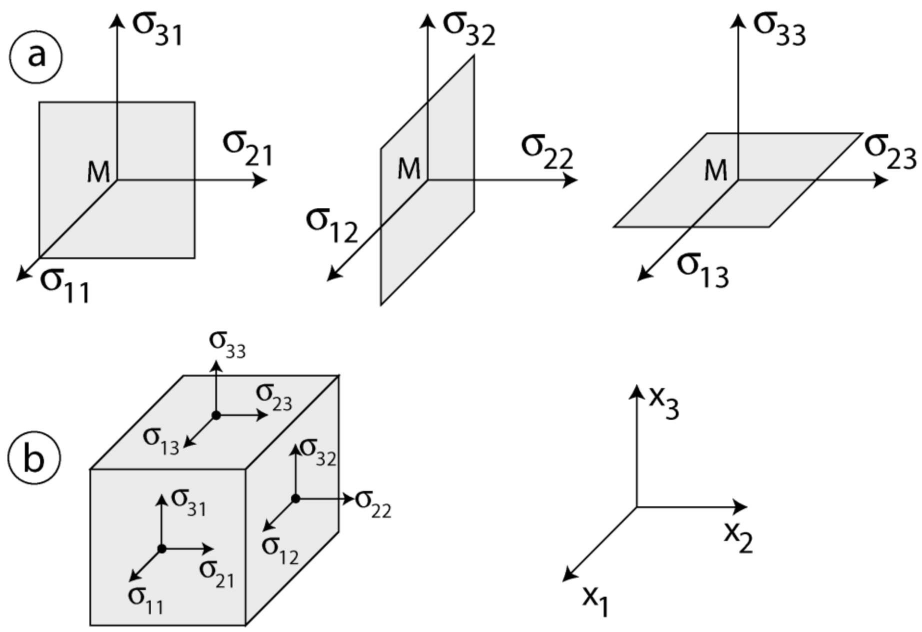
Vysoké učení technické v Brně

VÝPOČTY V RÁMCI LINEÁRNÍ IZOTROPNÍ ELASTICITY

Tomáš Kruml

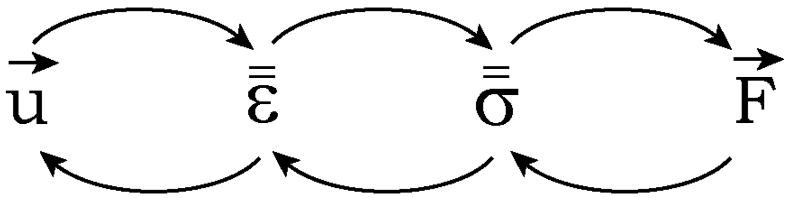
verze 2012



Lineární izotropní elasticita – základy

V tomto textu jsem se pokusil o popsání typického výpočtu v rámci lineární izotropní elasticity v těch nejjednodušších případech, kdy lze odhadnout deformaci tělesa po zatížení.
V těchto výpočtech vystupují 4 významné veličiny:
- vektor přemístění $\vec{u}$;
- tenzor deformace $\bar{\bar{\varepsilon}}$;
- tenzor napětí $\bar{\bar{\sigma}}$;
- aplikované síly $\vec{F}$ (nebo momenty $\vec{M}$).

Mezi těmito veličinami existují následující vazby (viz Obr. 1):
- rovnice mezi $\vec{u}$ a $\bar{\bar{\varepsilon}}$;
- Hookův zákon mezi $\bar{\bar{\sigma}}$ a $\bar{\bar{\varepsilon}}$;
- definice $\bar{\bar{\sigma}}$ pomocí $\vec{F}$.



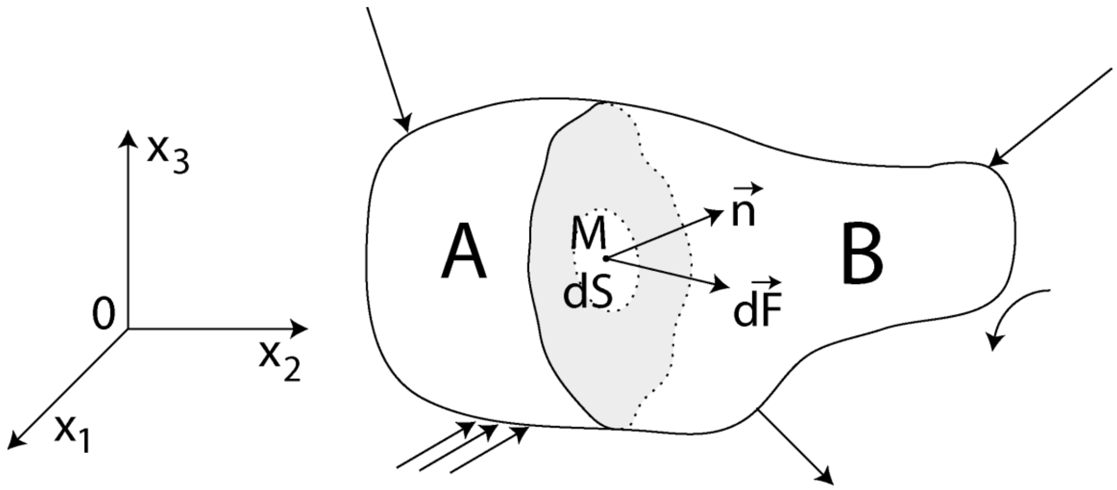
Obrázek 1. Schéma typického výpočtu.

Budeme předpokládat, že materiál je 1) homogenní, 2) izotropní kontinuum a že 3) deformace nejsou příliš velké a představíme si první z linií naznačených na Obr. 1. Tato linie spočívá v těchto krocích:
1. v odhadu tvaru tělesa po deformaci, tj. "uhodnutí" vektoru přemístění $\vec{u}$;
2. z vektoru $\vec{u}$ můžeme vypočítat tenzor deformace;
3. z Hookova zákona vypočítáme tenzor napětí.
4. Pokud chceme spojit tenzor napětí s vnějšími působícími silami, používají se v jednotlivých případech různé postupy.

Nyní rozepíšeme tento postup podrobněji.

Příprava: Napětí a deformace jsou tenzorové veličiny

Je třeba se smířit s faktem, že napětí i deformace jsou obecně tenzory 2. řádu a mají tedy 9 komponent. Demonstrace tohoto faktu se nejčastěji ukazuje následovně. Uvažujme těleso na obr. 1, na které působí několik vnějších sil a momentů. Zajímá nás stav napětí v bodě M.

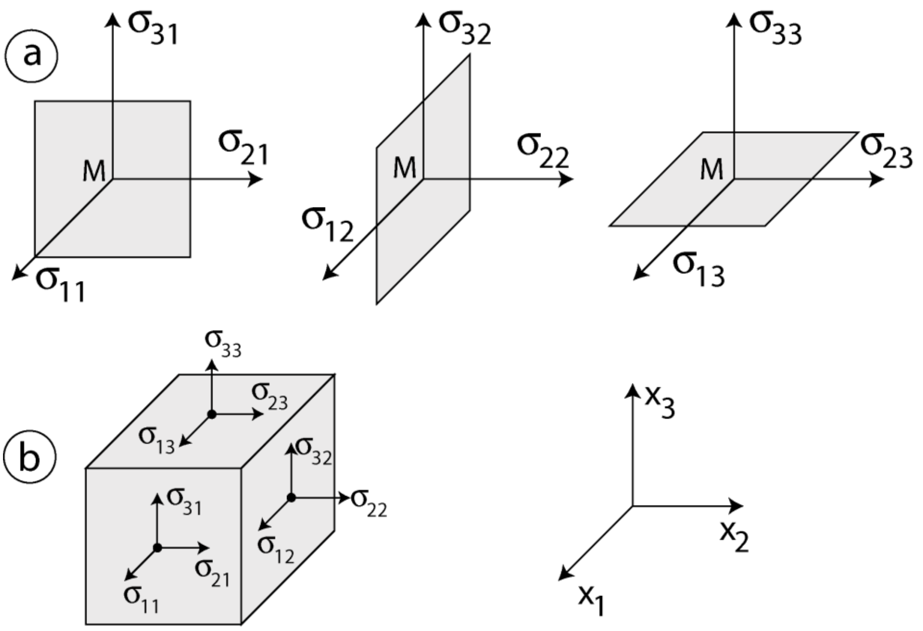


Obrázek 1. Těleso na které působí vnější síly.

Představme si, že těleso pomyslně rozřízneme podél nějaké roviny na dvě části, A a B a že bod M leží na této rovině. Kolem bodu M označíme elementární plošku dS, která je charakterizovaná svojí normálou $\vec{n}$. Aby bod M zůstal po odstranění části B na svém místě, nahradíme působení části B na plošku dS silou $d\vec{F}$. $\vec{T}$ se nazývá vektor napětí a je definován jako síla normovaná plochou:

$$\vec{T} = \frac{d\vec{F}}{dS}$$

Průmět $\vec{T}$ do $\vec{n}$ se nazývá normálové napětí a značí se σ, složka $\vec{T}$ ležící v dS se nazývá smykové napětí a značí se τ. Je ale jasné, že $\vec{T}$ nám neposkytuje celou informaci o stavu napětí v bodě M. Pokud bychom řízli těleso jinou rovinou procházející bodem M, zjistili bychom, že na element plochy v okolí M působí jiný vektor napětí. V našem 3D světě potřebujeme pomyslně rozřezat těleso třemi nezávislými rovinami a dostaneme tedy 3 vektory napětí, každý o 3 složkách. Je samozřejmě nejjednodušší volit tyto plošky vzájemně kolmé a zkombinovat 3 získané vektory napětí do jedné veličiny, tenzoru napětí $\overline{\overline{\sigma}}$, který lze napsat jako matice 3x3. Obr. 2 ukazuje definici jednotlivých složek tenzoru napětí σ_{ij} v případě kartézských souřadnic. Je vidět, že v diagonále $\overline{\overline{\sigma}}$ jsou normálové složky, zatímco mimo diagonálu jsou složky smykové.



$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

často lze také vidět zápis:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

Obrázek 2. Složky tenzoru napětí.

Bez odvození zatím akceptujeme, že deformace způsobené takovým tenzorem napětí můžeme napsat také jako tenzor 2. řádu vyjádřený maticí ε_{ij}.

<u>Poznámky:</u>
1. U normálových složek napětí i deformace je nutné rozlišovat znaménko: kladné hodnoty v případě tahu, záporné v případě komprese. U smykových složek je znaménko pouze otázkou volby souřadného systému.
2. Při setkání s termínem "napětí" (nebo "deformace") je třeba být obezřetný; může být míněna veličina tenzorová nebo vektorová nebo skalární. Např. u tahového diagramu, pokud směr tahu je rovnoběžný s osou x, se na osu y vynáší složka σ_{xx} (ostatní složky jsou nulové) a napětím je myšlena tato skalární složka.

Další (nepovinná) příprava: Vlastnosti tenzorů napětí a deformace

Lze ukázat, že $\overline{\overline{\sigma}}$ a $\overline{\overline{\varepsilon}}$ mají určité vlastnosti:

a) Pokud jsou momenty sil působících na malý element tělesa v rovnováze, musí být oba **tenzory symetrické** a mají tedy 6 nezávislých komponent: (σ_{11} , σ_{22} , σ_{33} , $\sigma_{12} = \sigma_{21}$, $\sigma_{13} = \sigma_{31}$, $\sigma_{23} = \sigma_{32}$).

b) Pokud jsou síly působící na element v rovnováze, lze odvodit podmínku pro oba tenzory nazývanou **Cauchyho rovnice rovnováhy**:

$$\sum_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0 ; \qquad i, j = 1, 2, 3$$

c) Pokud změníme zvolený souřadný systém v bodě M z (x, y, z) na (x', y', z'), hodnoty složek obou tenzorů se změní, ovšem 3 kombinace složek tenzorů zůstanou zachovány; říká se jim **invarianty** a označují se I_1, I_2, a I_3.

d) 1. invariant je **součet diagonály**, který zůstává při transformaci souřadnic stejný a u obou tenzorů má důležitý praktický význam:
součet $(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})/3 = P$ se nazývá průměrný anebo hydrostatický tlak;
součet $\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \Delta V/V_0$ má význam relativní změny objemu.

Tenzor napětí se někdy rozděluje na dvě složky:

$\overline{\overline{\sigma}} = \overline{\overline{P}} + \overline{\overline{D}}$, kde $\overline{\overline{P}} = \begin{pmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix}$ se nazývá rovnoměrný tenzor napětí a $\overline{\overline{D}}$ je deviátor napětí.

e) Další dva invarianty nebudeme uvádět, uvedeme však tzv. **von Misesovo napětí**, které je také invariantní; nazývá se někdy také ekvivalentní nebo zobecněné napětí σ_k:

$$\sigma_k = \left\{ \frac{1}{2} \left[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 \right] + 3\left(\sigma_{12}{}^2 + \sigma_{13}{}^2 + \sigma_{23}{}^2 \right) \right\}^{1/2}$$

f) Pro jakýkoliv (rovnovážný) stav napětí lze najít takové kartézské souřadnice, ve kterých má tenzor napětí nenulové složky pouze v diagonále. Souřadné osy se v tomto případě nazývají **hlavní osy** a diagonální složky napětí se nazývají **hlavní napětí**.

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

Pořadí složek hlavního napětí je zvykem volit takto: $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.

Poznámka: *Při transformaci souřadnic je vždy nutné použít matice transformace A:*

$$\bar{\bar{\sigma}}' = A\,\bar{\bar{\sigma}}\,A^T$$

Nelze upravovat matici $\bar{\bar{\sigma}}$ na diagonální tvar jinými úpravami známými z úprav matic (např. odečítání řádků). Nalezení hlavních os proto není triviální.

1. krok výpočtu: Uhodneme deformaci tělesa a napíšeme vektor přemístění

Typický analytický výpočet stavu napětí začíná stanovením předpokladů o tvaru deformovaného tělesa a napsáním rovnic pro vektor přemístění $\vec{u}$. Vektor přesunutí $\vec{u}(x,y,z)$ je vektor spojující bod A a A', kde bod A je libovolný bod tělesa před započetím působení vnějších sil a bod A' je poloha tohoto bodu po deformaci tělesa. Vnější tvar tělesa určují (někdy) okrajové podmínky, jak se přemísťují body uvnitř tělesa je nutné odhadnout. Pokud je tento odhad proveden správně, další postup už spočívá v dosazení do známých rovnic. Zásadně volíme souřadný systém, který odpovídá symetrii problému; odvážný inženýr z válcových nebo sférických souřadnic nemá obavy, viz příklady na konci tohoto textu. Pokud odhad $\vec{u}$ nemůže být proveden, výpočet je pak obtížnější a překračuje rámec tohoto textu.

2. krok výpočtu: Ze známého $\vec{u}$ vypočítáme tenzor deformace

Pro výpočet složek tenzoru deformace ze známého vektoru přemístění existují vzorečky, tento krok tedy lze provést velmi snadno. Tyto vzorečky se liší pro různé typy souřadnic.

Kartézské souřadnice (x, y, z):

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = \varepsilon_{ji}$$

Válcové souřadnice (r, θ, z):

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \qquad \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\left(u_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\right) \qquad \varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta}\right)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \qquad \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}\right)$$

Sférické souřadnice (r, θ, ϕ):

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \qquad \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \qquad \varepsilon_{\theta\phi} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} - u_\phi \operatorname{cotg}\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial \phi}\right]$$

$$\varepsilon_{\phi\phi} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_\theta}{r}\operatorname{cotg}\theta + \frac{u_r}{r} \qquad \varepsilon_{r\phi} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial \phi} + \frac{\partial u_\phi}{\partial r} - \frac{u_\phi}{r}\right)$$

3. krok výpočtu: Pomocí Hookova zákona vypočítáme tenzor napětí
Pokud je materiál izotropní, je popsán dvěma nezávislými elastickými konstantami. Používá se dvojice (λ, G) anebo (E, ν), kde λ je jeden z Lamého koeficientů, G je modul ve smyku, E je Youngův modul a ν je Poissonovo číslo. Hookův zákon potom nabývá stejného tvaru ve všech souřadných systémech:

$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \lambda I_1 \delta_{ij}$ (elastické konstanty λ, G)

$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{ij} + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} I_1 \delta_{ij}$ (elastické konstanty E, ν)

kde $I_1 = \frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$

a δ_{ij} je Kroneckerův symbol: $\delta_{ij} = 1$ pro $i = j$
$\delta_{ij} = 0$ pro $i \neq j$.

Poznámky:

1. Při výpočtu tenzoru deformace musíme použít různé vzorečky pro různé souřadné systémy, zatímco Hookův zákon je jen jeden. Je to tím, že Hookův zákon používáme pro výpočet napětí v jednom bodě. V jednom bodě jsou 3 kartézské, 3 válcové i 3 sférické souřadnice na sebe kolmé; "zahnutí" úhlových souřadnic u válcových a sférických souřadných systémů se v jednom bodě neprojeví.

2. Obecný Hookův zákon spojuje tenzor napětí a tenzor deformace takto:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$$

C_{ijkl} je tenzor elastických konstant. Jeho složky mají jednotku [Pa]. Protože existuje jedna elastická konstanta mezi každou z 6 složek tenzoru napětí a 6 složek tenzoru deformace, obecně existuje 36 složek napětí. Aplikace prvního termodynamického zákona na výpočet elastické energie uložené v materiálu dále zmenšuje počet nezávislých složek tenzoru $\overline{\overline{C}}$ na 21. Tolik nezávislých elastických složek má anisotropický materiál bez další symetrie.

3. Pokud se jedná o krystalický materiál, operace symetrie jeho mřížky dále omezují počet nezávislých složek tenzoru $\overline{\overline{C}}$: u hexagonálních krystalů na 5, u kubických krystalů na tři a v případě izotropního materiálu na dvě (C_{1111} a C_{2323}). Za izotropní materiál lze považovat polykrystal s jakoukoli mřížkou, pokud je bez textury a zrna jsou dostatečně malá vzhledem k uvažovanému tělesu.

4. Při tahové zkoušce se používá Hookův zákon ve tvaru $\sigma = E\varepsilon$. Jde o vyjádření vztahu mezi normálovými složkami obou tenzorů; pokud je osa napětí rovnoběžná s osou x, jedná se o $\sigma_{xx} = E\,\varepsilon_{xx}$. Tenzor napětí má nenulovou pouze složku σ_{xx}, ale tenzor deformace má nenulové všechny tři složky v diagonále, existuje proto další rovnice, která také vyplývá z obecného Hookova zákona:

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = -\nu\varepsilon_{xx} = -\nu/E\,\sigma_{xx}.$$

4. krok výpočtu: Vazba mezi vnějšími silami a momenty a stavem napětí
3. krokem často tyto výpočty končí, někdy ovšem chceme navíc napsat rovnice mezi vnějšími silami a/nebo momenty a tenzorem napětí v tělese. V tomto případě se typicky vnější síla nebo moment vyrovnává s vnitřními silami nebo momenty v tělese způsobenými deformací, viz kapitola Příklady.

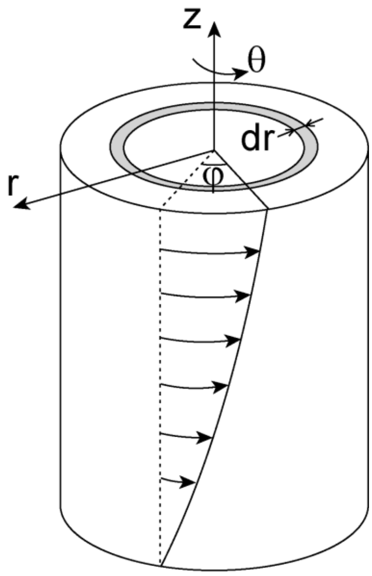
PŘÍKLADY

1. Válec v torzi

Válec o délce L a poloměru R je podroben torzi, jeho horní strana je stočena o úhel φ.

1. krok: Podle symetrie problému zvolíme válcové souřadnice. Budeme předpokládat, že při torzi se jednotlivé body posunují po kružnici kolem osy z. Souřadnice z a r se tedy nemění, tedy $u_r = u_z = 0$. Z obrázku vidíme, že u_θ je úměrné φ a r a že přemístění závisí na z: pro z = 0 (spodní strana) je přemístění nulové, pro z = L (horní strana) je přemístění největší. Proto

$u_r = 0$
$u_z = 0$
$u_\theta = r\,\varphi\, z/L$



2. krok: Tím je úloha prakticky vyřešena; zbývá použít rovnice pro výpočet $\overline{\overline{\varepsilon}}$:

$$\varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta}\right) = r\varphi / 2L, \qquad \text{ostatní } \varepsilon_{ij} = 0$$

3. krok: a pak aplikujeme Hookův zákon:

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \lambda I_1 \delta_{ij}; \qquad \sigma_{\theta z} = 2G\, r\, \frac{\varphi}{2L} = Gr\varphi / L, \text{ ostatní } \sigma_{ij} = 0$$

Dostali jsme výsledek ve válcových souřadnicích.

4. krok: Pokud neznáme úhel φ, ale moment působící na horní stranu M_{ext}, musíme vypočítat vnitřní moment, který v materiálu způsobují elastická napětí $\sigma_{\theta z}$ a položit

$$M_{int} = M_{ext}$$

Výpočet M_{int}:

$$dM_{int} = dF \times r = \sigma_{\theta z}\, dS \times r$$

Jako element dS můžeme zvolit mezikruží o obvodu $2\,\pi\, r$ a šířce dr:

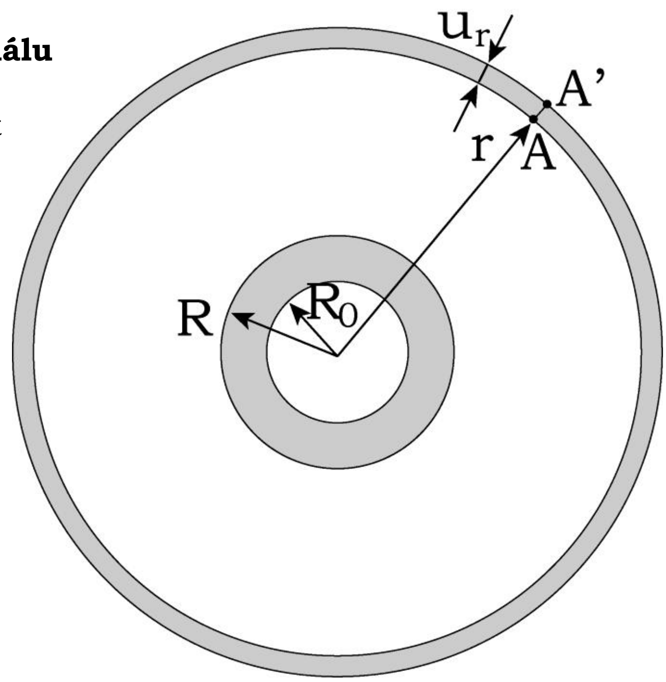
$$dM_{int} = \sigma_{\theta z}\, 2\,\pi\, r dr \times r = \frac{1}{L} G\varphi 2\pi r^3\, dr$$

a integrací:

$$M_{ext} = M_{int} = \frac{1}{L} G\varphi 2\pi \int_0^R r^3\, dr = \frac{1}{L} G\varphi \frac{\pi}{2} R^4$$

Našli jsme řešení: známe tenzor napětí v tělese a vztah mezi aplikovaným momentem a torzním úhlem φ. Podle očekávání výsledek závisí na tvaru válce (R, L) a modulu ve smyku G.

Poznámka: *Předpoklad, že jednotlivé body zůstávají při torzi ve stejné výšce z a že nemění svoji vzdálenost od středu (tedy že u_r a $u_z = 0$) platí jen pro případ kruhového průřezu (válec nebo trubka). Pro některé jiné tvary tělesa lze výpočet provést jiným způsobem, v případě komplikovanějšího tvaru průřezu nezbývá než použít metodu konečných prvků.*



2. Růst precipitátu v nestlačitelném materiálu

V původně jednofázovém materiálu vyrostl v místě myšlené koule o průměru R_0 precipitát o poloměru R (např. díky difúzi C vytvořil materiál o poloměru R_0 karbid) a vytlačil okolní materiál dále od středu precipitátu. Tím precipitát způsobil v okolí pole deformace a napětí.

1. krok

Podle symetrie problému použijeme sférické souřadnice (r, θ, ϕ). Předpokládáme, že materiál je nestlačitelný, a že přemístění materiálu probíhá jen ve směru od středu precipitátu, tj. $u_\theta = u_\phi = 0$.
Složku u_r vypočítáme z rovnosti objemů, které jsou na obrázku vyznačeny šedou:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}R_0^3 = \frac{4}{3}\pi(r+u_r)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3$$
$$R^3 - R_0^3 = 3u_r r^2 + 3u_r^2 r + u_r^3$$

Protože u_r je malé ve srovnání s r, členy s u_r^2 a u_r^3 lze zanedbat a tedy

$$u_r = \frac{R^3 - R_0^3}{3r^2}$$

2. krok

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} = -\frac{2}{3}\frac{R^3 - R_0^3}{r^3}$$
$$\varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\phi\phi} = 0 + \frac{u_r}{r} = \frac{R^3 - R_0^3}{r^3}$$

Kontrola: vidíme, že podmínka nestlačitelnosti je splněna:

$$I_1 = \frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{\phi\phi} = 0$$

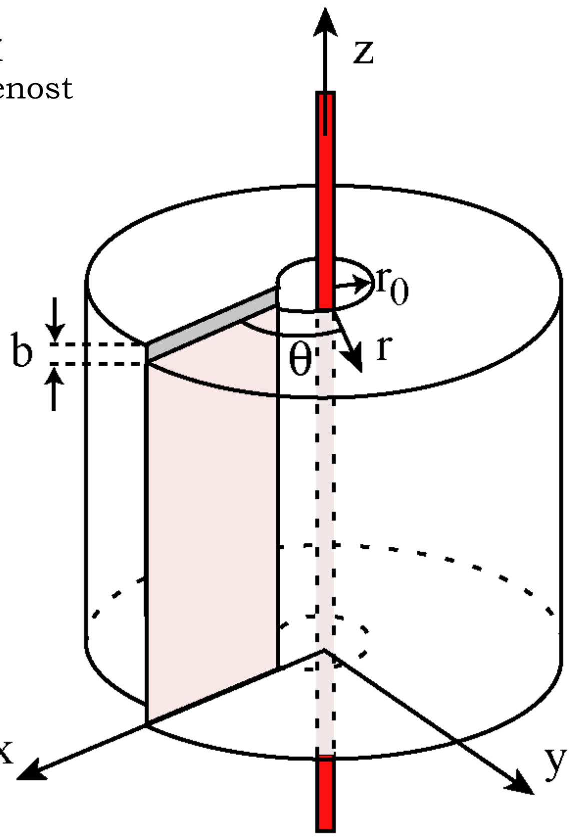
3. krok

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{(1+\nu)}\left(-\frac{2}{3}\frac{R^3 - R_0^3}{r^3}\right)$$

Napětí vzniklé v důsledku růstu precipitátu klesá velmi rychle, s třetí mocninou vzdálenosti. Normálové napětí σ_{rr} je záporné, materiál je tedy v kompresi.

3. Pole napětí kolem šroubové dislokace

Šroubová dislokace způsobuje vzájemné posunutí dvou částí krystalu podél skluzové roviny o vzdálenost b, jak je ukázáno na obrázku.



1. krok: Podle symetrie problému zvolíme válcové souřadnice. Budeme hledat řešení pro $r > r_0$; oblast v těsném okolí dislokace se nazývá jádro dislokace. Předpoklad: materiál se deformuje smykem podél smykové roviny a proto $u_r = u_\theta = 0$. Posunutí v ose z narůstá v závislosti na úhlu θ od 0 pro θ = 0, do b pro θ = 2π a tedy:

$$u_z = \frac{b}{2\pi}\theta$$

2. krok: Z rovnic rovnice pro výpočet $\bar{\bar{\varepsilon}}$:

$\varepsilon_{\theta 3} = \varepsilon_{3\theta} = \dfrac{b}{4\pi r}$, ostatní složky nulové.

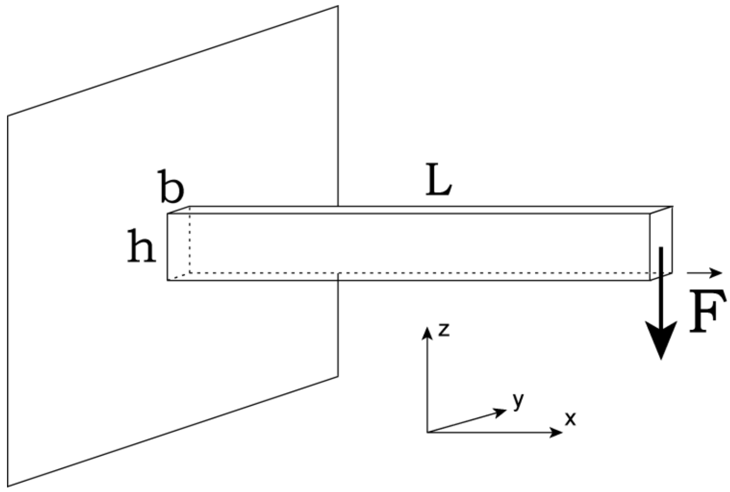
3. krok: Z Hookova zákona:

$\sigma_{\theta z} = \sigma_{z\theta} = \dfrac{Gb}{2\pi r}$, ostatní složky nulové.

Řešení je do jisté míry překvapující: napětí v materiálu způsobené přítomností šroubové dislokace klesá se vzdáleností r od dislokace velmi pomalu, jen jako 1/r. Srovnejte s poklesem napětí kvůli přítomnosti precipitátu!

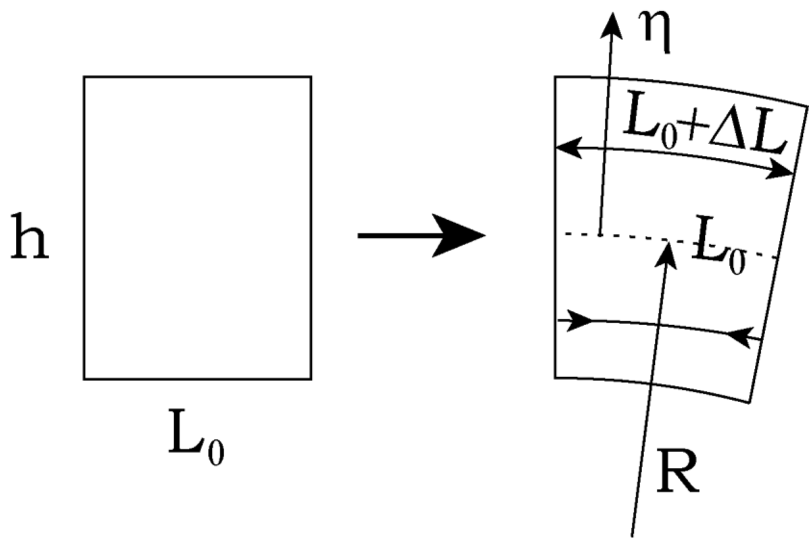
4. Vetknutý nosník

Nosník obdélníkového průřezu (b x h) a délce L je vetknutý na jedné straně do zdi (x = 0) a na druhé straně (x = L) na něj působí síla $\vec{F}$. Ostatní síly (např. vlastní tíhu nosníku) zanedbáme.



<u>1. a 2. krok</u>

Uděláme následující předpoklady o tvaru nosníku po zatížení podle následujícího obrázku, který ukazuje segment nosníku z <u>bočního</u> pohledu: malý segment nosníku původně obdélníkového tvaru změnil tvar podle obrázku, kde horní a dolní povrch má tvar části kružnice (stejně jako myšlená, původně přímková, vlákna v materiálu).



Obrázek: Boční pohled na segment nosníku.

Předpokládejme, že:
- na neutrální rovině procházející středem nosníku je nulové prodloužení a zakřivení této roviny je dáno poloměrem R;
- vlákna nad touto rovinou jsou deformovány v tahu, pod rovinou v kompresi;
- průřez nosníku se nemění (tento předpoklad by platil přesně jen pro $\nu = 0$).

Bude nás zajímat pouze jediná složka tenzoru deformace, normálová složka ve směru nejdelší osy nosníku ε_{xx} a pro její výpočet použijeme přibližný vztah:

$\varepsilon_{xx} = \Delta L/L_0$

Vzdálenost od neutrální roviny označíme η, orientace η viz. obrázek. Potom:

$L = \Delta L + L_0 = (R + \eta)\,\varphi$; $L_0 = R\,\varphi$ a tedy

$\varepsilon_{xx} = \Delta L/L_0 = \eta\,\varphi \,/\, R\,\varphi = \eta/R$

<u>3. krok</u>

Z Hookova zákona: $\sigma_{xx} = E\,\eta/R$

Získali jsme závislost normálového napětí v nosníku na R a na vzdálenosti od neutrální roviny. Vidíme, že napětí ve vlákně roste přímo úměrně s η a je tahové pro $\eta > 0$ a tlakové pro $\eta < 0$. Největší tahové napětí $\sigma_{xx,max}$ je na vnějším okraji nosníku, tedy pro $\eta = h/2$: $\sigma_{xx,max} = Eh/2R$.

4. krok

R ovšem není dáno v zadání, závisí na poloze segmentu a na aplikovaných silách. V tomto případě konstruktéra zajímá především 1. maximální napětí v nosníku a 2. jeho tvar při zatížení. Tato úloha se řeší spočtením vnějšího momentu M_{ext}, vzniklého díky aplikovaným silám, a vnitřního momentu M_{int}, který vzniká v materiálu díky jeho deformaci. Až dosud velmi snadný výpočet se nyní komplikuje.

V tomto konkrétním případě je moment aplikovaných sil:
M_{ext} = síla x rameno = F (L – x), x je poloha segmentu,

a vnitřní moment:
$dM_{int} = \eta dF = \eta \sigma_{xx} dS$,
kde dS je element plochy v rovině yz.

V nejjednodušším případě konstantního obdélníkového průřezu o šířce b je
$dM_{int} = \eta\sigma_{xx}\, b\, d\eta = \frac{bE}{R}\eta^2 d\eta$ a integrací

$$M_{int} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{bE}{R}\eta^2 d\eta = \frac{bE}{12R}h^3$$

Pokud b není konstantní a mění se s η, je zvykem psát:

$$M_{int} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{bE}{R}\eta^2 d\eta = \frac{E}{R}\int_{-h/2}^{h/2} b\eta^2 d\eta = \frac{E}{R}I,$$

integrál I je moment setrvačnosti průřezu vzhledem k jeho vodorovné ose.

Segment je ohnut natolik, že vnitřní moment M_{int} je v rovnováze s M_{ext}, tedy:
$M_{int} = M_{ext}$

$$\frac{bE}{12R}h^3 = F(L-x)$$

Vidíme, že M_{ext} je maximální a R minimální (největší zakřivení) pro x = 0, tedy v místě upevnění nosníku. Z rovnice $\sigma_{xx,max} = Eh/2R$ můžeme vyjádřit $\sigma_{xx,max}$:
$\sigma_{xx,max} = \frac{6F(L-x)}{bh^2}$, pro x = 0 pak $\sigma_{xx,max} = \frac{6FL}{bh^2}$. To je první výsledek.

Rovnici pro tvar nosníku pak můžeme napsat, když položíme 1/R rovno $d^2\omega/dx^2$, kde ω je odchylka neutrální roviny od osy x. Bude se jednat o diferenciální rovnici druhého řádu:

obecně: $M_{int} = \frac{EI}{R} = M_{ext}$, $\frac{1}{R} = \frac{d^2\omega}{dx^2} = \frac{M_{ext}}{EI}$.