

Funkce komplexní proměnné - zápočtové příklady (jaro 2021)

Pro získání zápočtu je třeba správně spočítat a odevzdat následující příklady. Svá řešení vkládejte do příslušné odevzdávací skřínky v ISu.

1) Řešte rovnici

$$z^6 + 8 = 0,$$

a výsledek převed'te do algebraického tvaru.

2) Necht' z_1, z_2, z_3 tvoří tři vrcholy rovnoběžníku. Vyjádřete čtvrtý vrchol z_4 .

3) Popište následující množiny a uveďte jejich geometrický význam

(a)

$$M = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \arg \frac{z+1}{z-1} = \pi \right\},$$

(b)

$$M = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z|^2 = \operatorname{Im} z \}.$$

4) Dokažte následující tvrzení

(a) Necht' holomorfní funkce f nabývá na oblasti D pouze imaginárních hodnot. Pak f je konstantní funkce.

Hint: použijte Cauchyho-Riemannovy podmínky.

(b) Necht' $f(z) = u(x) + i v(y)$ je holomorfní na \mathbb{C} . Pak f je polynom stupně nejvýše 1.

5) Nalezněte holomorfní funkci $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$, znáte-li:

(a)

$$v(x, y) = \ln(x^2 + y^2) + x - 2y,$$

(b)

$$u(x, y) = x^3 - 3xy - 2y.$$

6) Necht' \mathcal{C} je jednoduchá, uzavřená a kladně orientovaná křivka neprocházející body $\pm ia$, $a > 0$. Zjistěte všechny hodnoty integrálu

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{e^z}{z^2 + a^2}$$

v závislosti na křivce \mathcal{C} .

7) Rozviňte následující funkce v mocninnou řadu se středem v z_0 a určete poloměr konvergence

(a)

$$f(z) = \frac{z^2}{(z+1)^2}, \quad z_0 = 1,$$

(b)

$$f(z) = \int_0^z \frac{\sin \zeta}{\zeta} d\zeta, \quad z_0 = 0,$$

(c)

$$f(z) = \frac{z}{z^2 - 2z + 5}, \quad z_0 = 1.$$

8) Určete obor konvergence Laurentovy řady

(a)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + e^{-n}} z^n,$$

(b)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{|n|} (z - 2i)^n.$$

9) Najděte Laurentovu řadu se zadaným středem, která konverguje v zadané oblasti

(a)

$$f(z) = \frac{3z}{(2z - 1)(2 - z)}, \quad P(0; 1/2, 2),$$

(b)

$$f(z) = 3z \sin \frac{\pi z}{z + 5}, \quad \{\text{maximální možné mezikruží se středem v } z_0 = -5\}.$$

10) Najděte první tři členy Laurentova rozvoje funkce $f(z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$ se středem v bodě 0 a určete oblast konvergence.

11) Nechť funkce f je holomorfní v $P(0, r, R)$, $r < R$ a nechť

$$|f(z)| \leq M \quad \text{pro všechna } z \in P(0, r, R).$$

Pro koeficienty $\{a_n\}$ Laurentova rozvoje funkce $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ odvoďte:

$$|a_n| \leq \min \left(\frac{M}{r^n}, \frac{M}{R^n} \right) \quad \text{pro všechna } n \in \mathbb{Z}.$$

12) Besselovy funkce J_n , $n \in \mathbb{Z}$ jsou definovány jako koeficienty $a_n(b)$ v Laurentově rozvoji funkce

$$f(z) = e^{\frac{1}{2}b(z - \frac{1}{z})}$$

se středem v bodě 0. Vyjádřete $J_n(b)$ pomocí nekonečné řady.

13) Najděte a klasifikujte izolované singularity funkcí

(a)

$$f(z) = \frac{\tan z - 1}{z - 1},$$

(b)

$$f(z) = e^{\tan \frac{1}{z}},$$

(c)

$$f(z) = \frac{z + \pi}{z^2 \sin z},$$

(d)

$$f(z) = e^{1/z} \frac{1}{z(z^2 - 2i)^2}.$$

14) Vypočtěte rezidua

(a)

$$\operatorname{res}_1 \left(\frac{z^2 + z - 1}{(z - 1)z^2} + \frac{\sin z}{z^2} \right),$$

(b)

$$\operatorname{res}_0 \left(\frac{z^2 + z - 1}{(z - 1)z^2} + \frac{\sin z}{z^2} \right),$$

(c)

$$\operatorname{res}_\infty \left(\frac{z^2 + z - 1}{(z - 1)z^2} + \frac{\sin z}{z^2} \right),$$

(d)

$$\operatorname{res}_{k\pi} (\cotan^2 z), \quad k \in \mathbb{Z},$$

(e)

$$\operatorname{res}_{k\pi} (\cotan^3 z), \quad k \in \mathbb{Z},$$

(f)

$$\operatorname{res}_0 (e^z \sin 1/z).$$

15) Spočtěte integrály využitím reziduové věty

(a)

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{1 + x^2}, \quad a \in \mathbb{R}, \quad a \geq 0.$$

(b)

$$\int_0^\infty \frac{x}{\sinh x}.$$

Hint: jako integrační cestu zvolte vhodně upravený obdélník s vrcholy $R, -R, R + \pi i, -R + \pi i$.

(c)

$$\int_0^\infty \frac{x^a}{1 + x^3}, \quad a \in \mathbb{R}, \quad -1 < a < 2.$$

Hint: je třeba vhodně definovat množinu, na které lze hledat integrační cestu, tj. na které platí reziduová věta. Rozmyslete si, že je to množina $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$.

(d)

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{(z^2 - 1)^2(z - 3)^2}, \quad \mathcal{C} \text{ je kladně orientovaná asteroida s parametrizací}$$
$$z = 2 \cos^3 t + 2i \sin^3 t, \quad t \in [0, 2\pi].$$