domácí úkol 3 - řešení

Příklad 1

$$f = u(x,y) + i v(x,y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$i\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \iff i\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} - i\frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Protože $z_1 = z_2 \iff \operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2$ & $\operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2$,

máme $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ & $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

Příklad 2

a) $u = x^2$, $v = y^2$, $f(x,y) = x^2 + iy^2$ $\rightarrow$ použijeme C-R podmínky v kartézských souřadnicích

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \ , \ \frac{\partial v}{\partial y} = 2y}_{\text{přímka } x=y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

b) $f(x,y) = f(z) = \cos^2 z^*$

Máme $f(x,y) = \cos^2(x - iy)$. Můžeme samozřejmě použít C-R podm. stejně jako v předchozím příkladu. Ale je to pracné, proto použijeme výsledek Příkladu 1.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z^*}\frac{\partial z^*}{\partial x} = -2\cos z^* \sin z^* \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2i\cos z^* \sin z^*$$

$$i\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 4i\cos z^* \sin z^* = \cancel{2i \sin 2z^*}\ 2i \sin 2z^*$$

$2i \sin 2z^* = 0 \iff \sin 2z^* = 0 \iff z = \frac{k\pi}{2}$.

Proto má f derivaci pouze v bodech $\left\{ \frac{k\pi}{2} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$