Cvičení 9 Hamiltoniány

1) skalární a vektorový potenciál

- zobecněná souřadnice $q^i(t)$, $1 \leq i \leq n$
- Lagrangián $L = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 + A_i \dot{q}^i + \varphi$ (*)

např.: $A_i = e A_i$, $\varphi = -e\varphi$ => elektromagnetické potenciály

systém přechodu na Hamiltonián

- je-li $L = T - V(q)$ => $H = T + V$
- jinak: 1) spočtěme zobecněné hybnosti

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$$

2) $H(t, q^i, \dot{q}^i, p_i) = p_i \dot{q}^i - L$

3) invertujte $p_i = p_i(\dot{q}^i)$

na $\dot{q}^i = \dot{q}^i(p_i)$ a dosaďte do H

=> dostaneme $H = H(t, q^i, p_i)$

$\cdot\ L = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 + A_i \dot{q}^i + \varphi$

$\cdot\ p_i = m\dot{q}_i + A_i$ inverzní relace $\dot{q}_i = \frac{1}{m}(p_i - A_i)$

$\cdot\ H = p_i \dot{q}^i - L = p_i \frac{1}{m}(p^i - A^i) - \frac{1}{2} m \left(\frac{1}{m^2}(p_i - A_i)^2 \right)$

$- A_i \frac{1}{m}(p^i - A^i) - \varphi = \frac{1}{2m}(p - A)^2 - \varphi$

Ham. rce $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} = -\frac{1}{m}(p^j - A^j)\frac{\partial A_j}{\partial q^i} + \frac{\partial \varphi}{\partial q^i}$

DÚ 1. dokažte že tato rovnice je

$m\ddot{q} = \vec{F}_L = e\vec{E} + e\vec{v} \times \vec{B}$, (Lorentzova síla)

kde $\vec{E} = -\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{q}} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ $(v \times B)^i = \varepsilon^i{}_{jk} v^j B^k$

(zkuste ε-tenzor) $\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \mathrm{rot}\, \vec{A}$

DÚ 2. rce dořešte pro $A = (-By, 0, 0)$
$B = \text{konst.}$

dále uvažujme nový hamiltonián

$H^* = H + \varphi$ a novou zob. hybnost
$p_i^* = p_i - A_i$

DÚ 3. • zapište nový hamiltonián jako funkci p^*

• mějme 1-formu $\Lambda = p_i dq^i - H dt$

jak se tato 1-forma změní, $\Lambda^* = ?$

a spočtěte $d\Lambda^*$, měli byste dostat

$$d\Lambda^* = d\Lambda + F$$

dále Lagrangian (*)

$$L = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 + A_i \dot{q}^i + \varphi$$

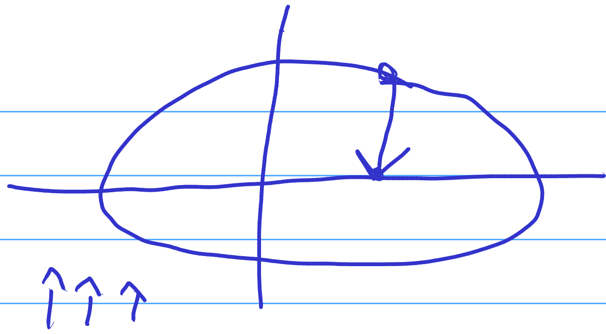
Lze ještě zobecnit $\frac{1}{2} m \dot{q}^2 = \frac{1}{2} m \delta_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j$

$\Rightarrow \frac{1}{2} m g_{ij}(t, q) \dot{q}^i \dot{q}^j \Rightarrow$ metrika g_{ij}

(viz moje bakalářská práce kapitola 7.1 pro podrobnější analýzu)

DÚ 4. spočtete EL-rce (rce geodetik)

pro $A = \varphi = 0$



2) Čaplyginův (Keplerův) problém podruhé

minule jsme došli k tomu, že lze problém alternativně vyjádřit jako pohyb letadla v efektivním potenciálu

$$V = -\frac{m v_L h}{r}$$

$$L = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2\right) + \frac{m v_L h}{r}$$

⇒ přepíšeme do Hamiltonovy formulace

$$p_r = m\dot{r} \qquad (t, r, \theta, p_r, p_\theta)$$
$$p_\theta = m r^2 \dot{\theta}$$

$$H = \frac{1}{2m} p_r^2 + \frac{1}{2mr^2} p_\theta^2 - \frac{m v_L h}{r} \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}$$

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p}$$

Ham rovnice: $\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0$

⇒ konstanta, z minula víme že

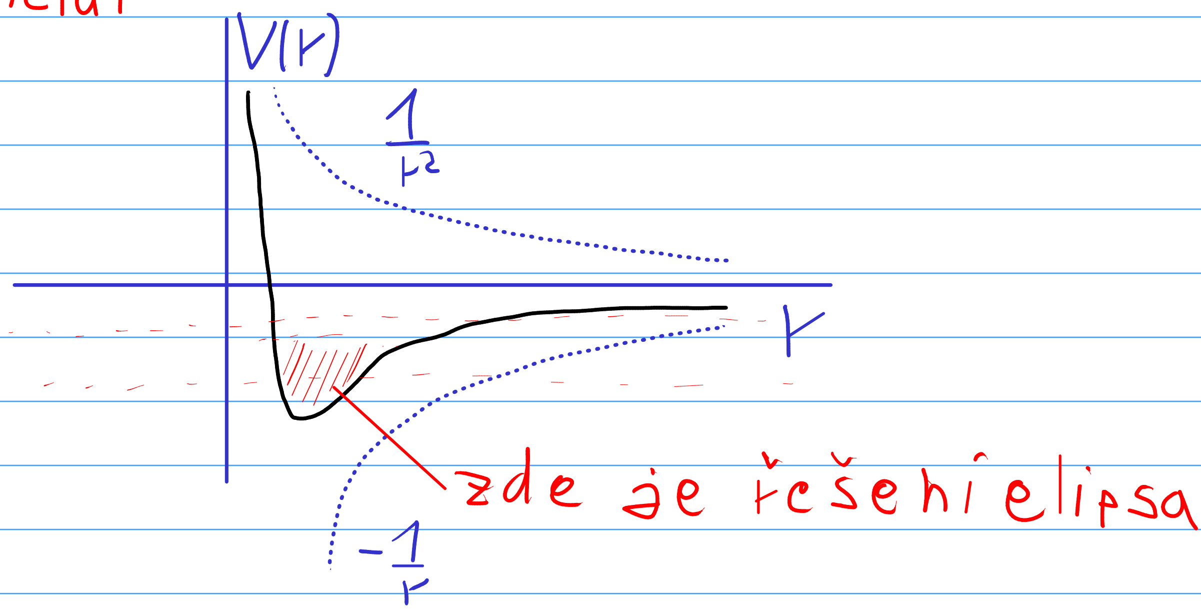
$p_\theta = h = konst.$ (ZZMH)

⇒ můžeme zjednodušit H

$$H = \frac{1}{2m} p_r^2 + \frac{1}{2mr^2} p_\theta^2 - \frac{m v_L h}{r}$$

$$H = \frac{1}{2m} p_r^2 + \boxed{\frac{h^2}{2mr^2} - \frac{m v_L h}{r}} = E$$

dohromady funguje jako efektivní potenciál



• máme ZZE $\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Rightarrow H = E = \text{konst.}$

můžeme tedy zintegrovat tuto rovnici

$$E = \frac{1}{2m} p_r^2 + \frac{h^2}{2mr^2} - \frac{m v_L h}{r}$$ s použitím $p_r = m\dot{r}$

$$\frac{dr}{dt} = \dot{r} = \sqrt{2m\left(E - \frac{h^2}{2mr^2} + \frac{m v_L h}{r}\right)}$$

nechceme $t = t(r)$ ale spíš $r = r(\theta)$

trik: $\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} \sim \dot{\theta} = \frac{h}{mr^2}$

DÚ 5. dopočítejte: $\left(\frac{a}{r}-b\right)^2+c^2$ $\quad d\xi=\frac{-a}{r^2}$

$$\theta=\int\frac{h\,dr}{r^2\sqrt{2m\left(E-\frac{h^2}{2mr^2}+\frac{mv_Lh}{r}\right)}}=\arccos\frac{\frac{h}{r}-m^2v_L}{\sqrt{2mE+m^4v_L^2}}$$

$$\Rightarrow r=\frac{p}{1+e\cos\theta},\quad p=\frac{h}{v_L},\quad e=\sqrt{1+\frac{2E}{m^3v_L^2}}$$

- toto lze provést pro obecný potenciál (viz proměnné úhlu a akce David Tong 4.5.3 a 4.5.4)

3) Hamiltonián pro teorii relativity

a) jednodušší verze $\quad L=-mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$

$$p=\frac{\partial L}{\partial v}=mv\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

inverze:

$$\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)p^2=m^2v^2$$

$$v^2=\frac{p^2}{m^2+\frac{p^2}{c^2}}$$

$$\frac{v^2}{c^2}=\frac{p^2}{m^2c^2+p^2}$$

$$H=pv-L=p\sqrt{\frac{p^2}{m^2+\frac{p^2}{c^2}}}+mc^2\sqrt{1-\frac{p^2}{m^2c^2+p^2}}$$

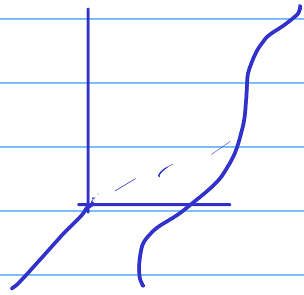
$$=\frac{1}{\sqrt{m^2c^2+p^2}}\left(p^2c+mc^2\cdot mc\right)=\sqrt{p^2c^2+m^2c^4}$$

znovu $\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Rightarrow H = \text{konst} = E$

$$E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2$$

DÚ 6. napište a vyřešte pohybové rce

b) težší způsob



$x^\mu(\tau) \in \mathbb{R}^4$

DÚ 7. dokažte že tyto L jsou stejné pouze jinak parametrizované

$$L = m\sqrt{\frac{dx^\mu}{d\tau}\cdot\frac{dx^\nu}{d\tau}\eta_{\mu\nu}}$$

$$P_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu}}\, m\dot{x}_\mu$$

$$H = \dot{x}^\mu P_\mu - L = m\frac{\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu}{\sqrt{\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu}} - m\sqrt{\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu}$$

$v = (c, \vec{v})$

$p^\mu = (E, \vec{p})$

$$= 0$$

máme zde podmínku $p^2 - m^2 = 0$

můžeme ji použít s Lagrangeovým multiplikátorem

$$L = p\dot{x} + \lambda(p^2 - m^2)$$

~ kvadratickému $L = \frac{1}{2\lambda}\dot{x}^2 + \lambda m^2$

protože $p = \frac{\dot{x}}{\lambda}$

4) Legendreova transformace a termodynamické potenciály

základ $\quad f = f(x, y) \qquad x \approx \dot{q}, \quad y \approx q$

$$df = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}}_{u} dx + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}}_{v} dy$$

$$= u\,dx + v\,dy$$

změna souř: $\quad (x, y) \rightarrow (u, y)$

generující (vytvořující) funkce g

tak, že $\quad g = f - ux$

$$dg = df - u\,dx - x\,du$$

$$= v\,dy - x\,du$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} \qquad -\frac{\partial g}{\partial u}$$

v přechodu z $L(t,q,\dot{q}) \to H(t,q,p)$

$$(q,\dot{q}) \to (q,p)$$

$$H = \dot{q}p - L$$

$$dH = \dot{q}dp + d\dot{q}p - dL$$

$$\frac{\partial H}{\partial q}dq + \frac{\partial H}{\partial p}dp = \dot{q}dp + d\dot{q}p - \frac{\partial L}{\partial q}dq - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}d\dot{q}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial L}{\partial q}$$

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q}$$

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$$

ještě lze lépe upravit viz Goldstein 8.13–8.19

použití v Termodynamice

$$dU = TdS - PdV$$

$$U = U(S,V); \quad T = \frac{\partial U}{\partial S}, \quad P = -\frac{\partial U}{\partial V}$$

entalpie $H = U + PV$

$$dH = TdS + VdP$$

nebo $F = U - TS$ $\quad F = F(T, V)$

$G = H - TS$ $\quad G = G(T, P)$

Reference: Goldstein, Classical mechanics chapter 8 and 9

David Tong lectures on classical dynamics

Theodore Frankel geometry of physics ch 16.4

Tyc teoretická mechanika.

J. Musilová Matamematika pro porozumnění a praxi.

Hatfield QFT of point particles and strings 19.2

$$L = -m \sqrt{\dot{x}^{\mu} \dot{x}_{\mu}} \, d\tau \qquad x^{\mu} = (t, x, y, z)$$

$$L = -m \sqrt{\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 - } \, d\tau$$

$$L = -m \sqrt{dt^2 - dx^2 \ldots}$$

$$L = -m \sqrt{1 - v^2} \, dt$$

$N \to \infty$

(t, x')