Věta 1 (Jordanovo lemma)**.** *Nechť* $\mathcal{K}_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r, \operatorname{Im} z \geq 0\}$ *je polokružnice v horní polorovině Gaussovy roviny a* f *spojitá funkce definovaná na průniku okolí nekonečna a horní poloroviny. Označme* $M(r) = \max_{z \in \mathcal{K}_r} |f(z)|$. *Pokud* $\lim_{r\to\infty} M(r) = 0$, *pak*

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\mathcal{K}_r} f(z)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, z}\, \mathrm{d}z = 0\,.$$

Důkaz. Parametrizujme $\mathcal{K}_r$ obloukem $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\, t}$, $t \in [0, \pi]$. Pak máme

$$\int_{\mathcal{K}_r} f(z)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, z}\, \mathrm{d}z = \mathrm{i} \int_0^\pi f\big(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\, t}\big) \exp\left\{\mathrm{i}\, r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\, t}\right\} r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\, t}\, \mathrm{d}t\,.$$

Protože $|f(z)| \leq M(r)$ na $\mathcal{K}_r$, platí

$$\left| \int_{\mathcal{K}_r} f(z)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, z}\, \mathrm{d}z \right| \leq \int_{\mathcal{K}_r} \left|f(z)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, z}\right| \mathrm{d}z \leq r M(r) \int_0^\pi \left|\exp\left\{\mathrm{i}\, r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\, t}\right\}\right| \mathrm{d}t\,.$$

Dále máme

$$\exp\left\{\mathrm{i}\, r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\, t}\right\} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, r \cos t} \mathrm{e}^{-r \sin t} \quad \Rightarrow \quad \left|\exp\left\{\mathrm{i}\, r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\, t}\right\}\right| = \mathrm{e}^{-r \sin t}\,,$$

tedy

$$\left| \int_{\mathcal{K}_r} f(z)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, z}\, \mathrm{d}z \right| \leq r M(r) \int_0^\pi \mathrm{e}^{-r \sin t}\, \mathrm{d}t\,.$$

Upravme dále integrál na pravé straně. Ze symetrie funkce sinus platí

$$\int_0^\pi \mathrm{e}^{-r \sin t}\, \mathrm{d}t = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-r \sin t}\, \mathrm{d}t\,.$$

Protože na intervalu $[0, \frac{\pi}{2}]$ je $\sin t \geq \frac{2}{\pi} t$ (rovnost nastává v $\frac{\pi}{2}$ a $\sin t$ je na $[0, \frac{\pi}{2}]$ konkávní), platí

$$\int_0^\pi \mathrm{e}^{-r \sin t}\, \mathrm{d}t \leq 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{2}{\pi} r t}\, \mathrm{d}t = \frac{\pi - \mathrm{e}^{-r}\pi}{r}\,.$$

Celkem tedy

$$\left| \int_{\mathcal{K}_r} f(z)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, z}\, \mathrm{d}z \right| \leq (\pi - \mathrm{e}^{-r}\pi) M(r)\,,$$

a proto

$$\int_{\mathcal{K}_r} f(z)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, z}\, \mathrm{d}z \xrightarrow{r\to\infty} 0\,.$$

□

Tvrzení 2. *Nechť funkce* $f(z)$ *má v* $z_0 \in \mathbb{C}$ *pól prvního řádu a* $\mathcal{C}$ *je oblouk kružnice* $\phi(t) = z_0 + r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\, t}$, $t \in [\varphi, \varphi + \alpha]$, *kde* $0 \leq \varphi < \varphi + \alpha < 2\pi$. *Pak*

$$\lim_{r\to 0^+} \int_{\mathcal{C}} f(z)\, \mathrm{d}z = \mathrm{i}\, \alpha \operatorname{res}_{z_0} f(z)\,.$$

Důkaz. Protože funkce f má v z_0 pól prvního řádu, lze ji napsat jako

$$f(z) = \frac{\operatorname{res}_{z_0} f(z)}{z - z_0} + g(z)\,,$$

kde g je funkce regulární v z_0, tedy holomorfní v okolí z_0. Tedy

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\mathcal{C}} \frac{\operatorname{res}_{z_0} f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z + \int_{\mathcal{C}} g(z)\,\mathrm{d}z\,.$$

Dosazením parametrizace máme

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{\operatorname{res}_{z_0} f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z = \int_{\varphi}^{\varphi+\alpha} \mathrm{i}\operatorname{res}_{z_0} f(z)\,\mathrm{d}t = \mathrm{i}\operatorname{res}_{z_0} f(z) \int_{\varphi}^{\varphi+\alpha} \mathrm{d}t = \mathrm{i}\,\alpha\operatorname{res}_{z_0} f(z)\,.$$

Protože je g holomorfní v bodě z_0, je na nějakém jeho okolí omezená. Pak

$$\left|\int_{\mathcal{C}} g(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq \text{„délka oblouku} \times \text{maximum } g\text{“} = \alpha\, r \max_{z\in\mathcal{C}} |g(z)| \xrightarrow{r\to 0^+} 0\,.$$

Tím máme

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)\,\mathrm{d}z \xrightarrow{r\to 0^+} \mathrm{i}\,\alpha\operatorname{res}_{z_0} f(z)\,.$$

□