

Funkce komplexní proměnné, domácí úkol 1

Příklad 1

Stereografická projekce je spojitě bijektivní zobrazení

$$F: \mathbb{C} \hookrightarrow S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$$

$$z \mapsto \left(\frac{\operatorname{Re} z}{|z|^2 + 1}, \frac{\operatorname{Im} z}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2}{|z|^2 + 1} \right)$$

se spojitou inverzí

$$F^{-1}: S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$(\xi, \eta, \zeta) \mapsto \frac{\xi + i\eta}{1 - \zeta},$$

a tím homeomorfismus $\mathbb{C} \cong S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$. F rozšíříme na $\mathbb{C}^+ = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ takto:

$$F(\infty) = (0, 0, 1).$$

Uvažujme metrický prostor (S^2, ϱ_3) , kde

$$\varrho_3((\xi_1, \eta_1, \zeta_1), (\xi_2, \eta_2, \zeta_2)) = \sqrt{(\xi_2 - \xi_1)^2 + (\eta_2 - \eta_1)^2 + (\zeta_2 - \zeta_1)^2}$$

je Euklidovská metrika v \mathbb{R}^3 . Najděte metriku ϱ tak, aby F byla izometrie metrických prostorů (\mathbb{C}^+, ϱ) a (S^2, ϱ_3) , tj. $\varrho(z_1, z_2) = \varrho_3(F(z_1), F(z_2))$. Ve cvičení jsme ukázali, že

$$\varrho(z_1, z_2) = \frac{|z_2 - z_1|}{\sqrt{1 + |z_1|^2} \sqrt{1 + |z_2|^2}} \quad \text{pro} \quad z_1 \neq \infty, z_2 \neq \infty.$$

Spočtete $\varrho(z_1, z_2)$ pro:

1. $z_1 = \infty, z_2 \neq \infty$,
2. $z_1 = \infty, z_2 = \infty$.

Příklad 2

Nechť

$$P(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i, \quad a_i, z \in \mathbb{C}$$

je polynom stupně n . Určete podmínky pro koeficienty a_i tak, aby platilo:

1. $P^*(z^*) = P(z)$,
2. $P^*(z^*) = -P(z)$.

Odpovědi pečlivě zdůvodněte.