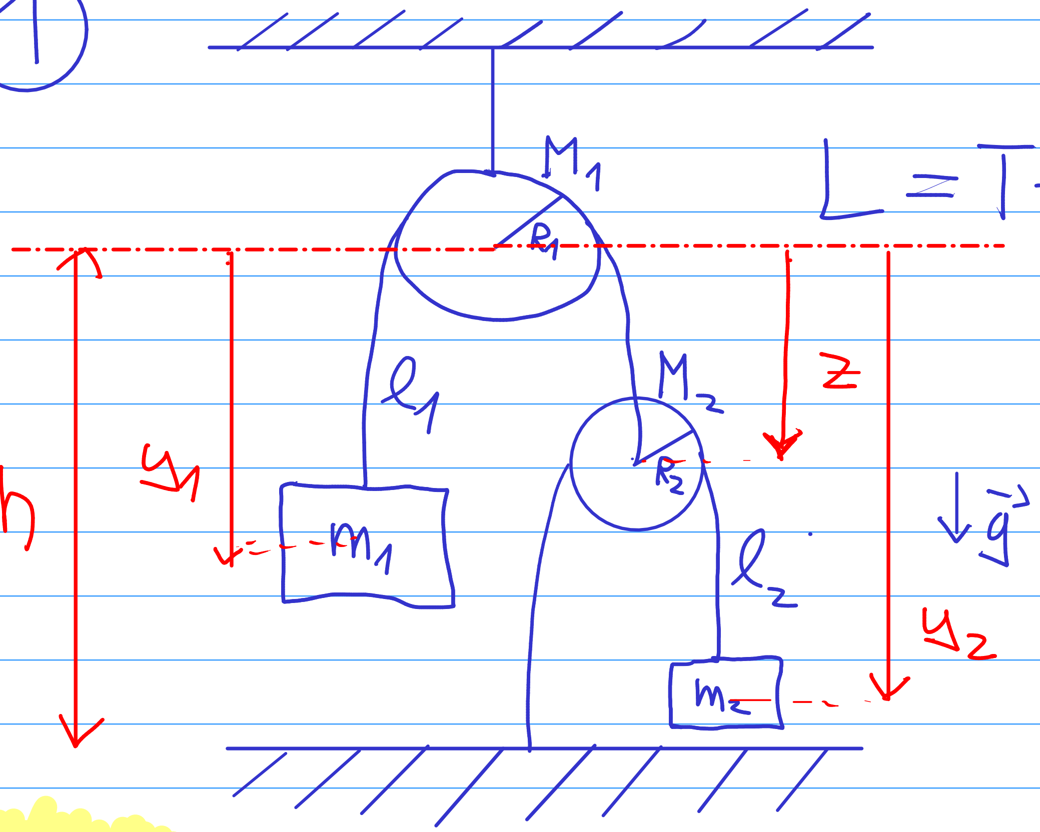
II. Cvičení – ukázkové příklady, kvadratické lagrangiány

①



Postup:
1) volba soustavy souřadnic
2) volba proměnných
3) podmínky vazby mezi proměnnými → → co jsou stupně volnosti?
4) sepsání celkové kinetické a potenciální energie

2) proměnné: $y_1(t), y_2(t), z(t)$

3) vazby:

$$l_1 = y_1 + \pi R_1 + z = \text{konst.}$$
$$l_2 = \pi R_2 + (y_2 - z) + h - z = \text{konst}$$

derivace →
$$\left.\begin{aligned} \dot{y}_1 + \dot{z} &= 0 \\ \dot{y}_2 - 2\dot{z} &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

3 prom. 2 podmínky

1. stupeň volnosti

můžeme si zvolit např y_1

4) $T = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} M_2 \dot{z}^2 + \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}_2^2$

a) kladka ~ homogení válec $\Rightarrow J = \frac{1}{2} M R^2$
bez prokluzování $\Rightarrow \omega_1 = \dot{y}_1 / R_1 , \omega_2 = \dot{y}_2 / R_2$

b) aplikujeme vazby $\Rightarrow \dot{z} = -\dot{y}_1$
$\dot{y}_2 = -2 \dot{y}_1$

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}_1^2 + \frac{1}{4} M_1 \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} M_2 \dot{y}_1^2 + M_2 \dot{y}_1^2 + 2 m_2 \dot{y}_1^2$$

$$V = -m_1 g y_1 - M_2 g z - m_2 g y_2$$

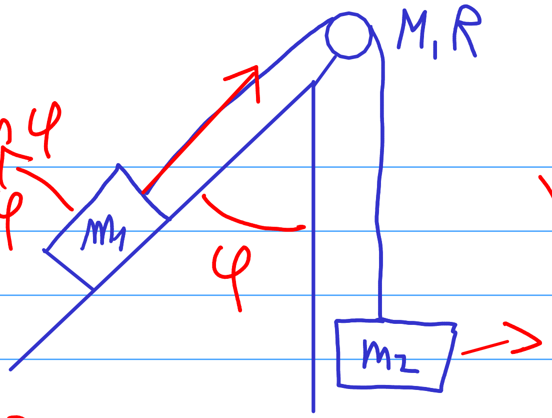
vazby $\rightarrow V = -m_1 g y_1 + M_2 g y_1 + 2 m_2 g y_2 + \underbrace{\text{konstanty}}_{\text{neovlivní rovnice}}$

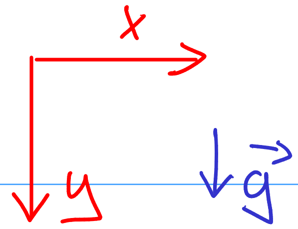
$\Rightarrow$ EL-rovnice: $\ddot{y}_1 = \dfrac{m_1 - M_2 - 2m_2}{m_1 + 4m_2 + \frac{1}{2} M_1 + 3 M_2} g$

②

$x_1 = -r\sin\varphi$

$y_1 = r\cos\varphi$





$x_2 = 0,\ y_2 = r_2$

volba souřadnic místo $(x, y) \rightarrow (r, \varphi)$
kde r je vzdálenost od kladky

3) vazby: $\ell = r_1 + r_2 = \text{konst}$

$\Rightarrow \dot{r}_1 + \dot{r}_2 = 0$ můžeme zvolit jedno univerzální $r = r_1 \Rightarrow r_2 = -r + c$

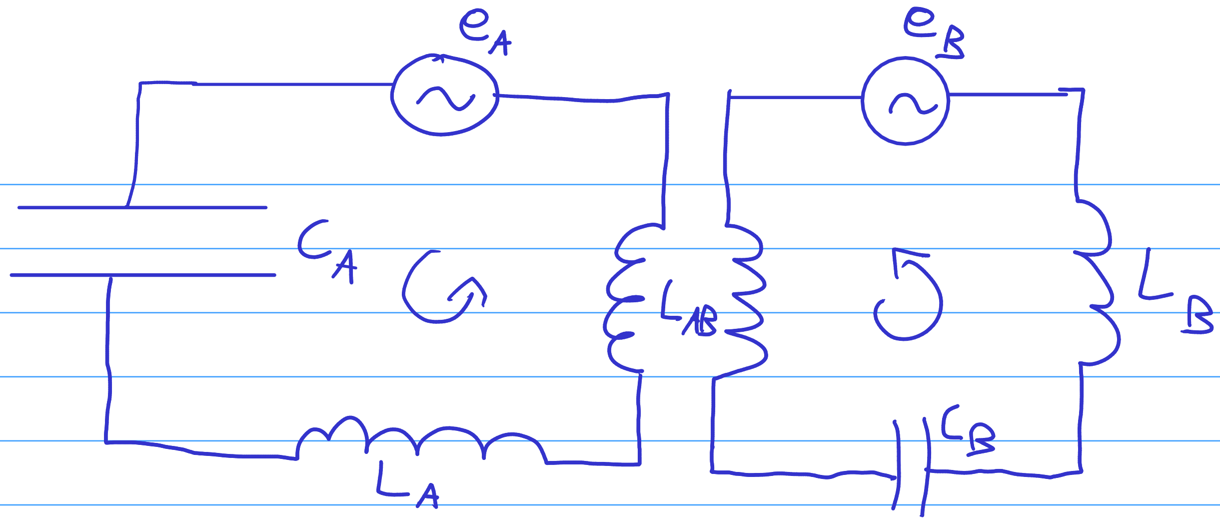
4) $T = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} J\omega^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}_2^2$

$\Rightarrow \quad = \frac{1}{2} m_1 \dot{r}^2 + \frac{1}{4} M \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{r}^2$

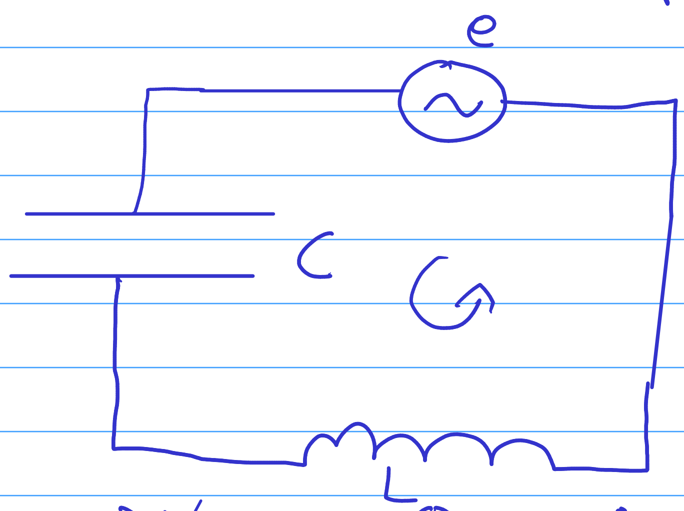
$V = -m_1 g y_1 - m_2 g y_2 = -m_1 g r \cos\varphi + m_2 g r$

$\Rightarrow$ rovnice $\ddot{r} = \dfrac{m_1 \cos\varphi - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2} M} g$

3



prvně se podíváme jak funguje 1 samotný LC obvod:



Proměnná:
náboj $Q(t)$
proud $I = -\dot{Q}$

→ 1. stupeň volnosti

rovnost napětí $e = \frac{Q}{C} + L\dot{I}$

$$e = \frac{Q}{C} + L\ddot{Q}$$

odpovídá Lagrangiánu $\mathcal{L} = \underbrace{\frac{1}{2}L\dot{Q}^2}_{\text{energie cívky}} - \underbrace{\frac{1}{2}\frac{Q}{C}}_{\text{energie kondenzátoru}}$

náš příklad jsou 2 spojené LC obvody

$$\mathcal{L}_A = \frac{1}{2}L_A\dot{Q}_A^2 - \frac{1}{2}\frac{Q_A^2}{C_A}$$

$$\mathcal{L}_B = \frac{1}{2}L_B\dot{Q}_B^2 - \frac{1}{2}\frac{Q_B^2}{C_B}$$

jsou spojeny vzájemnou indukčností

$$\mathcal{L}_{AB} = \frac{1}{2} L_{AB} \dot{Q}_A \dot{Q}_B \quad \Rightarrow \text{celkový obvod}$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} L_A \dot{Q}_A^2 - \frac{1}{2}\frac{Q_A^2}{C_A} + \frac{1}{2} L_B \dot{Q}_B^2 - \frac{1}{2}\frac{Q_B^2}{C_B} + \frac{1}{2} L_{AB} \dot{Q}_A \dot{Q}_B$$

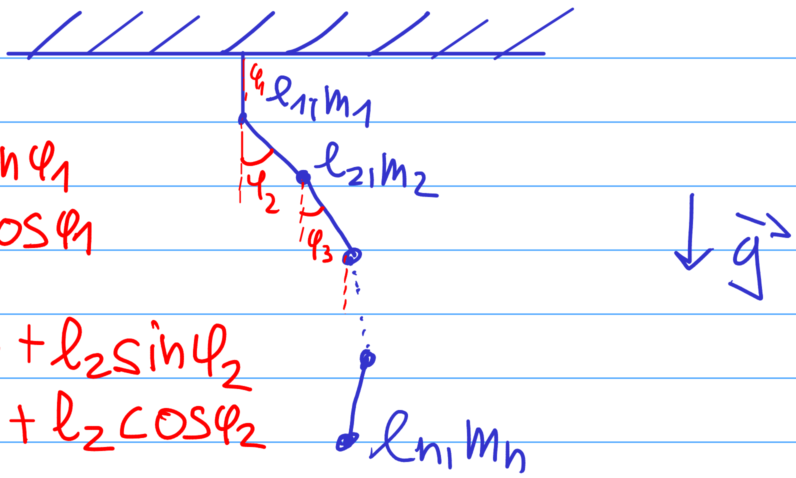
má 2 stupně volnosti (Q_A, Q_B) tedy 2 rovnice

$$L_A \ddot{Q}_A + \frac{Q_A}{C_A} + \frac{1}{2} L_{AB} \dot{Q}_B = e_A$$

$$L_B \ddot{Q}_B + \frac{Q_B}{C_B} + \frac{1}{2} L_{AB} \dot{Q}_A = e_B$$

nepovinný DÚ: vyřešte pro $e_A = e_B = 0$

4



$$x_1 = l_1 \sin\varphi_1$$
$$y_1 = l_1 \cos\varphi_1$$

$$x_2 = x_1 + l_2 \sin\varphi_2$$
$$y_2 = y_1 + l_2 \cos\varphi_2$$

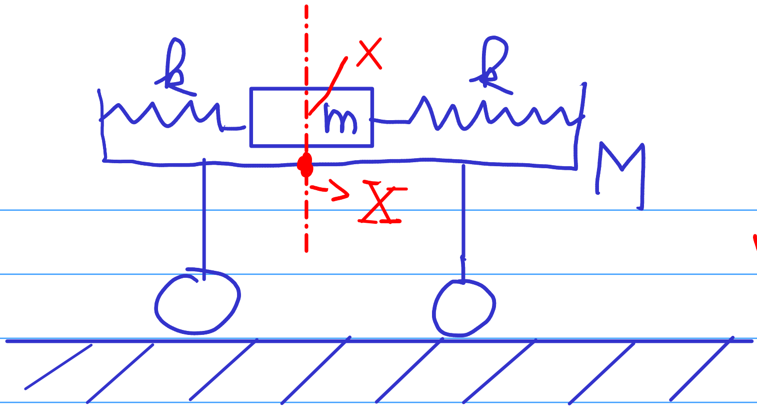
$\vdots$

$$x_{i+1} = x_i + l_{i+1} \sin\varphi_{i+1} \quad \Rightarrow \text{stupně volnosti} = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$$
$$y_{i+1} = y_i + l_{i+1} \cos\varphi_{i+1}$$

Viz pro $n=2$ Tyc teor mech. příklady

příklad 18.

5



malé x - poloha kostky m

velké X - poloha středu vozíku M

v čase $t=0$

$x = X = 0$

2 stupně volnosti x a X

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2}(m+M)\dot{X}^2$$

$V = k(X-x)^2 \rightarrow$ obě pružiny mají stejnou energii takže $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

X jest protože kladná změna X vyvolá pružnou sílu po směru X

pro x naopak

$\Rightarrow$ rovnice:

$$2k(X-x) = m\ddot{x}$$
$$-2k(X-x) = (m+M)\ddot{X}$$

nepovinný ÚV - vyřešit