Konvence

Množinu

$$\mathcal{B}(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \varepsilon\}$$

nazýváme *okolí* (popř. *ε-okolí*) bodu z_0. Množinu

$$\mathcal{P}(z_0; r, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R\}$$

nazýváme *prstencové okolí* bodu z_0. Pro $r = 0$ často značíme $\mathcal{P}(z_0; 0, R) \equiv \mathcal{P}(z_0, R) = \mathcal{B}(z_0, R) \setminus \{z_0\}$.
Uzávěr množiny U značíme $\overline{U}$.

Laurentova řada

Definice 1 (Laurentova řada) *Řada tvaru*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \,, \tag{1}$$

se nazývá Laurentova řada se středem v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$. Řada

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n \,, \tag{2}$$

se nazývá hlavní část Laurentovy řady (1)*, řada*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \,, \tag{3}$$

se pak nazývá regulární část Laurentovy řady (1)*.*

Věta 2 *Nechť* (1) *je Laurentova řada. Je-li poloměr konvergence regulární části R a poloměr konvergence hlavní části r, pak Laurentova řada konverguje absolutně na $\mathcal{P}(z_0; r, R)$ a stejnoměrně na každém mezikruží $\mathcal{P}(z_0; \varrho_1, \varrho_2)$, kde $0 < r < \varrho_1 < \varrho_2 < R$. Je-li $r \neq R$, pak Laurentova řada diverguje pro každé $z \in \mathbb{C}^+ \setminus \overline{\mathcal{P}(z_0; r, R)}$.*

Věta 3 *Nechť f je funkce holomorfní na $\mathcal{P}(z_0; r, R)$, kde $0 \leq r < R \leq \infty$. Pak existují koeficienty $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$ takové, že*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

pro všecha $z \in \mathcal{P}(z_0; r, R)$. Navíc jsou koeficienty této řady určeny jednoznačně a platí

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}\zeta \,, \tag{4}$$

kde $\mathcal{C}$ je libovolná kladně orientovaná, jednoduchá, (po částech) rektifikovatelná křivka ležící v mezikruží $z \in \mathcal{P}(z_0; r, R)$ a mající bod z_0 ve své vnitřní oblasti.

Definice 4 (Laurentova řada v okolí nekonečna) *Řada tvaru*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{z^n} \,, \tag{5}$$

se nazývá Laurentova řada se středem v bodě ∞. Řady

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{a_n}{z^n} \,, \quad \textit{resp.} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n} \,,$$

se nazývají hlavní, resp. regulární část Laurentovy řady (5)*.*

Singularity

Definice 5 *Nechť f je funkce holomorfní na oblasti $D\setminus\{z_0\} \supset \mathcal{P}(z_0,\varepsilon)$, a zároveň není holomorfní v bodě z_0. Pak se bod z_0 nazývá* izolovaná singularita *funkce f.*

Definice 6 *Nechť f je funkce holomorfní v $\mathcal{B}(z_0,\varepsilon)$, $z_0 \in \mathbb{C}$. Pokud $f \not\equiv 0$ na $\mathcal{B}(z_0,\varepsilon)$, pak existuje číslo $k \in \mathbb{N}$, pro které platí*

$$f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(k-1)}(z_0) = 0\,, \quad f^{(k)}(z_0) \neq 0\,.$$

Bod z_0 nazýváme kořen *funkce f a číslo k jeho* násobnost.

Definice 7 *Pól $z_0 \in \mathbb{C}$ má řád $k \in \mathbb{N}$, jestliže z_0 je k-násobný kořen holomorfního rozšíření funkce $\dfrac{1}{f}$.*

Tvrzení 8 *Nechť f je holomorfní na prstencovém okolí bodu z_0. Pak bod $z_0 \in \mathbb{C}$ je pól řádu k funkce f právě tehdy, když existuje funkce g holomorfní v okolí z_0 taková, že*

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^k}\,, \qquad g(z_0) \neq 0\,.$$

Definice 9 *Bod ∞ je pól řádu $k \in \mathbb{N}$ funkce f, jestliže 0 je pól řádu k funkce $f\big(\frac{1}{z}\big)$.*

Tvrzení 10 *Funkce f má v nekonečnu pól řádu k právě tehdy, když existuje funkce g holomorfní v okolí nekonečna s vlastní a nenulovou limitou v nekonečnu taková, že*

$$f(z) = z^k g(z)\,.$$

Tvrzení 11 (Klasifikace singularit) *Nechť* (1) *je Laurentův rozvoj funkce f v prstencovém okolí bodu $z_0 \in \mathbb{C}$, popř.* (5) *je Laurentův rozvoj funkce f v okolí nekonečna. Pak platí:*

(i) f má v bodě z_0 nejvýše odstranitelnou singularitu právě tehdy, když všechny koeficienty hlavní části Laurentovy řady jsou nulové.

(ii) f má v bodě z_0 pól řádu k právě tehdy, když $a_n = 0$ pro všechna $n < -k$ a $a_{-k} \neq 0$ (tj. nejnižší nenulový člen hlavní části je právě řádu k).

(iii) f má v bodě z_0 podstatnou singularitu právě tehdy, když hlavní část Laurentovy řady obsahuje nekonečně mnoho nenulových členů.

Reziduum

Definice 12 *Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ je izolovaná singularita funkce f. Koeficient a_{-1} Laurentovy řady* (1) *funkce f se středem v bodě z_0 se nazývá* reziduum funkce f v bodě z_0, *značíme ho $\operatorname{res}_{z_0} f(z)$ nebo.*

Pokud je $z_0 = \infty$, pak Lurentova řada má tvar (5) *a číslo $-a_1$ se nazývá reziduum funkce f v ∞, značíme $\operatorname{res}_\infty f(z)$.*

Tvrzení 13 *Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ je pól řádu k funkce f. Pak*

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{(k-1)!}\frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}z^{k-1}}\big((z-z_0)^k f(z)\big)\,.$$

Speciálně pro pól řádu 1 máme

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} (z-z_0) f(z)\,.$$

Tvrzení 14 *Nechť f a g jsou funkce holomorfní na okolí bodu $z_0 \in \mathbb{C}$. Nechť z_0 je jednonásobný kořen funkce g. Pak*

$$\operatorname{res}_{z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}\,.$$

Tvrzení 15 *Nechť f je funkce holomorfní v okolí bodu $z_0 \in \mathbb{C}$ a g má v bodě z_0 pól řádu 1. Pak*

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z)g(z) = f(z_0)\operatorname{res}_{z_0} g(z)\,.$$

Tvrzení 16 *Nechť f má v nekonečnu izolovanou singularitu.*

(i) Je-li ∞ odstranitelná singularita funkce f, pak

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_\infty f(z) &= \lim_{z\to\infty} z(f(\infty) - f(z)) \\ \operatorname{res}_\infty f(z) &= \lim_{z\to\infty} z^2 f'(z)\,. \end{aligned}$$

(ii) Je-li ∞ pólem řádu k funkce f, pak

$$\operatorname{res}_\infty f(z) = \frac{(-1)^k}{(k+1)!} \lim_{z\to\infty} \left[z^{k+2} \frac{\mathrm{d}^{k+1}}{\mathrm{d}z^{k+1}} f(z) \right]\,.$$

Poznámka 17 *Je-li $z_0 \in \mathbb{C}$ podstatná singularita funkce f, pak je třeba $\operatorname{res}_{z_0} f(z)$ určit přímo z Laurentovy řady.*