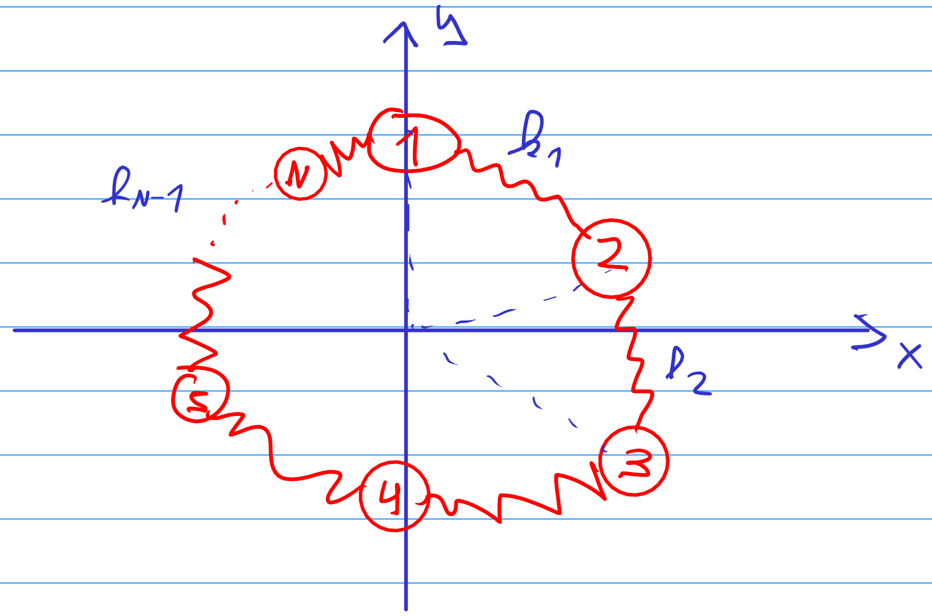
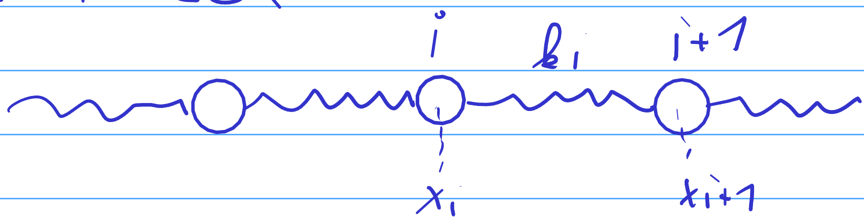
Soustava N harmonických oscilátorů



Známe 1D řetízek



$$T=\frac{1}{2}\sum m_i \dot{x}_i^2, \quad V=\frac{1}{2}\sum k_i (x_{i+1}-x_i)^2$$

Zde v našem případě zvolíme souřadnice

$1 \quad (x_1, y_1) \rightarrow U_1 = (x_1, y_1)$

$2 \quad (x_2, y_2) \rightarrow U_2 = (x_2, y_2)$

$\vdots$

$i \quad (x_i, y_i) \rightarrow U_i = (x_i, y_i)$

$\vdots$

$N \quad (x_N, y_N) \rightarrow U_N = (x_N, y_N)$

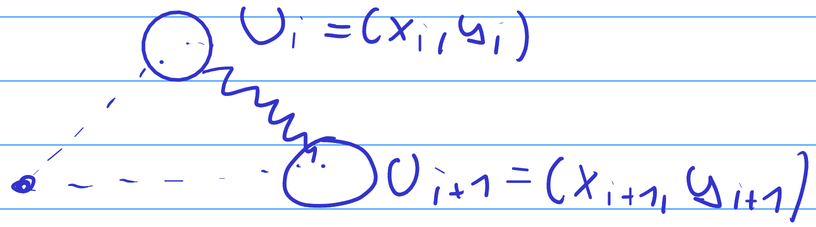
$\Downarrow$

vektor $(U_1, \ldots, U_N)$

Celková $\quad T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i(\dot{x}_i^2+\dot{y}_i^2)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{U}_i^2$

$$V=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} k_i(\Delta l_i)^2$$

↳ jak zapsat pomocí U_i



$$\Delta l_i=\sqrt{(x_{i+1}-x_i)^2+(y_{i+1}-y_i)^2}$$

$$=\sqrt{(U_{i+1}-U_i)^2} \quad \text{(formální zápis)}$$

$$\Rightarrow T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{U}_i^2$$

$$V=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N-1} k_i(U_{i+1}-U_i)^2+\frac{1}{2}k_N(U_N-U_1)^2$$

lze zapsat pomocí matic a vektoru $\vec{U}$

$$T=\frac{1}{2}\dot{U}^T M \dot{U}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\dot{U}_1 & \cdots & \dot{U}_N\end{pmatrix}\begin{pmatrix} m_1 & & & \\ & m_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & m_N\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{U}_1\\ \vdots \\ \dot{U}_N\end{pmatrix}$$

$$V=\frac{1}{2}U^T K U=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}U_1 & \cdots & U_N\end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1+k_N & -k_1 & \cdots & -k_N \\ -k_1 & k_2+k_3 & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ -k_N & & & k_{N-1}+k_N\end{pmatrix}\begin{pmatrix}U_1\\ \vdots \\ U_N\end{pmatrix}$$

abychom mohli něco spočítat vezmeme

$m_i = m \ \forall i, \ k_i = k \ \forall i$

$$\Rightarrow M = m \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \ 1 \end{pmatrix}, \quad K = k \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & -1 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Verze dobrá pro počítání (použití Einsteinovy sumační symboliky)

$$L = \frac{1}{2} \dot{u}_i M^i_{\ j} \dot{u}^j - \frac{1}{2} u_i K^i_{\ j} u^j$$

EL-rce:
$$\frac{\partial L}{\partial u_k} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_k}$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_k} = -\frac{1}{2} \delta_{ik} K^i_{\ j} - \frac{1}{2} u_i K^i_{\ j} \delta^j_k$$

$$= -\frac{1}{2} K^k_{\ j} u^j - \frac{1}{2} u_i K^i_{\ k} = -K u$$

protože K je symetrická matice

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial u_k} = \ddot{u} M$$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad M\ddot{u} = -Ku$$

$$m\mathbb{1}\ddot{u} = -k\begin{pmatrix} 2 & -1 & & -1 \\ -1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ -1 & & & \end{pmatrix} u$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$\ddot{u} = -\omega^2 A u \qquad (*)$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ -1 & & & 2 \end{pmatrix}$$

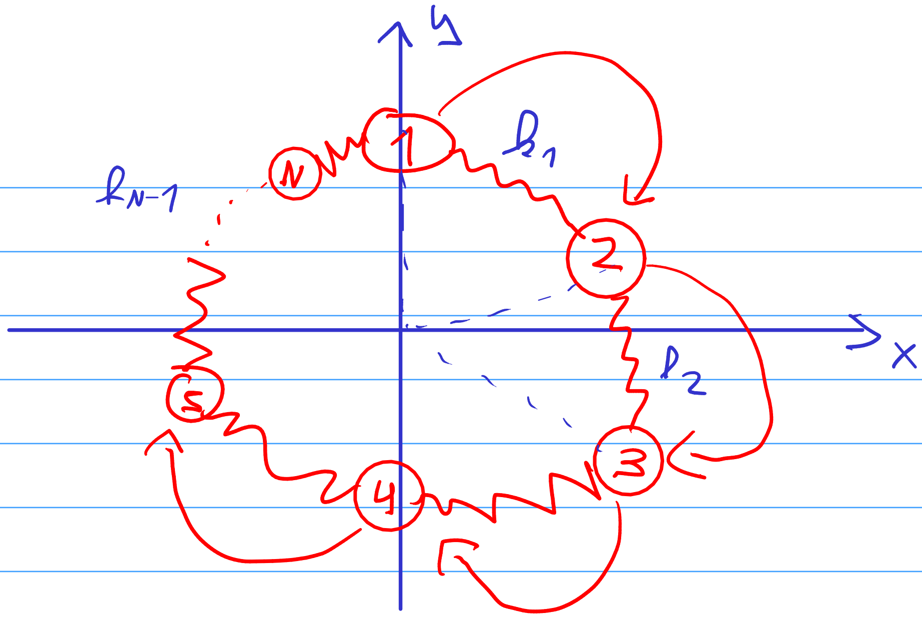
rovnice typu (*) se řeší pomocí vl. vektorů a vl. hodnot $\Rightarrow$ diagonalizace

řešení tvaru $x = \sum c_i e^{-\omega^2 \lambda_i t}$

$\Rightarrow$ jak najít vl. hodnoty λ_i matice A?

využijeme symetrii problému popsanou maticí S, pro kterou platí $AS = SA$ $\Rightarrow$ stačí zjistit vl. hodnoty matice S, což bude jednodušší a pak dopočítáme λ_i.

1) co je ta symetrie? = Pořadí oscilátorů!



$1 \to 2$

$2 \to 3$

$\vdots$

$N \to 1$

změní $\tilde{U}$ ale fyzikálně popisuje stejnou soustavu/problém

co se týče proměnných

$$U = \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_N \end{pmatrix} \longrightarrow \tilde{U} = \begin{pmatrix} U_2 \\ U_3 \\ \vdots \\ U_N \\ U_1 \end{pmatrix}$$ lze zapsat

pomocí matice

$\tilde{U} = SU$ kde

$$\begin{pmatrix} U_2 \\ U_3 \\ \vdots \\ U_N \\ U_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_N \end{pmatrix}$$

Pozn. transpozice toho co bylo na cvičení ale nic podstatného se nemění.

co znamená symetrie?

změníme $U \to \hat{U}$ ale fyzika zůstane stejná

"Fyzika" ≈ pohybové rovnice

$$-\omega^2 A U = \ddot{U} \quad / \, S$$

$$-\omega^2 S A U = \ddot{\tilde{U}}$$

chceme aby toto bylo : $-\omega^2 A \hat{U} = \ddot{\tilde{U}}$

což platí $\Leftrightarrow$ $SA = AS$ (toto lze snadno ověřit že platí)

"Věta": platí-li $SA = AS$ pak matice S, A mají stejnou sadu vl. vektorů

Pozn: když (λ_i jsou 1-násobné) důkaz je jednoduchý ale pro λ vícenásobné je věta komplikovanější.

důkaz: vl. hodnoty a vektory matice A:

U, λ : $AU = \lambda U$

vl. hodnoty a vektory matice S:

V, λ' : $SV = \lambda' V$

vezmeme $AU = \lambda U$

$ASU = ?$ použijeme $AS = SA$

$ASU = SAU = S\lambda U = \lambda SU \Rightarrow$

Su je také vl. vektor matice A s vl. hodnotou λ, ale je-li λ 1-násobná pak prostor vl. vektorů k ní odpovídající je také 1 dim $\Rightarrow$ Su je násobek u pro nějaké $c \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow Su = cu \Rightarrow u$ je také vl. vektor S.

$\Rightarrow$ Plán řešení je najít vl. hodnoty matice $S \rightarrow$
$\rightarrow$ najít vl. vektory S = vl. vektory A $\rightarrow$ vl. hodnoty A

1) vl. hodnoty S:

z geometrie zadání víme, že

$$S^N = 1 \Rightarrow Su = \lambda u \rightarrow S^N u = \lambda^N u$$
$$1 u = \lambda^N u$$

$\Rightarrow \lambda^N = 1$, alternativní výpočet: řešení rce

$$\det(S - \lambda 1) = 0$$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & & & \\ & -\lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 \\ 1 & & & & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \underbrace{\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & & \\ & -\lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & -\lambda \end{vmatrix}}_{\text{označme } D_{N-1}} + 1 \cdot (-1)^{N+1} \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & & & \\ -\lambda & 1 & & \\ & -\lambda & \ddots & \\ & & -\lambda & 1 \end{vmatrix}}_{\text{označme } S_{N-1}}$$

rozvoj podle sloupce

rozvoj

$$D_{N-1} = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & & \\ & -\lambda & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda D_{N-2} = \dots = -\lambda^{N-3} D_2$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^2$$

$$\Rightarrow D_{N-1} = (-\lambda)^{N-1}$$

rozvoj

$$S_{N-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ -\lambda & 1 & & \\ & -\lambda & \ddots & \\ & & -\lambda & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot S_{N-2} = S_2$$

$$S_2 = \begin{vmatrix} 1 & \\ -\lambda & 1 \end{vmatrix} = 1$$

rozvoj

$$\Rightarrow \det(S - \lambda \mathbb{1}) = (-\lambda)^N + (-1)^{N+1}$$

$$= (-1)^N(\lambda^N - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\lambda^N = 1}}$$

$\rightarrow$ řešení $\lambda_k = e^{2\pi i \frac{k}{N}}$, $1 \leq k \leq N$

2) vl. vektory S

$$S u_k = \lambda_k u_k$$

Pozor máme tu 2 indexy: k čísluje různé vl. vektory příslušné λ_k, ale každé u_k je vektor $u_k = (u_k^1, u_k^2, \dots, u_k^N)$

vyřešíme vektorovou rovnici

$$S v_k = \lambda_k v_k$$

v indexech: $S^i{}_j v_k^j = \lambda_k v_k^i$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_k^1 \\ v_k^2 \\ \vdots \\ v_k^n \end{pmatrix} = e^{i\frac{2\pi k}{N}} \begin{pmatrix} v_k^1 \\ v_k^2 \\ \vdots \\ v_k^n \end{pmatrix}$$

=> soustava rovnic pro komponenty v_k^i

$$v_k^2 = e^{i\frac{2\pi k}{N}} v_1$$
$$v_k^3 = e^{i\frac{2\pi k}{N}} v_2$$
$$\vdots$$
$$v_k^N = e^{i\frac{2\pi k}{N}} v_k^{N-1}$$
$$v_k^1 = e^{i\frac{2\pi k}{N}} v_k^N$$

toto lze až na konstantní násobek vyřešit vektorem

$$v_k = \left(1, \left(e^{i\frac{2\pi k}{N}}\right)^1, \left(e^{i\frac{2\pi k}{N}}\right)^2, \ldots, \left(e^{i\frac{2\pi k}{N}}\right)^{N-1}\right)$$

toto jsou vlastní vektory matice S a tedy i matice soustavy rovnic A

jako poslední krok zbývá dopočítat vl. hodnoty matice A.

vyřešíme rovnice :

$$A\vec{v}_k = \lambda_k \vec{v}_k$$

ale hledáme pouze hodnoty λ_k toto je N-rovnic $\Rightarrow$ stačí nám 1 rovnice (pro každé k)

vezmeme první komponentu

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & & & \\ & & \ddots & \\ -1 & & & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_k^1 \\ \vdots \\ v_k^N \end{pmatrix} = \lambda_k \begin{pmatrix} v_k^1 \\ \vdots \\ v_k^N \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad 2v_k^1 - v_k^2 - v_k^N = \lambda_k v_k^1$$

známe

neznáme

$$2\cdot 1 - e^{\frac{i2\pi k}{N}} - \left(e^{\frac{i2\pi k}{N}}\right)^{N-1} = \lambda_k \cdot 1$$

$$2 - \left(\cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi k}{N}\right)\right) - e^{i\left(2\pi k - \frac{2\pi k}{N}\right)} = \lambda_k$$

$$e^{i\left(2\pi k - \frac{2\pi k}{N}\right)} = 1\cdot e^{-i\frac{2\pi k}{N}}$$

odečtou se

$$= \left(\cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right) - i\sin\left(\frac{2\pi k}{N}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_k = 2\left(1 - \cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right)\right)$$

řešení soustavy je $u = \sum c_k e^{-\omega^2 \lambda_k t}$