Variační počet a jeho aplikace F4260

Základní informace:

- domácí úkoly
  - nepovinné př. pro vás (1. hod / týden)
  - povinné 1př před -nést na cvičení.
- ukončení kolokvium
  1 složitý příklad
  dle domluvy

Literatura:

- Gelfand, Fomin Calculus of variations
- Tycovi skripta a cvičení z teor. mech.
- Krupková, Swaczyna Variační počet

online na:

https://www.physics.muni.cz/~janam/download/O-Krupkova-var-pocet.pdf

I. Cvičení - Eulerova metoda

- podmínka stacionárních bodů funkcionálu

$$I[y] = \int_a^b dx\, L\left(x, y(x), \frac{dy(x)}{dx}\right); \quad \begin{matrix} y(a) = A \\ y(b) = B \end{matrix}$$

$$\Downarrow \; ??$$

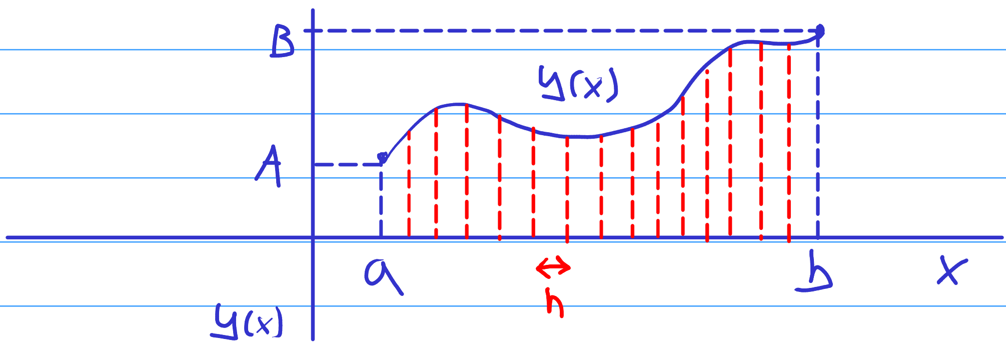
$$\frac{\partial L\left(x, y(x), \frac{dy(x)}{dx}\right)}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L\left(x, y(x), \frac{dy(x)}{dx}\right)}{\partial z} = 0$$

?

L je funkce 3 proměnných $L = L(x, y(x), y'(x))$

$z = y'(x)$ třetí proměnná (pouze jiný zápis)

$y(x)$ - křivka



- rozdělíme interval (a, b) na $n+1$ dílků, intervaly zvolíme stejně dlouhé $h = \frac{b-a}{n+1}$

- $(a, b) \to \{x_0, \ldots, x_n\}$

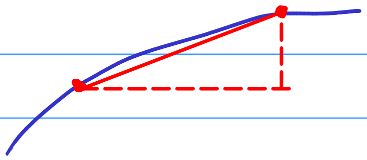
$x_0 = a$

$x_1 = a + h$

$x_2 = a + 2h$

$x_n = b$

Jak nám to pomůže? $L\left(x, y(x), \frac{dy}{dx}\right)$



$x \to \{x_k\}_{k=0}^{n}$

$y(x) \to \{y(x_k)\}_{k=0}^{n}$

$\frac{dy(x)}{dx} \to \frac{y_{k+1}-y_k}{h}$

→ aproximace funkcionálu

$$I_n(y_1,\dots,y_n) = \sum_{k=0}^{n} h L\left(a+kh, y_k, \frac{y_{k+1}-y_k}{h}\right)$$

Už není funkcionál ale funkce n-proměnných

→ můžeme najít minimum

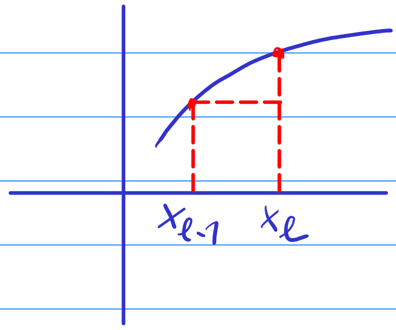
$$\frac{\partial I_n}{\partial y_l} = \sum_{k=0}^{n} h \Bigg[\frac{\partial L\left(a+kh, y_k, \frac{y_{k+1}-y_k}{h}\right)}{\partial y} \delta_{kl} + \frac{\partial L\left(a+kh, y_k, \frac{y_{k+1}-y_k}{h}\right)}{\partial z} \frac{1}{h} \delta_{(k+1)l} - \frac{\partial L\left(a+kh, y_k, \frac{y_{k+1}-y_k}{h}\right)}{\partial z} \cdot \frac{1}{h} \delta_{kl} \Bigg],$$

δ a $\sum$ se vyruší jak?

$$= \left[\frac{\partial L\left(a+lh, y_l, \frac{y_{l+1}-y_l}{h}\right)}{\partial y} + \frac{\partial L\left(a+(l-1)h, y_{l-1}, \frac{y_l-y_{l-1}}{h}\right)}{h\,\partial z} - \frac{\partial L\left(a+lh, y_l, \frac{y_{l+1}-y_l}{h}\right)}{h\,\partial z} \right] h$$

najdeme derivaci $\dfrac{\partial L\left(a+\ell h, y_\ell, \frac{y_{\ell+1}-y_\ell}{h}\right)}{h\,\partial z} -$

$$- \frac{\partial L\left(a+(\ell-1)h, y_{\ell-1}, \frac{y_\ell - y_{\ell-1}}{h}\right)}{h\,\partial z}$$



• proto abychom opravdu měli derivaci potřebujeme aby $h \to 0$ tedy vzít limitu $h \to \infty$

$$\lim_{h\to\infty} \frac{1}{h}\frac{\partial I_n}{\partial y_\ell} = \frac{\partial L(x, y, \frac{dy}{dx})}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left[\frac{\partial L(x, y, \frac{dy}{dx})}{\partial z}\right] = 0$$

Příklad: Volný pád (nepovinný DÚ)

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 - m g y$$

$$I[y] \to I_m[y_k] = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{2} m \left(\frac{y_{k+1}-y_k}{h}\right)^2 - m g y_k$$

rovnice: $\dfrac{\partial I_m}{\partial y_\ell} = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} \left[m \frac{1}{h^2}(y_{k+1} - y_k)\cdot(\delta_{k+1\,\ell} - \delta_{k\ell})\right.$

$\left. - m g \delta_{k\ell}\right]$; použijeme δ na odstranění Σ

$$= m\left(\frac{y_e - y_{e+1} - y_{e-1} + y_e}{h^2}\right) - mg$$

$$= -m\left(\frac{\overbrace{\left(\frac{y_{e+1}-y_e}{h}\right)}^{y'_e} - \overbrace{\left(\frac{y_e - y_{e-1}}{h}\right)}^{y'_{e-1}}}{h}\right) - mg$$

$\Rightarrow$ limitní procedura $h \to 0$

$$\Rightarrow \underline{\underline{-my'' - mg = 0}}$$