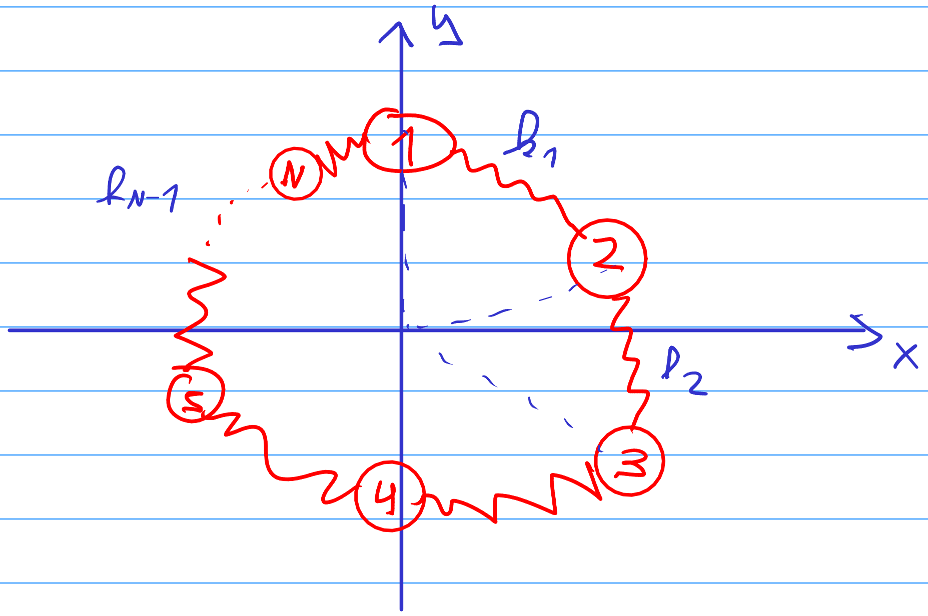
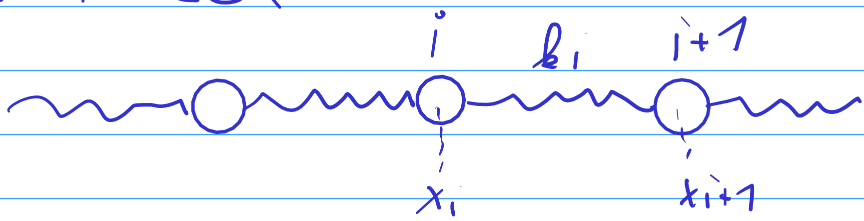
Soustava N harmonických oscilátorů



Známe 1D řetízek



$$T = \frac{1}{2}\sum m_i \dot{x}_i^2, \quad V = \frac{1}{2}\sum k_i (x_{i+1} - x_i)^2$$

Zde v našem případě zvolíme souřadnice

1 $\quad (x_1, y_1) \rightarrow U_1 = (x_1, y_1)$

2 $\quad (x_2, y_2) \rightarrow U_2 = (x_2, y_2)$

$\vdots$

i $\quad (x_i, y_i) \rightarrow U_i = (x_i, y_i)$

$\vdots$

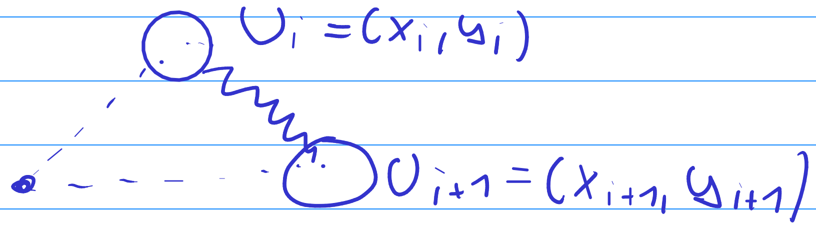
N $\quad (x_N, y_N) \rightarrow U_N = (x_N, y_N)$

$\Downarrow$

vektor $(U_1, \dots, U_N)$

Celková $\quad T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{U}_i^2$

$$V = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} k_i(\Delta l_i)^2$$ ↪ jak zapsat pomocí U_i



$$\Delta l_i = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}$$

$$= \sqrt{(U_{i+1} - U_i)^2} \quad \text{(formální zápis)}$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{U}_i^2$$

$$V = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N-1} k_i (U_{i+1} - U_i)^2 + \frac{1}{2} k_N (U_N - U_1)^2$$

lze zapsat pomocí matic a vektoru $\vec{U}$

$$T = \frac{1}{2}\dot{U}^T M \dot{U}$$

$$= \frac{1}{2}(\dot{U}_1 \cdots \dot{U}_N)\begin{pmatrix} m_1 & & & \\ & m_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & m_N \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ \vdots \\ \dot{U}_N \end{pmatrix}$$

$$V = \frac{1}{2}U^T K U = \frac{1}{2}(U_1 \cdots U_N)\begin{pmatrix} k_1 + k_N & -k_1 & \cdots & -k_N \\ -k_1 & k_2 + k_3 & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ -k_N & & \cdots & k_{N-1} + k_N \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_N \end{pmatrix}$$

abychom mohli něco spočítat vezmeme

$m_i = m \ \forall i, \ k_i = k \ \forall i$

$$\Rightarrow M = m \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \ 1 \end{pmatrix}, \quad K = k \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & -1 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Verze dobrá pro počítání (použití Einsteinovy sumační symboliky)

$$L = \frac{1}{2} \dot{u}_i M^i_j \dot{u}^j - \frac{1}{2} u_i K^i_j u^j$$

EL-rce:
$$\frac{\partial L}{\partial u_k} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_k}$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_k} = -\frac{1}{2} \delta_{ik} K^i_j - \frac{1}{2} u_i K^i_j \delta^j_k$$

$$= -\frac{1}{2} K^k_j u^j - \frac{1}{2} u_i K^i_k = -Ku$$

protože K je symetrická matice

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_k} = \ddot{u} M$$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad M\ddot{u} = -Ku$$

$$m\mathbb{1}\,\ddot{u} = -k\begin{pmatrix} 2 & -1 & & -1 \\ -1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ -1 & & & \end{pmatrix}u$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$\ddot{u} = -\omega^2 A u \qquad (*)$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ -1 & & & 2 \end{pmatrix}$$

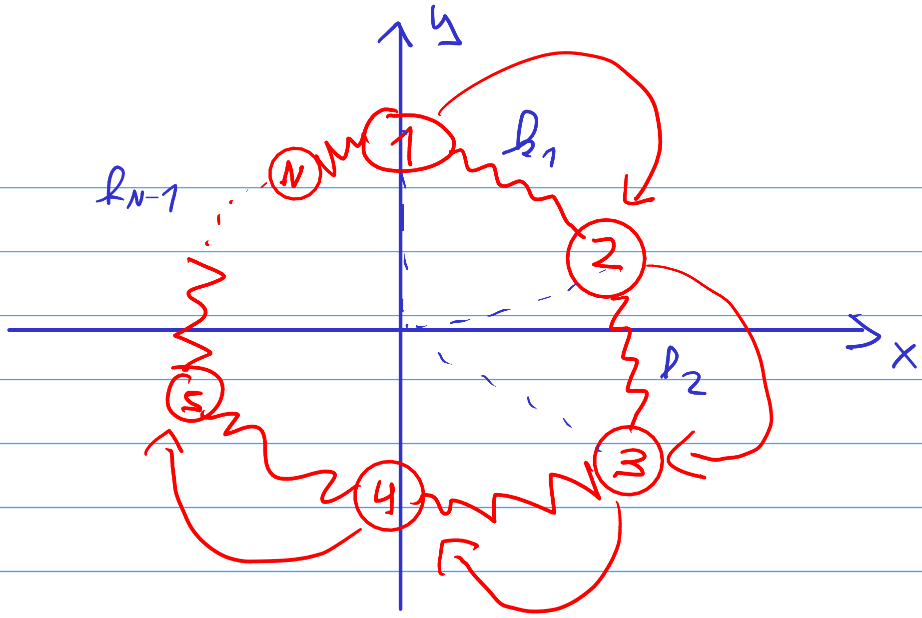
rovnice typu $(*)$ se řeší pomocí vl. vektorů a vl. hodnot $\Rightarrow$ diagonalizace

řešení tvaru $x = \sum c_i e^{-\omega^2 \lambda_i t}$

$\Rightarrow$ jak najít vl. hodnoty λ_i matice A?

využijeme symetrii problému popsanou maticí S, pro kterou platí $AS = SA$ $\Rightarrow$ stačí zjistit vl. hodnoty matice S, což bude jednodušší a pak dopočítáme λ_i.

1) co je ta symetrie? = Pořadí oscilátorů!



1 → 2
2 → 3
⋮
N → 1

změní $\vec{U}$ ale fyzikálně popisuje stejnou soustavu/problém

co se týče proměnných

$$U = \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_N \end{pmatrix} \longrightarrow \tilde{U} = \begin{pmatrix} U_2 \\ U_3 \\ \vdots \\ U_N \\ U_1 \end{pmatrix}$$ lze zapsat

pomocí matice

$$\tilde{U} = SU \quad \text{kde}$$

$$\begin{pmatrix} U_2 \\ U_3 \\ \vdots \\ U_N \\ U_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_N \end{pmatrix}$$

Pozn. transpozice toho co bylo na cvičení ale nic podstatného se nemění.

Co znamená symetrie?

změníme $u \to \hat{u}$ ale fyzika zůstane stejná

"Fyzika" $\approx$ pohybové rovnice

$$-\omega^2 A u = \ddot{u} \quad / \; S$$

$$-\omega^2 S A u = \ddot{\tilde{u}}$$

chceme aby toto bylo : $-\omega^2 A \hat{u} = \ddot{\tilde{u}}$

což platí $\Leftrightarrow$ $SA = AS$ (toto lze snadno ověřit že platí)

"Věta": platí-li $SA = AS$ pak matice S, A mají stejnou sadu vl. vektorů

Pozn: když (λ_i jsou 1-násobné) důkaz je jednoduchý ale pro λ vícenásobné je věta komplikovanější.

důkaz: vl. hodnoty a vektory matice A:

u, λ : $Au = \lambda u$

vl. hodnoty a vektory matice S:

v, λ' : $Sv = \lambda' v$

vezmeme $Au = \lambda u$

$ASu = ?$ použijeme $AS = SA$

$A Su = SAu = S\lambda u = \lambda Su \Rightarrow$

Su je také vl. vektor matice A s vl. hodnotou λ, ale je-li λ 1-násobná pak prostor vl. vektorů k ní odpovídající je také 1 dim $\Rightarrow$ Su je násobek u pro nějaké $c \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow Su = cu \Rightarrow u$ je také vl. vektor S.

$\Rightarrow$ Plán řešení je najít vl. hodnoty matice $S \rightarrow$ $\rightarrow$ najít vl. vektory S = vl. vektory $A \rightarrow$ vl. hodnoty A

1) vl. hodnoty S:

z geometrie zadání víme, že

$$S^N = 1 \Rightarrow Su = \lambda u \rightarrow S^N u = \lambda^N u$$
$$1 u = \lambda^N u$$

$\Rightarrow \lambda^N = 1$, alternativní výpočet: řešení rce

$$\det(S - \lambda 1) = 0$$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & & \\ & -\lambda & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 1 & & & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \underbrace{\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & & \\ & -\lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & -\lambda \end{vmatrix}}_{\text{označme } D_{N-1}} + 1 \cdot (-1)^{N+1} \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & & & \\ -\lambda & 1 & & \\ & -\lambda & \ddots & \\ & & & -\lambda\ 1 \end{vmatrix}}_{\text{označme } S_{N-1}}$$

rozvoj podle sloupce

rozvoj

$$D_{N-1} = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & & \\ & -\lambda & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda D_{N-2} = \dots = -\lambda^{N-3} D_2$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^2$$

$$\Rightarrow D_{N-1} = (-\lambda)^{N-1}$$

rozvoj

$$S_{N-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ -\lambda & 1 & & \\ & -\lambda & \ddots & \\ & & -\lambda & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot S_{N-2} = S_2$$

$$S_2 = \begin{vmatrix} 1 & \\ -\lambda & 1 \end{vmatrix} = 1$$

rozvoj

$$\Rightarrow \det(S - \lambda \mathbb{1}) = (-\lambda)^N + (-1)^{N+1}$$

$$= (-1)^N (\lambda^N - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\lambda^N = 1}}$$

$\rightarrow$ řešení $\lambda_k = e^{2\pi i \frac{k}{N}}$, $1 \leq k \leq N$

2) vl. vektory S

$$S u_k = \lambda_k u_k$$

Pozor máme tu 2 indexy: k čísluje různé vl. vektory příslušné λ_k, ale každé u_k je vektor $u_k = (u_k^1, u_k^2, \dots, u_k^N)$

vyřešíme vektorovou rovnici

$$S v_k = \lambda_k v_k$$

v indexech: $S^i{}_j \, v_k^j = \lambda_k v_k^i$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_k^1 \\ v_k^2 \\ \vdots \\ v_k^n \end{pmatrix} = e^{i\frac{2\pi k}{N}} \begin{pmatrix} v_k^1 \\ v_k^2 \\ \vdots \\ v_k^n \end{pmatrix}$$

=> soustava rovnic pro komponenty v_k^i

$$v_k^2 = e^{i\frac{2\pi k}{N}} v_1$$

$$v_k^3 = e^{i\frac{2\pi k}{N}} v_2$$

$$\vdots$$

$$v_k^N = e^{i\frac{2\pi k}{N}} v_k^{N-1}$$

$$v_k^1 = e^{i\frac{2\pi k}{N}} v_k^N$$

toto lze až na konstantní násobek vyřešit vektorem

$$v_k = \left(1, \left(e^{i\frac{2\pi k}{N}}\right)^1, \left(e^{i\frac{2\pi k}{N}}\right)^2, \ldots, \left(e^{i\frac{2\pi k}{N}}\right)^{N-1}\right)$$

toto jsou vlastní vektory matice S a tedy i matice soustavy rovnic A

jako poslední krok zbývá dopočítat vl. hodnoty matice A.

vyřešíme rovnice: $A\vec{v}_k = \lambda_k \vec{v}_k$

ale hledáme pouze hodnoty λ_k toto je N-rovnic $\Rightarrow$ stačí nám 1 rovnice (pro každé k)

vezmeme první komponentu

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \ddots & & \\ -1 & & & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_k^1 \\ \vdots \\ v_k^N \end{pmatrix} = \lambda_k \begin{pmatrix} v_k^1 \\ \vdots \\ v_k^N \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{2v_k^1} - \underline{v_k^2} - \underline{v_k^N} = \underline{\lambda_k}\, \underline{v_k^1}$$

známe   neznáme

$$2 \cdot 1 - e^{\frac{i2\pi k}{N}} - \left(e^{\frac{i2\pi k}{N}}\right)^{N-1} = \lambda_k \cdot 1$$

$$2 - \left(\cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right) + \underline{i\sin\left(\frac{2\pi k}{N}\right)}\right) - e^{i\left(2\pi k - \frac{2\pi k}{N}\right)} = \lambda_k$$

$$e^{i\left(2\pi k - \frac{2\pi k}{N}\right)} = 1 \cdot e^{-i\frac{2\pi k}{N}}$$

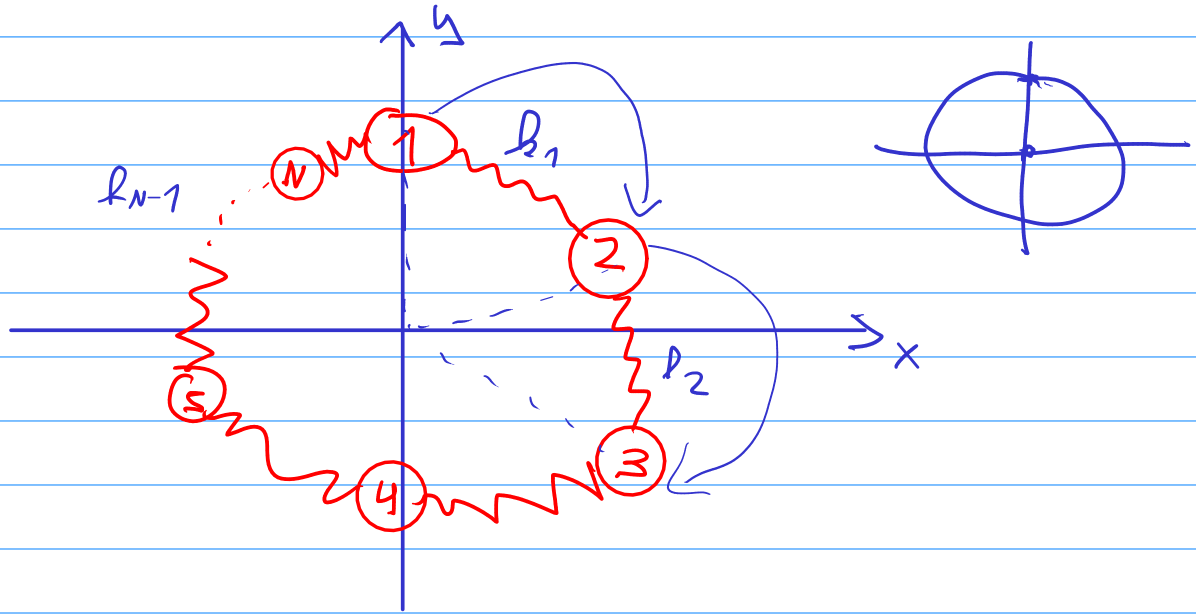
odečtou se

$$= \left(\cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right) - \underline{i\sin\left(\frac{2\pi k}{N}\right)}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\lambda_k = 2\left(1 - \cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right)\right)}}$$

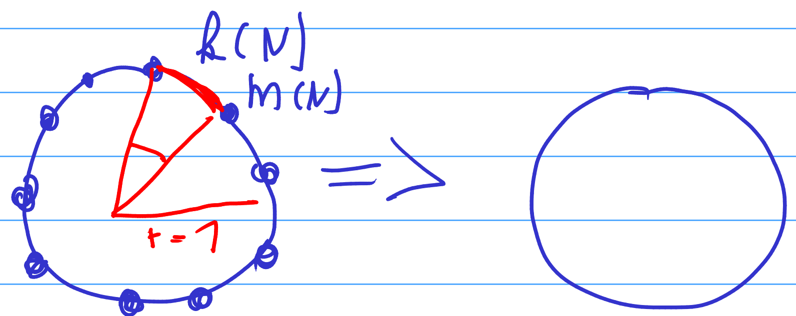
řešení soustavy je $u = \sum c_k e^{-w^2 \lambda_k t}$

Cvičení 10 limita pro $N \to \infty$



$\vec{u} = (u_1, \ldots, u_N)$

$$L = \frac{1}{2} \dot{u}_i M^i_j \dot{u}^j - \frac{1}{2} u_i K^i_j u^j$$



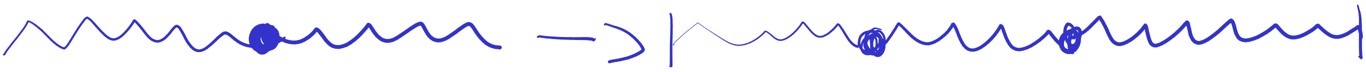
$\Delta l = r \Delta \varphi$

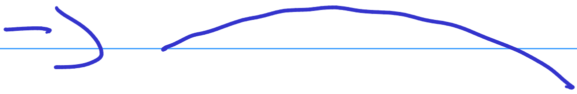
$$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m \dot{u}_i^2 \rightsquigarrow \sum_{i=1}^{N} \tau \, \Delta l$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} \frac{m}{\Delta l} \dot{u}_i^2 \, \Delta l \qquad \Delta l = \Delta \varphi = \frac{2\pi}{N}$$

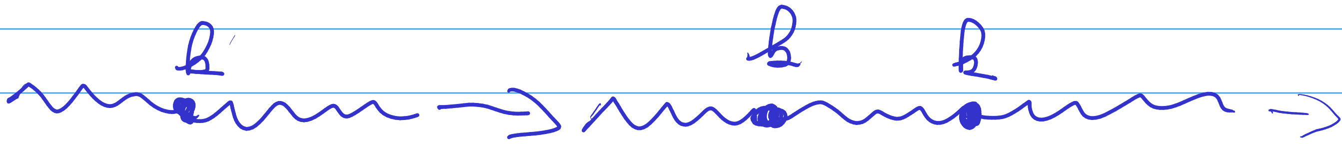
$\rho = \text{konst}$

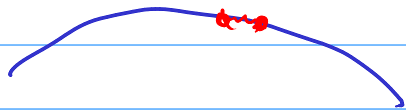
$$m = \frac{M}{N} = \frac{\rho 2\pi}{N}$$





$$V=\sum_{\text{„kružnice"}} \frac{1}{2} k (U_{i+1}-U_i)^2 = \cancel{\sum \frac{1}{2} \frac{k}{\Delta l}(U_{i+1}-U_i)^2 \Delta l}$$





$$= \sum \frac{1}{2} \underbrace{k\Delta l}_{\varkappa = \text{konst}} \left(\frac{U_{i+1}-U_i}{\Delta l}\right)^2 \Delta l$$

$$F_{i+1,i} = k(h_{i+1}-h_i)$$

$$= \underbrace{Y}_{\text{Youngův modul pružnosti}} \frac{h_{i+1}-h_i}{\Delta l}$$

$$Y = k\Delta l$$

$$L_N = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \rho \dot{U}^2(t,\varphi_i)\Delta\varphi - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \varkappa($$

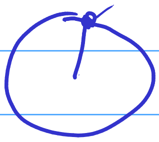
$$U(t,\varphi_i) = U_i(t)$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \varkappa\left(\frac{U(t,\varphi_{i+1})-U(t,\varphi_i)}{\Delta\varphi}\right)^2 \Delta\varphi$$

Lim $N \to \infty$

$$L=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\rho\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2-\varkappa\left(\frac{\partial U}{\partial \varphi}\right)^2\right)d\varphi$$

$$\vec{U}^T A \vec{U} \qquad A \to \frac{\partial}{\partial \varphi}$$



$$U = U(t,\varphi)$$

$$\vec{U} = (U_1(t), \dots, U_N(t))$$

EL

$$\frac{\partial L}{\partial U} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial U_t} - \frac{\partial}{\partial \varphi}\frac{\partial L}{\partial U_\varphi} = 0$$

$$U_{tt} = \frac{\varkappa}{\rho} U_{\varphi\varphi}$$

$$U_{tt} = v^2 U_{\varphi\varphi} \qquad v = \sqrt{\frac{\varkappa}{\rho}}$$

$$S = \iint \frac{1}{2}\left(\rho U_t^2 - \varkappa U_\varphi^2\right) dt\, d\varphi$$

$U \to AU$

$t \to B t$ tak aby $\rho = \varkappa = 1$

$$S = \iint \frac{1}{2}\left(\rho \frac{A^2}{B^2} U_t^2 - \varkappa A^2 U_\varphi^2\right) B\, dt\, d\varphi$$

$$\int \frac{A^2}{B^2} \cdot B = 1$$

$$\mathcal{H} A^2 B = 1$$

$$\vdots$$

$$A = (\mathcal{H} \rho)^{-\frac{1}{4}}$$

$$B = \sqrt{\frac{\rho}{\mathcal{H}}}$$

$$S = \frac{1}{2} \iint (v_t^2 - v_\varphi^2)\, dt\, d\varphi$$

$$t \to t + \varepsilon \xi_t$$

$$\varphi \to \varphi + \varepsilon \xi_\varphi$$

$$v \to v + \varepsilon \xi_v$$

$t \to t + \varepsilon$ symetrie

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

$$-\mathcal{H} = L\, d\varphi - \frac{\partial L}{\partial v_t} v_t\, dt$$

$$- \frac{\partial L}{\partial v_\varphi} v_\varphi\, d\varphi$$

$$\varphi \to \varphi + \varepsilon$$

(t, φ)

$$t \to t + \varepsilon \cdot \varphi$$
$$\varphi \to \varphi + \varepsilon t$$

$$\cancel{\frac{\partial L}{\partial t}} \cdot \varphi + \cancel{\frac{\partial L}{\partial \varphi}} \cdot t + \left(L \cancel{\frac{\partial \varphi}{\partial t}} + L \cancel{\frac{\partial t}{\partial \varphi}} \right.$$
$$- \frac{\partial L}{\partial v_t} v_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi} - \frac{\partial L}{\partial v_\varphi} v_t \frac{\partial t}{\partial t}$$

$$\frac{\partial L}{\partial v_t} \cdot v_\varphi + \frac{\partial L}{\partial v_\varphi} v_t = 0$$

$$v_t \cdot v_\varphi - v_\varphi \cdot v_t = 0$$