18.3 Cvičení 3

Rozhodování o typu extrému (min/max?)

$$I[y] = \int dx\, L(x, y(x), y'(x))$$

– funkcionál

Analogie s funkcemi

funkce	funkcionál
$x \to f(x)$	$(x, y, y') \to L(x, y, y')$
extrém: $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$	extrém: $\frac{\delta I}{\delta y} = 0 \Leftrightarrow$ EL rce
minimum: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$	první variace

minimum $\frac{\delta^2 I}{\delta y^2} > 0$

druhá variace

Z přednášky

Legendrova podmínka
(nutná)

$$L_{y'y'} \geq 0 \qquad (1)$$

Jacobiho podmínka
interval (a, b) nesmí obsahovat bod $\tilde{a}$ konjugovaný k bodu a
(2)

(1)+(2) podmínka nutná i postačující k existenci minima.

Vzorec pro druhou variaci:

$$\frac{\delta I}{\delta y} = \frac{d}{d\varepsilon} I[y+\varepsilon h]\Big|_{\varepsilon=0}$$

$$\Rightarrow \frac{\delta^2 I}{\delta y^2} = \frac{d^2}{d\varepsilon^2} I[y+\varepsilon h]\Big|_{\varepsilon=0}$$

pozn: není matematicky úplně korektní ale výsledek dá správný

$$\frac{\delta I}{\delta y} = \frac{d}{d\varepsilon} \int L(x, y+\varepsilon h, y'+\varepsilon h')\,dx$$

$$= \int \left(\frac{\partial L}{\partial y} h + \frac{\partial L}{\partial y'} h'\right) dx$$

$$\frac{\delta^2 I}{\delta y^2} = \int \left(\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} h^2 + 2\frac{\partial^2 L}{\partial y \partial y'} h \cdot h' + \frac{\partial^2 L}{\partial y'^2} h'^2\right) dx$$

per partes (*)

(*) $$2\frac{\partial^2 L}{\partial y \partial y'} h h' = \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial y'} h h' + \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial y'} h h' =$$

per partes

$$= -\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial y \partial y'} h\right) h + \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial y'} h h'$$

$$= -\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial y \partial y'}\right) h^2$$

$$\frac{\delta^2 I}{\delta y^2} = \int \left(\left(\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial y \partial y'}\right)\right) h^2 + \frac{\partial^2 L}{\partial y'^2} h'^2 \right) dx$$

$\Rightarrow$ kvadratický funkcionál (viz přednáška)

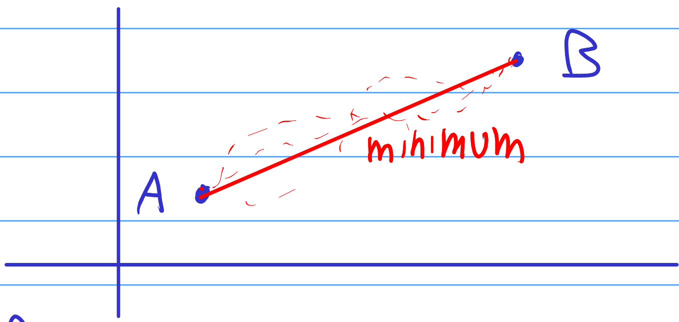
Příklad I   nejkratší spojnice bodů v rovině

délka $y(x)$

tak že

$y(x_A) = y_A$

$y(x_B) = x_B$



že $L[y] = \int dx \sqrt{1 + y'(x)^2}$

$$\frac{\delta L}{\delta y} = 0 : \quad \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial y'}$$

$$0 = \frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} \right)$$

$$K = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'(x)^2}}$$

$$y' = \sqrt{\frac{K}{1-K}} = a$$

$\Rightarrow$ $y = ax + b$ úsečka ✓

Podmínky $y(x_A) = y_A$

$y(x_B) = y_B$

$$y = ax+b \Rightarrow y = y_A + (x - x_A)\frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$$

$\frac{\delta^2 I}{\delta y^2}$, využijeme že $\frac{\partial L}{\partial y} = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 L}{\partial y'^2} = \frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'(x)^2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+y'(x)^2}} + y'\left(-\frac{y'}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right) = \frac{1}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

nás zajímá zda $\frac{1}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} > 0$ pro extrém

$$y = y_A + (x - x_A)\frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$$

$y' = \text{konst} \Rightarrow 1 + y'^2 > 0$ ✓ ano jedná se o minimum.

Příklad II Harmonický oscilátor

$$I[y] = \int dx \left(y'^2 - \omega^2 y \right)$$

$\omega = \frac{k}{m}$

$$\frac{\delta I}{\delta y} = 0 : \quad y'' + \omega^2 y = 0$$

$$y = A\cos\omega x + B\sin\omega x$$

$$\frac{\delta^2 I}{\delta y^2} = \int \left(h^2(-2\omega^2) + h'(2)\right) dx$$

až na $\frac{1}{2}$ stejný funkcionál jako I

$$= \int \left(h'^2 - \omega^2 h^2\right) dx$$

Legendre : $\frac{\partial^2 L}{\partial y'^2} = 1 > 0$ ✓

Jacobi : $\exists$ konjugované body?

v intervalu (x_A, x_B) hledáme řešení přidružené fce

$$h'' + \omega^2 h = 0 \quad \text{tak že } \exists \text{ bod}$$

$\tilde{x}_A$ a $h(x_A) = h(\tilde{x}_A) = 0$

$$h = A\cos\omega x + B\sin\omega x \qquad h(x_A) = 0 \implies$$

$$h = \frac{\sin\omega(x - x_A)}{\omega}$$

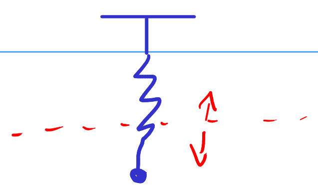
hledáme $\tilde{x}_A$ tak, že $h(\tilde{x}_A) = 0$

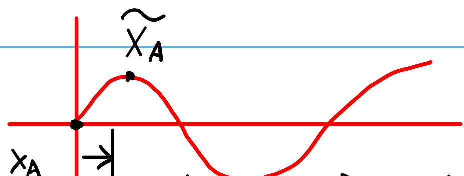
$$\sin\omega(\tilde{x}_A - x_A) = 0$$

$$\omega(\tilde{x}_A - x_A) = \pi$$

$$\tilde{x}_A = \frac{\pi + \omega x_A}{\omega}$$

jedná se o návratový bod





↳ dotud je $y(x)$ minimum poté už ne