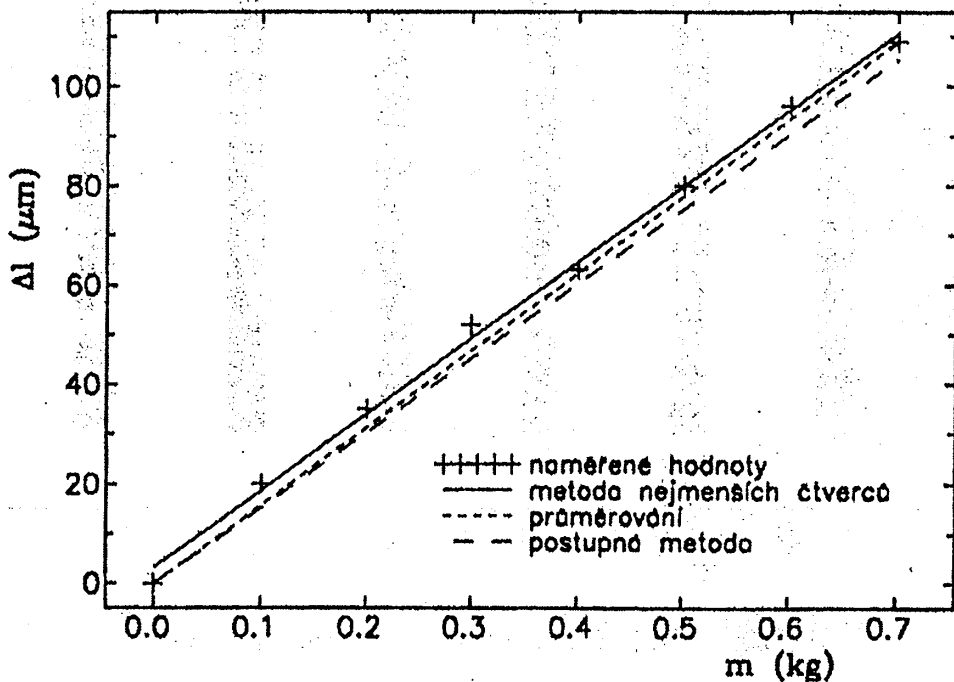
ukazuje, že i jednoduchá a na první pohled správná úvaha o průměrování rozdílů vede k chybným závěrům. K nejvěrohodnějšímu odhadu vede metoda nejmenších čtverců, kterou lze využít i v tomto případě, a to tak, že za nezávisle proměnnou považujeme pořadové číslo měření a za závisle proměnnou naměřenou hodnotu. Získáme tak dvojice hodnot  $(i, x_i)$ , kterými proložíme přímku. Směrnice přímky udává v tomto případě střední hodnotu vzdálenosti mezi čarami.

**Příklad 2.5**

Vyhodnoťte výsledky měření z příkladu 2.3 těmito způsoby:

- a) průměrováním rozdílů
- b) postupnou metodou

Takto získané výsledky porovnejte s výsledkem v příkladu 2.3.



Obr. 25: Srovnání výsledků metody nejmenších čtverců, průměrování a postupné metody

**Řešení:**

a) Průměrování rozdílů vede k rozdílu prvního a posledního bodu

$$\Delta = \frac{\Delta l_8 - \Delta l_1}{m_8 - m_1} = \frac{109 \cdot 10^{-6}}{0,7} = 155,7 \cdot 10^{-6} \text{ m kg}^{-1}.$$

Takto bychom získali hodnotu modulu pružnosti  $E = 21,9 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$ .

b) Pro postupnou metodu rozdělíme naměřené hodnoty do dvou skupin po čtyřech bodech. Postupnou metodou získáme hodnotu prodloužení odpovídající změně zatížení dle velikosti kroku měření, tj. 0,1 kg. Hodnota hledané směrnice je tedy 10 krát větší, a proto musíme výsledek násobit 10

$$\Delta = 10 \cdot \frac{1}{4} \left( \frac{\Delta l_5 - \Delta l_1}{4} + \frac{\Delta l_6 - \Delta l_2}{4} + \frac{\Delta l_7 - \Delta l_3}{4} + \frac{\Delta l_8 - \Delta l_4}{4} \right),$$

$$\Delta = 10 \cdot \frac{1}{4} \left( \frac{63 - 0}{4} + \frac{80 - 20}{4} + \frac{96 - 35}{4} + \frac{109 - 52}{4} \right),$$

$$\Delta = 150,6 \cdot 10^{-6} \text{ m kg}^{-1}.$$

Odpovídající hodnota modulu pružnosti je  $E = 22,7 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$ .

Vidíme, že obě metody daly rozdílné výsledky a liší se od výsledku získaného metodou nejmenších čtverců. Důvod je patrný z grafu na obr. 25. Hodnota směrnice získaná průměrováním závisí pouze na prvním

a posledním bodu, přímka tyto body spojuje. V případech, kdy právě první nebo poslední bod se podstatně odchyluje od předpokládané přímky, dává tato metoda špatné výsledky. V našem případě není jejich odchylka od přímky proložené metodou nejmenších čtverců příliš velká. Proto se směrnice získaná postupnou metodou příliš neliší od směrnice získané metodou nejmenších čtverců. Postupná metoda dala v našem případě nejnižší hodnotu směrnice, protože v souboru dat ve druhé skupině je patrný posun naměřených bodů k nižším hodnotám. Jak postupná metoda, tak i průměrování, mohou poskytovat zkreslené výsledky. Použití těchto metod lze doporučit pouze pro rychlé získání přibližných výsledků.

---

### 3 Zásady tvorby grafů

Graf je základním nástrojem prezentace výsledků měření fyzikálních závislostí. Mimo přehledné zobrazení, zvláště v případě většího množství dat, slouží i pro jejich interpretaci, případně pro srovnání s modelovou křivkou. Normy pro tvorbu grafů nejsou příliš ustálené, požadavky se mohou mírně lišit podle způsobu tvorby a účelu využití grafu, přesto lze najít některé společné zásady. Pro vytváření grafů ručně:

- kreslíme vždy na papír určený pro grafy (milimetrový, logaritmický papír)
- osy:
  - na vodorovnou osu vynášíme nezávisle proměnnou veličinu a na svislou osu veličinu závislou
  - zvolíme umístění os; pokud je v rozsahu hodnot bod  $(0;0)$ , umístíme do něj počátek os, osy neumístujeme na okraj milimetrové sítě
  - zvolíme velikost jednotky na osách tak, aby vykreslená křivka nebo body využily asi 80% plochy papíru
  - osy ekvidistantně označujeme a popíšeme, doporučená vzdálenost značek je 2 až 5 cm, popisky píšeme na vnější stranu osy
  - značky os popisujeme v pravidelných intervalech (např. každou druhou), popsané značky děláme výraznější
  - osy ukončíme šipkou ve směru rostoucí hodnoty
  - na konci osy napíšeme značku veličiny a do závorky její jednotku (např.  $I$  (mA))
- body:
  - vynášené hodnoty umístíme v grafu do polohy dané souřadnicovým systémem
  - souřadnice bodů nevyznačujeme na osy a nekreslíme ani žádné vynášecí úsečky
  - body patřící do určité skupiny odlišujeme od ostatních typem značky (například křížek, kolečko, čtvereček)
  - velikost značek volíme tak, aby byl dobře patrný jejich typ, ale aby docházelo jen minimálně k jejich vzájemnému překryvu
  - hodnoty vztahující se k jednotlivým bodům do grafu zásadně nevypisujeme
- křivky:
  - jednotlivé body nespojujeme lomenou křivkou, spojnice bodů nemá zpravidla žádný fyzikální význam



- pokud je žádoucí vytvořit spojnici bodů, prokládáme hladkou křivku pomocí křivítka
- proložené křivky vykresluje pouze v rozsahu odpovídajícím zakresleným bodům (pokud úmyslně neprovádíme extrapolaci)
- pokud je v grafu více křivek, odlišíme je buď typem čáry nebo typem značek bodů, které na této křivce leží
- křivky popíšeme jejich parametry nebo vytvoříme legendu (obrázek se vzorkem typů čar s jejich popisem, který umísťujeme ve volné části grafu)

- do záhlaví grafu umístíme nadpis vystihující obsah grafu

Pro počítačovou tvorbu grafů platí všechny výše uvedené zásady s výjimkou toho, že grafy tiskneme na jednobarevný papír (nikoliv milimetrový). Rámec grafu je tvořen osami, které jsou po všech stranách opatřeny značkami, ale jen dolní a levá osa jsou popsány.

# Dodatek A

## Vázení

Vážením určujeme hmotnost váženého předmětu srovnáním jeho tíhy s tíhou závaží (předmětu známé hmotnosti). K tomuto srovnání slouží váhy. Vázení na vahách je jednou z nejpřesnějších měřicích metod v běžných laboratořích. Běžně dosahované relativní přesnosti vážení jsou  $10^{-5}$  až  $10^{-6}$ . Pokud je to možné, je výhodné převádět jiné typy měření na vážení (např. stanovení objemu, hustoty). Máme-li dosáhnout vysoké přesnosti, je nutné váhy pečlivě udržovat, vážení samo musíme provádět s největší opatrností a do zpracování měření zahrnout analýzu systematických chyb měření.

V laboratoři se nejčastěji setkáme s pákovými váhami nebo váhami elektronickými. Pákové váhy využívají pro srovnání tíhy váženého předmětu a závaží momentové rovnováhy na páce (nejčastěji rovnoramenné). Páka vah (vahadlo) je spojena s miskami, na které ukládáme vážený objekt a závaží. Závaží klademe na pravou misku vah z důvodu pohodlnější manipulace pravou rukou. Oddělení misky pro závaží a pro vážené předměty je důležité i proto, aby na stejnou misku nebyly kladeny jednou např. chemikálie a podruhé závaží. Vahadlo je spojeno s indikátorem polohy vahadla (jazýček), který ukazuje na stupnici polohu vahadla v dílcích, jež jsou úměrné úhlu vychýlení vahadla. Velmi důležitou částí vah jsou břity, na nichž spočívají misky a vahadlo. Břity jsou trojboké hranoly s ostrou hranou, která dosedá do lůžka. Nejsou-li břity dosti ostré, stane se, že se břit při naklánění vahadla valí po dosedací plošce a mění se tak velikost páky. Aby se břity neotupily, bývají vyrobeny z tvrdé oceli nebo z achátu, podobně jako lůžka. Váhy jsou opatřeny tzv. aretací, tj. zařízením, kterým se misky a vahadlo vyzvednou tak, aby břity nebyly namáhány, i když váhy nepoužíváme. Aretace současně blokuje pohyb vahadla a misek.

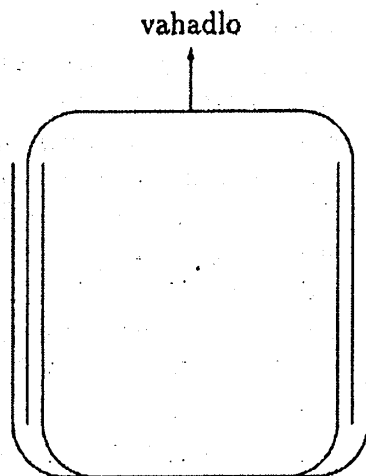
Při vážení se snažíme dosáhnout rovnovážného stavu vah, tj. stavu, ve kterém je výsledný moment sil působících na vahadlo nulový. Tento stav ale nemusí znamenat, že tíhy předmětů na obou miskách si jsou rovny (i v případě stejně dlouhých ramen). Při výpočtu momentů je nutné započítat moment tíhy jazýčku a pamatovat na to, že břit vahadla neleží na spojnici břitů misek (břity misek jsou vůči břitu vahadla níže). Těžiště celé soustavy tak leží pod osou otáčení vahadla a soustava je stabilní. Při malém rozdílu hmotností na miskách se soustava dostane do rovnováhy nakloněním vahadla, čímž se změní úhly mezi vahadlem a tíhovou silou misek a dojde ke změně jejich momentů. Tím se dostane soustava do rovnováhy. Výsledkem je to, že úhel odchylky vahadla  $\Delta\varphi$  od nulové polohy (poloha při nezatížených miskách) je úměrný rozdílu hmotností předmětů na miskách  $\Delta m$

$$\Delta\varphi = c\Delta m, \quad (\text{A.1})$$

kde  $c$  je tzv. citlivost vah. Citlivost závisí na rozměrech vahadla a jazýčku a na zatížení vah. Citlivost vah tedy není konstantní a je vhodné ji stanovovat při každém vážení. Obecně vztah (A.1) říká, že změna rozdílu hmotností na

miskách o  $\Delta m$  posune rovnovážnou polohu o  $\Delta \varphi$ . Úhel  $\Delta \varphi$  budeme měřit v dílcích stupnice vah. Rozměr citlivosti  $c$  pak bude  $\text{dllek/mg}$ . Podrobnější výklad teorie vah je např. v [9]. Dále se budeme zabývat postupem vážení na tlumených analytických vahách a netlumených laboratorních vahách. Na závěr se krátce zamyslíme nad způsobem použití elektronických vah.

Laboratorní váhy mají maximální povolené zatížení asi do 1 kg a přesnost maximálně 0,01 g. Přesnost analytických vah je asi 0,1 mg při maximálním povoleném zatížení až 200 g. Tlumené váhy jsou na rozdíl od vah netlumených vybaveny tzv. tlumícím válcem. Dolní část válce je spojena s pevnou konstrukcí vah, horní část válce je spojena s vahadlem, které při pohybu mění objem uzavřený válci (viz obr. 26). Vzduch proudí úzkou štěrbinou mezi válci a svým vnitřním třením brzdí pohyb válce a vahadla. Tím se dosahuje rychlého ustálení polohy vahadla a na stupnici je možné přímo přečíst rovnovážnou polohu.



Obr. 26: Tlumící válec tlumených vah

### Postup vážení na tlumených vahách

1. Zkontrolujeme správnost polohy vah. Váhy musí mít základovou desku ve vodorovné poloze. Toto lze kontrolovat libelou nebo olovnicí, která bývá s vahami spojena. Pro seřízení mívají váhy stavitelné nožky.
2. Váhy pomalu odaretujeme. Prudkým odaretováním by se mohly poškodit břity. Jemným odaretováním se zároveň snažíme co nejméně rozhoupat vahadlo a misky. Případné kývání misek lze zastavit opatrnou aretací a odaretováním.
3. Určíme rovnovážnou polohu nezatížených vah  $n_{01}$  (první nulová poloha). Nulová poloha by měla ležet přibližně ve středu stupnice. Pokud tomu tak není, lze váhy seřídít buď pomocí šroubovacího přívažku na vahadle nebo přidáním skleněných kuliček na některou z misek.

4. Váhy zaaretujeme a na levou misku vah položíme vážený předmět. Jeho hmotnost je vhodné předem přibližně určit na méně citlivých vahách, abychom nepřekročili maximální povolené zatížení vah a zároveň usnadnili volbu závaží.
5. Na pravou misku vah položíme první závaží. Závaží je vhodné volit poněkud větší hmotnosti, než je očekávaná hmotnost váženého předmětu. Odaretováním zjistíme z pohybu jazýčku, zda je závaží těžší než vážený předmět. Závaží zaměňujeme za závaží menší tak dlouho, až přijdeme na závaží, které je lehčí. K němu stejným způsobem přidáváme další závaží. Při manipulaci se závažím musí být váhy vždy aretovány. Pro hrubé porovnání hmotností na miskách stačí váhy odaretovat jen částečně.
6. Postup v předchozím bodu opakuje tak dlouho, až se jazýček v rovnovážné poloze ustálí v rámci stupnice. Pak odečteme rovnovážnou polohu  $n_1$  a zjistíme součet hmotností závaží, který označíme  $Z_1$ .
7. Přidáme nebo ubereme malé závaží tak, aby se rovnovážná poloha dostala na opačnou stranu stupnice, než je první nulová poloha. Druhou rovnovážnou polohu označíme  $n_2$  a součet hmotností závaží označíme  $Z_2$ .
8. Závaží a vážený předmět z misek odstraníme a odečteme druhou nulovou polohu vah  $n_{02}$ .
9. Určíme průměrnou nulovou polohu  $n_0$

$$n_0 = \frac{n_{01} + n_{02}}{2} \quad (\text{A.2})$$

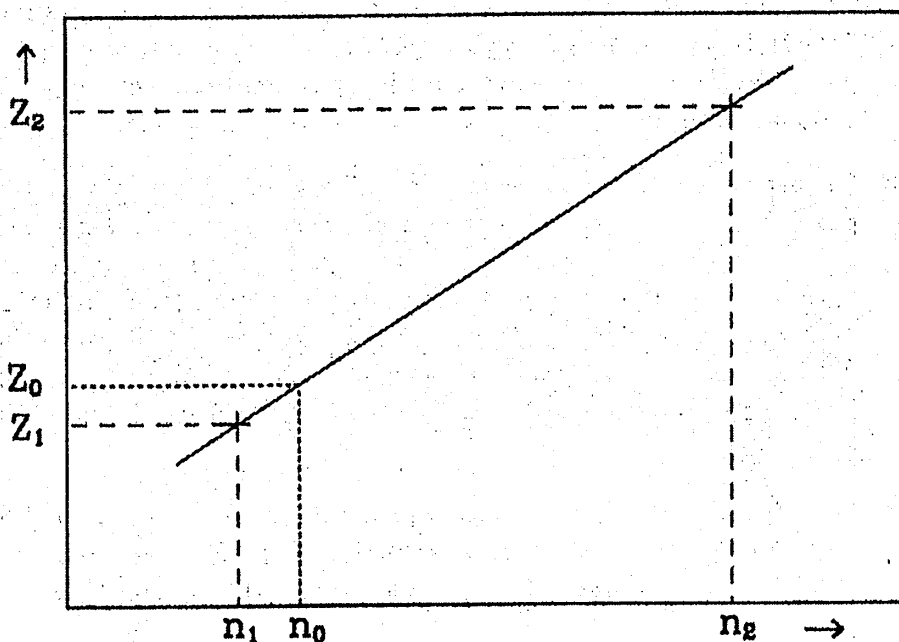
Tuto hodnotu budeme považovat za nulovou hodnotu vah platnou pro okamžik vážení. Pokud se  $n_{01}$  a  $n_{02}$  významně liší, došlo během vážení k závažnějšímu zásahu do vah a je nutné celé vážení opakovat.

10. Je zřejmé, že správná hodnota vyvažujícího závaží  $Z_0$  odpovídá rovnovážné poloze shodné s nulovou polohou  $n_0$ . Jak zjistíme hodnotu  $Z_0$ ? Díky vztahu (A.1), můžeme využít lineární interpolace, protože výchylka vahadla je přímo úměrná rozdílu vah na miskách

$$Z_0 = Z_1 + (Z_2 - Z_1) \frac{n_0 - n_1}{n_2 - n_1} \quad (\text{A.3})$$

11. Hodnota  $Z_0$  je zatížena chybou, jejíž odhad můžeme provést na základě přesnosti čtení na stupnici a citlivosti vah. Citlivost  $c$  stanovíme na základě vztahu (A.1)

$$c = \frac{n_2 - n_1}{Z_2 - Z_1} \quad (\text{A.4})$$



Obr. 27: Interpolace hmotnosti závaží na nulovou polohu vah

Jestliže je mezní chyba čtení na stupnici  $\kappa_n$  dílků, pak mezní chyba hmotnosti je

$$\kappa_Z = \frac{\kappa_n}{c} \quad (\text{A.5})$$

#### Příklad A.1

Na tlumených analytických vahách byla stanovena první nulová poloha  $n_{01} = 8$  dílků. Při prvním vyvážení se jazýček vah ustálil na stupnici v poloze  $n_1 = 25$  dílků při hmotnosti závaží  $Z_1 = 35,68$  g. Přidáním závaží 10 mg, tj.  $Z_2 = 35,69$  g se rovnovážná poloha ustálila na dílku  $n_2 = -63$ . Po odstranění závaží a váženého předmětu byla druhá nulová poloha  $n_{02} = 14$  dílků.

Stanovíme nulovou polohu  $n_0$

$$n_0 = \frac{8 + 14}{2} = 11$$

Správnou hodnotu vyvažujícího závaží získáme podle (A.3)

$$Z_0 = 35,68 + (35,69 - 35,68) \cdot \frac{11 - 25}{-63 - 25} = 35,68159 \text{ g}$$

Citlivost vah

$$c = \frac{-63 - 25}{35,69 - 35,68} \doteq 8800 \text{ dílků/g} = 8,8 \text{ dílku/mg}$$

Citlivost bereme vždy jako veličinu kladnou, vzorec (A.4) může dát někdy zápornou hodnotu, což je dáno volbou kladného směru stupnice.

Pokud lze na stupnici odečítat s mezní chybou 1 dílek, pak chyba hodnoty  $Z_0$  je

$$\kappa_Z = \frac{1}{8,8} \approx 0,1 \text{ mg}.$$

Hmotnost vyvažujícího závaží je proto

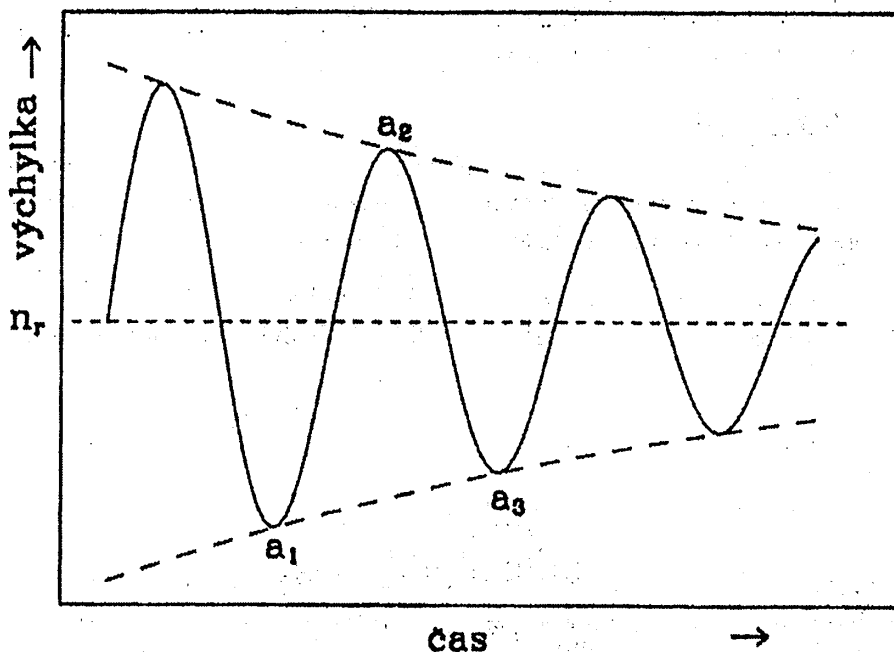
$$Z_0 = (35,6816 \pm 0,0001) \text{ g}.$$

### Postup vážení na netlumených vahách

Netlumené váhy nejsou vybaveny tlumicím zařízením. Díky mnoha různým faktorům jsou ale kmity vah vždy tlumené (viz obr. 28). V principu se vážení na netlumených vahách neliší od vážení na vahách tlumených. Rozdíl je pouze v tom, že díky slabému tlumení kmitů vahadla by bylo možné odečíst rovnovážnou polohu vah až po dlouhé době. To by bylo velmi nepraktické, proto pro stanovení rovnovážných poloh  $n_{01}, n_{02}, n_1, n_2$  používáme tzv. metodu tří kyvů. Tato metoda umožňuje přibližně určit rovnovážnou polohu z hodnot polohy tři po sobě následujících bodů obratu jazýčku vah. Jazýček koná slabě tlumené kmity. Pohyb jazýčku po stupnici lze popsat vztahem

$$n(t) = n_r + Ae^{-\beta t} \sin(\omega t + \gamma). \quad (\text{A.6})$$

Myšlenka metody tří kyvů vychází z toho, že obálkové křivky grafu tlumených kmitů (v obrázku 28 jsou vyznačeny čárkovaně) jsou symetrické vzhledem k hodnotě rovnovážné polohy. Kdybychom znali v některém okamžiku



Obr. 28: Metoda tří kyvů pro stanovení rovnovážné polohy slabě tlumených vah

hodnoty obou obálkových křivek, rovnovážná hodnota by byla dána jejich aritmetickým průměrem. Jednu hodnotu obálkové křivky  $a_2$  zjistíme v bodu obratu jazýčku, ale hodnota druhé obálkové křivky ve stejném okamžiku nám bude vždy chybět. Tuto hodnotu můžeme přibližně získat za předpokladu, že obálkovou křivku mezi dvěma body obratu lze nahradit úsečkou ( $\beta \ll \omega$ ). Pak je chybějící hodnota dána aritmetickým průměrem velikosti výchylek ve dvou sousedních bodech obratu  $a_1$  a  $a_3$

$$n_r = \frac{1}{2} \left( a_2 + \frac{a_1 + a_3}{2} \right) \quad (\text{A.7})$$

### Vážení na elektronických vahách

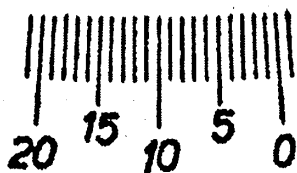
Elektronické váhy jsou již běžnou součástí fyzikálních a chemických laboratoří. Podle jejich citlivosti je možné elektronické váhy rozdělit na váhy laboratorní a analytické. Dosahují citlivostí srovnatelných s mechanickými vahami. Postup vážení je velmi jednoduchý, vyžaduje však pečlivost a dobrou přípravu vah před měřením. Před vážením musíme zkontrolovat správné uložení vah, k tomu slouží zpravidla zabudovaná libela. Elektronické váhy mají jen jednu misku a měří tíhu předmětu na ní uloženého. Tíhovou sílu, resp. číselný údaj získaný elektronickým převodníkem, srovnávají s hodnotami tíhových sil kalibračních závaží. Elektronické váhy totiž musí být po zapnutí a stabilizaci vnitřních obvodů (především ustálení vnitřní teploty) zkalibrovány sadou kalibračních závaží. Postupy kalibrace se mohou lišit, jsou uvedeny v návodu k vahám. Před uložení předmětu na misku vah nejprve vynulujeme údaj na displeji. Vážený předmět opatrně uložíme na misku a odečteme údaj na displeji. Pokud se podstatně změní laboratorní podmínky, musíme znovu provést kalibraci vah. Chybu zjištěné hmotnosti spočítáme dle návodu v dokumentaci k vahám.

#### **Příklad A.2**

Projdeme postup vážení prázdné skleněné kádinky na laboratorních vahách pomocí metody tří kyvů. Na obrázku 29 je stupnice laboratorních vah. Je zřejmé, že stupnice vah nemusí mít nulu uprostřed.

- Při zjišťování první nulové polohy byly hodnoty tří po sobě jdoucích maximálních výchylek 7;16;9. Výsledná první nulová poloha

$$n_{01} = \frac{1}{2} \left( 16 + \frac{7+9}{2} \right) = 12.$$



Obr. 29: Stupnice laboratorních vah

- Prvním vyvážením závažím  $Z_1=56,3$  g byly hodnoty podle metody tří kyvů 4;17;5. První rovnovážná poloha

$$n_1 = \frac{1}{2} \left( 17 + \frac{4+5}{2} \right) = 10,75 .$$

Jelikož první rovnovážná poloha leží vpravo od první nulové polohy, musíme změnit vyvažující závaží tak, aby druhá rovnovážná poloha byla větší než 12. Musíme tedy hmotnost závaží zvětšit (předpokládáme, že závaží je na pravé misce).

- Po zvětšení závaží na hodnotu  $Z_2=56,4$  g byly hodnoty tří kyvů 8;19;10. Druhá rovnovážná poloha

$$n_2 = \frac{1}{2} \left( 19 + \frac{8+10}{2} \right) = 14 .$$

- Druhá nulová poloha byla zjištěna z hodnot 8;15;8:

$$n_{02} = \frac{1}{2} \left( 15 + \frac{8+8}{2} \right) = 11,5 .$$

Další postup je stejný jako u vah tlumených. Nulová poloha je

$$n_0 = \frac{n_{01} + n_{02}}{2} = \frac{12 + 11,5}{2} = 11,75 .$$

Správnou hodnotu vyvažujícího závaží získáme podle (A.3):

$$Z_0 = 56,3 + (56,4 - 56,3) \cdot \frac{11,75 - 10,75}{14 - 10,75} = 56,3308 \text{ g} .$$

Citlivost vah je

$$c = \frac{14 - 10,75}{56,4 - 56,3} = 32,5 \text{ dílků/g} .$$

Mezní chyba hmotnosti  $Z_0$  je pak

$$\kappa_Z = \frac{1}{32,5} \doteq 0,03 \text{ g} .$$

Výsledná hodnota hmotnosti vyvažujícího závaží je tedy

$$Z_0 = (56,33 \pm 0,03) \text{ g} .$$

## Oprava vážení na vztlak vzduchu (redukce vážení na vakuum)

Vliv vztlaku vzduchu je příkladem systematické chyby, která se vyskytuje v procesu vážení. Na předměty na miskách a na závaží nepůsobí jenom tíhové síly, ale i vztlakové síly vzduchu dle Archimédova zákona. Velikost vztlakové síly závisí na objemu těles na miskách vah a na hustotě vzduchu. Objemy těles jsou obecně různé, proto může být vztlaková síla působící na závaží jiná



než síla působící na vážený předmět. Pro rovnováhu na vahách s uvážením vztlaku vzduchu platí:

$$m - \rho_v V_m = Z - \rho_v V_z, \quad (\text{A.8})$$

kde  $m$  je hmotnost váženého předmětu,  $V_m$  je jeho objem,  $Z$  je hmotnost závaží,  $V_z$  je objem závaží a  $\rho_v$  je hustota vzduchu. Položme

$$V_m = \frac{m}{\rho}, \quad V_z = \frac{Z}{\rho_z}, \quad (\text{A.9})$$

kde  $\rho$  je hustota váženého předmětu a  $\rho_z$  je hustota závaží. Dosazením do (A.8) a úpravou dostaneme

$$m = Z \frac{\rho(\rho_z - \rho_v)}{\rho_z(\rho - \rho_v)}. \quad (\text{A.10})$$

Závaží bývají většinou mosazná, tj.  $\rho_z = 8400 \text{ kg m}^{-3}$ . Hustotu váženého předmětu  $\rho$  buď známe (podle materiálu určíme z tabulek), nebo ji určíme právě pomocí vážení. Hustota vzduchu závisí na tlaku  $p$ , teplotě  $t$  a vlhkosti vzduchu  $R$ . Při vážení musíme proto stanovit laboratorní podmínky. Hustota vzduchu ze stavové rovnice dvousložkového plynu (suchý vzduch a vodní pára) je [9]

$$\rho_v = \frac{\rho_0}{p_0 \left(1 + \frac{t}{T_0}\right)} (p - 0,378e), \quad (\text{A.11})$$

kde  $\rho_0 = 1,293 \text{ kg m}^{-3}$  je hustota vzduchu za normálních podmínek  $T_0 = 273,15 \text{ K}$  a  $p_0 = 101325 \text{ Pa}$ . Teplotu vzduchu  $t$  dosazujeme ve  $^{\circ}\text{C}$ . Parciální tlak vodních par určíme pomocí relativní vlhkosti  $R$  a parciálního tlaku nasycené vodní páry  $E$

$$e = RE. \quad (\text{A.12})$$

Parciální tlak nasycené vodní páry  $E$  můžeme nalézt v tabulkách nebo vypočítat podle vztahu

$$E = 611 \cdot 10^{\frac{a}{1+b/t}} \quad [\text{Pa}, ^{\circ}\text{C}], \quad (\text{A.13})$$

který lze odvodit z Clausiovy-Clapeyronovy rovnice. Hodnoty parametrů jsou

$$\begin{aligned} a &= 7,5 \text{ a } b = 237,3^{\circ}\text{C} \text{ pro teploty nad bodem mrazu,} \\ a &= -9,5 \text{ a } b = 265,5^{\circ}\text{C} \text{ pro teploty pod bodem mrazu.} \end{aligned}$$

Redukci vážení na vakuum provádíme i při vážení na elektronických vahách, neboť i tyto váhy srovnávají tíhu váženého předmětu a tíhu kalibračních závaží. Důležité je, aby kalibrace a vážení proběhly za stejných laboratorních podmínek.

### Příklad A.3

Výsledek předchozího příkladu (vážení skleněné kádinky) opravíme o vztlak vzduchu. Hmotnost vyvažujícího závaží byla stanovena

$$Z_0 = (56,33 \pm 0,03) \text{ g}.$$

Laboratorní podmínky  $t = 22,8^\circ\text{C}$ ,  $p = 96438 \text{ Pa}$ ,  $R=38\%$ . Podle (A.13) je tlak nasycených vodních par  $E=2776 \text{ Pa}$  a parciální tlak par ve vzduchu  $e = 0,38 \cdot 2776=1055 \text{ Pa}$ . Pro hustotu vzduchu podle (A.11) dostaneme

$$\rho_v = \frac{1,293}{101325 \cdot \left(1 + \frac{22,8}{273,15}\right)} \cdot (96438 - 0,378 \cdot 1055) = 1,131 \text{ kg m}^{-3}.$$

Nyní můžeme přistoupit k výpočtu hmotnosti redukované na vakuum podle (A.10). Vážený předmět má hustotu  $\rho = 2250 \text{ kg m}^{-3}$ , závaží  $\rho_s = 8400 \text{ kg m}^{-3}$ .

$$m = 56,33 \cdot \frac{2250 \cdot (8400 - 1,131)}{8400 \cdot (2250 - 1,131)} = 56,35 \text{ g}.$$

Hmotnost vážené kádinky je

$$m = (56,35 \pm 0,03) \text{ g}.$$

### Příklad A.4

V kádince, jejíž hmotnost jsme zjistili v předchozích dvou příkladech, vážíme vodu. Vážení proběhlo za stejných laboratorních podmínek jako vážení prázdné kádinky. Hmotnost vyvažujícího závaží byla v tomto případě

$$Z_{0v} = (185,52 \pm 0,03) \text{ g}.$$

Pro redukci vážení na vakuum neznáme v tomto případě hustotu váženého předmětu, protože se jedná o nehomogenní těleso (kádinka a voda). Můžeme postupovat dvěma způsoby. Buď odhadneme střední hustotu celé soustavy voda-kádinka (jelikož se jedná pouze o údaj pro výpočet opravy, případnou chybou se nedopustíme zřejmě příliš velkého zkreslení výsledku), nebo provedeme redukci vážení pouze pro samotnou vodu následujícím způsobem. Hmotnost vyvažujícího závaží pro samotnou vodu je dána rozdílem

$$Z_v = Z_{0v} - Z_0 = (129,19 \pm 0,04) \text{ g}.$$

Hustotu vody známe ( $\rho = 1000 \text{ kg m}^{-3}$ ) a po výpočtu dostaneme hmotnost vody

$$m_v = (129,32 \pm 0,04) \text{ g}.$$

**Příklad A.5**

Vážíme hliníkový předmět na tlumených analytických vahách:

První nulová poloha:  $n_{01} = 30$

První vyvážení:  $n_1 = 67$  při  $Z_1 = 28,43$  g

Druhé vyvážení:  $n_2 = -35$  při  $Z_2 = 28,44$  g

Druhá nulová poloha:  $n_{02} = 12$

Rovnovážná poloha je

$$n_0 = \frac{12 + 30}{2} = 21.$$

Hmotnost vyvažujícího závaží

$$Z_0 = 28,43 + (28,44 - 28,43) \cdot \frac{21 - 67}{-35 - 67} = 28,4345 \text{ g}.$$

Citlivost vah

$$c = \frac{67 - (-35)}{28,44 - 28,43} = 10,2 \text{ dílků/mg}.$$

Chyba vážení je pak 0,1 mg. Hmotnost vyvažujícího závaží

$$Z_0 = (28,4345 \pm 0,0001) \text{ g}.$$

Vážení probíhalo při teplotě  $t = 21,7$  °C, tlaku  $p = 98925$  Pa a relativní vlhkosti  $R=56\%$ . Parciální tlak podle (A.13) a (A.12) dostaneme  $e = 2597$  Pa. Hustota vzduchu podle (A.11) je  $\rho_v=1,163$  kg m<sup>-3</sup>. Hustota hliníku je  $\rho = 2700$  kg m<sup>-3</sup>. Redukce vážení na vakuum podle (A.10):

$$m = 28,4345 \cdot \frac{2700 \cdot (8400 - 1,163)}{8400 \cdot (2700 - 1,163)} = 28,4428 \text{ g}.$$

Hmotnost váženého předmětu je

$$m = (28,4428 \pm 0,0001) \text{ g}.$$

## Dodatek B

### Vlastnosti měřicích přístrojů

Měřicí přístroje umožňují objektivizovat měření, tj. buď vyloučit lidské smysly z procesu měření a nebo měřenou veličinu učinit lidským smyslům snadněji kvantifikovatelnou (např. poloha ručky na stupnici přístroje). V mnoha případech měřicí přístroje zprostředkovávají informaci o veličině, která je lidským smyslům nedostupná. Měřicí přístroje tedy hrají klíčovou roli v měřicím procesu a úspěch měření závisí i na tom, jak dobře známe vlastnosti použitých přístrojů. Musíme porozumět, jak přístroje interagují s měřeným objektem a mezi sebou navzájem, jejich omezením a chybám, které vnášejí do měření.

V této kapitole si budeme všimnout vlastností elektrických měřicích přístrojů. S těmito měřicími přístroji se setkáváme často, protože mnoho měření je založeno na převodu měřené veličiny na elektrický proud nebo napětí. V takovém měřicím řetězci je nutné rozumět nejenom vlastnostem měřicího přístroje samotného, ale i převodníku dané veličiny na veličinu elektrickou. Vlastností převodníků jsou závislé na konkrétní situaci a nebudeme se jimi zabývat. Přístroje pro měření elektrického proudu můžeme rozdělit do dvou skupin. Jsou to ručkové (analogové) a číslicové (digitální) přístroje. Digitální měřicí přístroje převádějí pomocí tzv. analogově-digitálního převodníku měřenou veličinu na číslo zobrazené na displeji. Převodníky jsou elektronické obvody, jejichž princip je popsán např. v [9].





Ručkové měřicí přístroje využívají nejčastěji silového působení magnetického pole, ve výjimečných případech elektrostatického pole. V nejběžnějším měřicím systému s otočnou cívkou se využívá silového působení magnetického pole na cívku protékanou elektrickým proudem. Cívka je uložena mezi póly permanentního magnetu tak, aby se mohla otáčet. Díky interakci magnetického momentu cívky s magnetickým polem magnetu dochází k otočení cívky až do polohy, kdy je moment sil magnetického pole v rovnováze s momentem síly vratného mechanismu - např. spirálového pérka. Cívka je spojena s ručičkou na stupnici a její výchylka je úměrná střední hodnotě protékajícího proudu. Z toho je zřejmé, že tímto systémem není možné přímo měřit střídavé proudy. Pro měření střídavých proudů musíme proud usměrnit nebo použít tzv. elektromagnetického nebo elektrodynamického systému.

U elektromagnetického systému se využívá vzájemného silového působení železného jádra a magnetického pole buzeného pevně uloženou cívkou. V magnetickém poli se jádro polarizuje a je vtahováno do cívky. Pohyb jádra se pak přenáší na ručičku na stupnici.

Elektrodynamický systém je v principu velmi podobný systému s otočnou cívkou. Pole permanentního magnetu je ale nahrazeno polem pevné cívky, kterou protéká měřený proud. V tomto magnetickém poli se vychyluje otočná cívka, kterou rovněž protéká měřený proud. Elektrodynamického systému lze využít i pro měření výkonů. Na jednu cívku je přivedeno napětí, které je na měřené zátěži, a druhou cívkou protéká proud, který protéká měřenou zátěží. Jedna cívka je tedy zapojena paralelně k měřené zátěži a druhá do série.

V takovém uspořádání je výchylka úměrná činnému výkonu uvolňovaném na zátěži.

Typ měřicího systému bývá označen na stupnici přístroje symbolem (viz tabulka 4). Na stupnici se dále uvádí izolační schopnost přístroje, tj. napětí na svorkách přístroje, při kterém nedojde k jeho průrazu na vodivou uzemněnou podložku (viz tabulka 5). Dále bývá uvedena správná pracovní poloha stupnice a druh měřeného proudu (viz tabulka 6). Důležitým údajem na stupnici je tzv. třída přesnosti, která je dána číslem uváděným nad symbolem druhu měřeného proudu. Třída přesnosti udává mezní chybu měřicího přístroje. Chybu vypočítáme tak, že vynásobíme hodnotu zvoleného rozsahu měřicího přístroje třídou přesnosti a vydělíme 100.

Značka	Název systému	Princip	Využití
	s otočnou cívkou	otočná cívka protékající měřeným proudem uložená v poli permanentního magnetu	stejnoseměrné napětí a proudy (výchylka úměrná střední hodnotě)
	s otočnou cívkou a usměrňovačem	stejný jako u systému s otočnou cívkou, proud je v přístroji usměrňován diodou	stejnoseměrné i střídavé napětí a proudy (výchylka úměrná střední hodnotě usměrňovaného proudu)
	elektromagnetický	otočné železné jádro uložené v magnetickém poli cívky, kterou protéká měřený proud	stejnoseměrné i střídavé napětí a proudy (výchylka úměrná efektivní hodnotě)
	elektrodynamický	otočná cívka protékající proudem uložená v magnetickém poli cívky, kterou protéká proud	stejnoseměrné i střídavé napětí a proudy (výchylka úměrná efektivní hodnotě), výkon



Tabulka 4: Typy měřicích systémů a jejich označení

#### Příklad B.1







Voltmetr má rozsah 24 V a třídu přesnosti 1,5. Ručička ukazuje napětí 10 V. Určete chybu napětí a vyjádřete ji relativně a absolutně.

*Řešení:*

Z definice třídy přesnosti dostaneme absolutní chybu napětí:  $\Delta U = 24 \cdot \frac{1,5}{100} = 0,36 \text{ V}$ . Výsledek je  $U = (10,00 \pm 0,36) \text{ V}$  a relativní chyba  $r_U = 3,6\%$ .

Značka	Význam
	zkušební napětí 500V
	zkušební napětí v kV (zde např. 1 kV)

Tabulka 5: Izolační schopnosti měřicího přístroje

Značka	Pracovní poloha stupnice	Značka	Typ měřeného proudu (napětí)
	pracovní poloha stupnice svislá		stejnoseměrný
	pracovní poloha stupnice vodorovná		stejnoseměrný i střídavý
	pracovní poloha stupnice šikmá (zde např. 60°)		střídavý

Tabulka 6: Další značky na stupnici měřicích přístrojů

### Příklad B.2

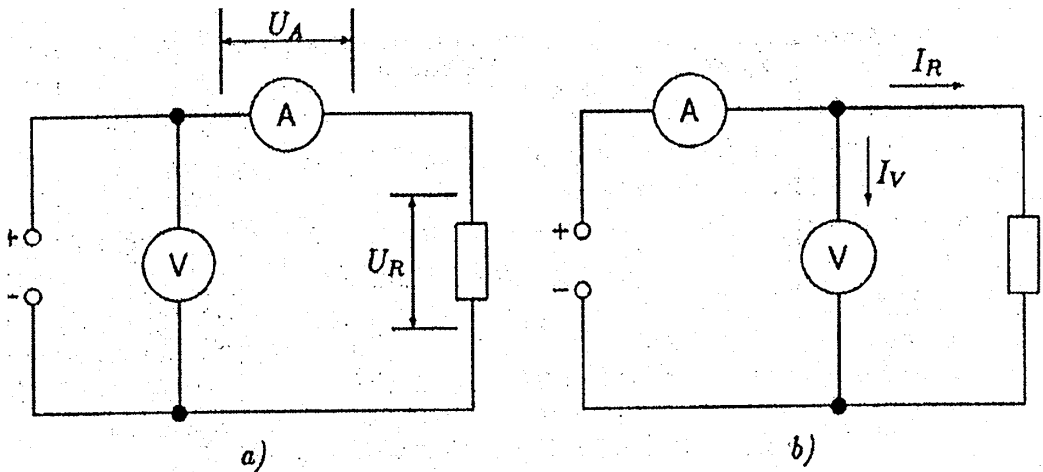
Ampérmetr má rozsah 120 mA a třídu přesnosti 1. Ručička ukazuje proud 76 mA. Určete chybu měřeného proudu a vyjádřete ji relativně i absolutně.

**Řešení:**

Z definice třídy přesnosti dostaneme absolutní chybu proudu:

$$\Delta_I = 120 \cdot \frac{1}{100} = 1,2 \text{ mA. Výsledek je } I = (76 \pm 1) \text{ mA popř.: } I = (76,0 \pm 1,2) \text{ mA a relativní chyba } r_I = 1,6\%.$$

Z výše uvedeného vyplývá, že je vhodné volit takový měřicí rozsah, aby se měřená hodnota co nejvíce blížila hodnotě měřicího rozsahu. V tomto případě je relativní chyba měření minimální.



Obr. 30: Dvě varianty zapojení voltmetru a ampérmetru

U digitálních měřicích přístrojů je výpočet chyby složitější a postup výpočtu musíme najít v dokumentaci přístroje. Většinou se chyba vypočítává jako část z měřicího rozsahu a jako část z měřené hodnoty. Pro označení měřicího rozsahu najdeme v dokumentaci různé označení např. MHMR - maximální hodnota měřicího rozsahu, Full Scale - z angličtiny někdy zkracováno jako FS. U přístrojů, které automaticky přepínají rozsahy, je nutné zjistit pravidlo, podle kterého probíhá volba rozsahu, a z čtené hodnoty zpětně odvodit momentálně použitý měřicí rozsah. Pro označení měřené hodnoty se používají označení např. MH - měřená hodnota, č.h. - čtená hodnota, Reading - z angličtiny někdy zkracováno RD. Ve výpočtech chyb se také někdy používá výrazu *digit* (zkracováno *dig.*), který představuje minimální hodnotu, kterou je možné přečíst na displeji. Například výraz *2 dig.* znamená dvojnásobek této hodnoty.

Z měřicího principu ručkových přístrojů je zřejmé, že musíme uvažovat jejich vliv na měřený obvod. Ampérmetrem protéká měřený proud a na jeho svorkách vzniká úbytek napětí. Voltmetrem také protéká proud, který je dán odporem měřicí cívky a měřeným napětím. V obvodech střídavého proudu musíme uvážit (zvláště u vysokých frekvencí) indukčnosti cívek měřicích systémů. Vnitřní odpor běžných analogových voltmetrů bývá v rozsahu desítek až stovek  $k\Omega$ . Vnitřní odpor digitálních voltmetrů bývá většinou v řádu desítek  $M\Omega$ .

Vliv měřicích přístrojů si můžeme dokumentovat na případu měření odporu metodou přímou. Ampérmetr a voltmetr můžeme zapojit dvěma různými způsoby (viz obr.30). Odpor měřeného rezistoru je dán velikostí úbytku napětí  $U_R$  a protékajícího proudu  $I_R$ . V případě a) nám ampérmetr ukazuje hodnotu proudu protékajícího rezistorem, ale voltmetr ukazuje součet hodnot  $U_R$  a  $U_A$ , kde  $U_A$  je úbytek napětí na ampérmetru. Úbytek napětí  $U_A$  je dán vnitřním odporem ampérmetru  $R_A$ , tj.  $U_A = R_A I$ . Hodnotu odporu pak můžeme vypočítat jako

$$R = \frac{U}{I} - R_A,$$

kde  $U$  a  $I$  jsou hodnoty čtené na přístrojích. V zapojení podle obr.30b) ampérmetrem naměříme součet proudů protékajících rezistorem a voltmetrem  $I = I_R + I_V$ . Proud protékající voltmetrem je dán jeho vnitřním odporem  $R_V$ , tj.  $I_V = U/R_V$ . Hodnota odporu měřeného rezistoru je pak

$$R = \frac{U}{I - U/R_V}$$

Pokud provedeme výše uvedené opravy na vliv měřicích přístrojů, mohlo by být jedno, které zapojení pro měření použijeme. Hodnoty  $R_A$  a  $R_V$  jsou však také stanoveny s jistou chybou, a proto je vhodné využít takové zapojení, kde se vliv této chyby projeví nejméně. V případě, kdy hodnota podílu  $U$  a  $I$  v zapojení a) je srovnatelná s  $R_A$ , odečítáme od sebe dvě srovnatelně velká čísla, jejich rozdíl je tedy malé číslo. Jejich chyby se sčítají dle zákona přenosu chyb, a proto dostaneme výsledek s velkou relativní chybou. Proto zapojení a) je vhodné využívat v situacích, kdy  $R \gg R_A$ , tj. pro velké hodnoty odporu, a zapojení b) pro  $R \ll R_V$ , tj. malé hodnoty odporu.

### **Příklad B.3**

V návodu multimetru je uvedeno, že chyba měřeného napětí je 100ppm MH + 20ppm MHMR. Určete chybu měřeného napětí, naměříme-li na rozsahu 150 V napětí 130,842 V.

**Řešení:**

MH=130,842 V, MHMR=150 V, ppm označuje  $10^{-6}$  (part per million), chyba je dána vztahem:  $\Delta U = 100 \cdot 10^{-6} \cdot 130,842 + 20 \cdot 10^{-6} \cdot 150 = 0,016$  V

$$U = (130,842 \pm 0,016) \text{ V}$$

### **Příklad B.4**

V manuálu multimetru je uvedeno, že na rozsahu 4 V je chyba měření 0,3% č.h. + 1 dig. Určete chybu měřeného napětí, jestliže přístroj ukazuje hodnotu 2,982 V.

**Řešení:**

MH=2,982 V a 1 dig=0,001; chyba je  $\Delta U = \frac{0,3}{100} \cdot 2,982 + 0,001 = 0,0099$  V

$$U = (2,98 \pm 0,01) \text{ V}$$

### **Příklad B.5**

Měřicí přístroj ukazuje hodnotu indukčnosti  $L = 22,68 \mu\text{H}$ . V manuálu je uvedeno, že chyba měření je: 0,1% + 2 dig. Určete chybu naměřené hodnoty a запиšte výsledek měření.



**Řešení:**

MH=22,68  $\mu$ H a 1 dig=0,01, chyba je  $\Delta_L = \frac{0,1}{100} \cdot 22,68 + 0,02 = 0,04 \mu\text{H}$

$$L = (22,68 \pm 0,04) \mu\text{H}.$$

### Příklad B.6

V návodu multimetru je uvedeno, že chyba měřeného napětí je  
0,05% of Reading + 0,02% Full Scale.

Naměříme-li na rozsahu 40 V napětí 21,48 V, určete chybu měřeného napětí.

**Řešení:**

Reading=21,48 V, Full Scale=40 V

$$\Delta_U = \frac{0,05}{100} \cdot 21,48 + \frac{0,02}{100} \cdot 40 = 0,0187 \text{ V}$$

$$U = (21,48 \pm 0,02) \text{ V}.$$

### Příklad B.7

Ampérmetrem s třídou přesnosti 0,5 je měřen proud protékající odporovou zátěží. Voltmetrem je měřen úbytek napětí na této zátěži. Pro chybu napětí platí:

$$60\text{ppm MH} + 30\text{ppm MHMR}.$$

Byly naměřeny hodnoty  $I = 0,825 \text{ A}$  na rozsahu 1,2 A a  $U = 86,328 \text{ V}$  na rozsahu 100 V. Určete hodnotu odporu zátěže ( $R = \frac{U}{I}$ ) a velikost výkonu uvolňovaného na zátěži ( $P = UI$ ). Pro obě veličiny stanovte chybu vypočítaných hodnot. Vliv měřicích přístrojů na zátěž zanedbejte.

**Řešení:**

Pracujeme zde s mezními chybami, které byly určeny z parametrů přístrojů, jejich odpovídající počet stupňů volnosti považujeme za nekonečně velký, a proto lze zákon přenosu chyb uplatnit přímo na mezní chyby:

$$\Delta_R = \sqrt{\frac{1}{I^2} \Delta_U^2 + \frac{U^2}{I^4} \Delta_I^2}.$$

Z definice třídy přesnosti dostaneme absolutní chybu proudu:

$$\Delta_I = 1,2 \cdot \frac{0,5}{100} = 0,006 \text{ A}.$$

Chyba napětí: MH=86,328 V, MHMR=100 V

$$\Delta_U = 60 \cdot 10^{-6} \cdot 86,328 + 30 \cdot 10^{-6} \cdot 100 = 0,0082 \text{ V}$$

Dosazením:  $R = 104,64 \Omega$ ,  $\Delta_R = 0,76 \Omega$ ,

$$R = (104,64 \pm 0,76) \Omega.$$

Pro chybu výkonu platí podobně podle zákona přenosu chyb:

$$\Delta_P = \sqrt{I^2 \Delta_U^2 + U^2 \Delta_I^2}.$$

Dosazením:  $P = 71,2206 \text{ W}$ ,  $\Delta_P = 0,52 \text{ W}$ ,

$$P = (71,22 \pm 0,52) \text{ W}.$$

# Dodatek C

## Studentovy koeficienty

počet stupňů volnosti  $n = N - 1$ , kde  $N$  je počet měření

$n$	hladina spolehlivosti				
	0,5000	0,6827	0,9000	0,9545	0,9973
1	1,000	1,837	6,314	13,96	235,8
2	0,817	1,321	2,920	4,526	19,21
3	0,765	1,197	2,353	3,307	9,219
4	0,741	1,141	2,132	2,869	6,620
⑤	0,727	1,110	2,015	2,649	5,507
6	0,718	1,091	1,943	2,516	4,904
7	0,711	1,077	1,895	2,429	4,530
8	0,706	1,067	1,860	2,366	4,277
9	0,703	1,059	1,833	2,320	4,094
10	0,700	1,053	1,812	2,284	3,957
11	0,697	1,048	1,796	2,255	3,850
12	0,695	1,043	1,782	2,231	3,764
13	0,693	1,040	1,771	2,212	3,694
14	0,692	1,037	1,761	2,195	3,636
15	0,691	1,034	1,753	2,182	3,586
16	0,690	1,032	1,746	2,169	3,544
17	0,689	1,030	1,740	2,158	3,508
18	0,688	1,028	1,734	2,149	3,475
19	0,688	1,027	1,729	2,141	3,447
20	0,687	1,026	1,725	2,133	3,422
25	0,684	1,021	1,708	2,105	3,329
30	0,683	1,017	1,697	2,087	3,270
40	0,681	1,013	1,684	2,064	3,199
50	0,679	1,010	1,676	2,051	3,157
70	0,678	1,007	1,667	2,036	3,111
100	0,677	1,005	1,660	2,025	3,077
200	0,676	1,003	1,653	2,013	3,040
$\infty$	0,675	1,000	1,645	2,000	3,000

## Literatura

- [1] ČSN ISO 31 Část 0 - 13, Český normalizační institut, Praha 1994.
- [2] Celý J.: Programové moduly pro fyzikální výpočty, UJEP Brno 1985.
- [3] Meloun M., Militký J.: Statistické zpracování experimentálních dat, PLUS Praha 1994.
- [4] Hátle J., Kahounová J.: Úvod do teorie pravděpodobnosti, SNTL/ALFA Praha 1987.
- [5] Humlíček J.: Statistické zpracování výsledků měření, UJEP Brno 1984.
- [6] Horák Z.: Praktická fyzika, SNTL Praha 1958.
- [7] Rektorys K. a kol.: Přehled užití matematiky, SNTL Praha 1963.
- [8] ISO/TAG4/WG3, Guide to the expression of uncertainty in measurement, ISO, Geneve, 1993.
- [9] Brož J. a kol.: Základy fyzikálních měření (I), SPN Praha 1983.