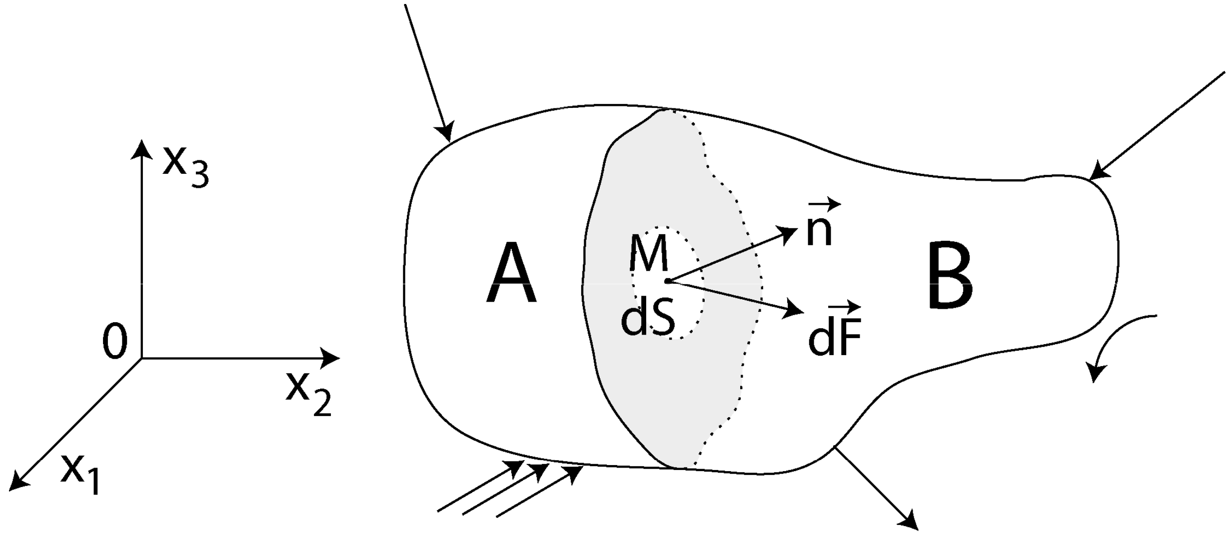
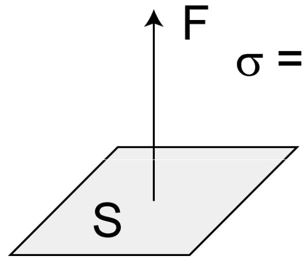
Napětí



$$\vec{T} = \frac{d\vec{F}}{dS}$$

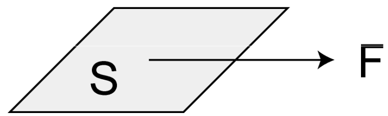
Homogenní izotropní kontinuum



$\sigma = F/S$

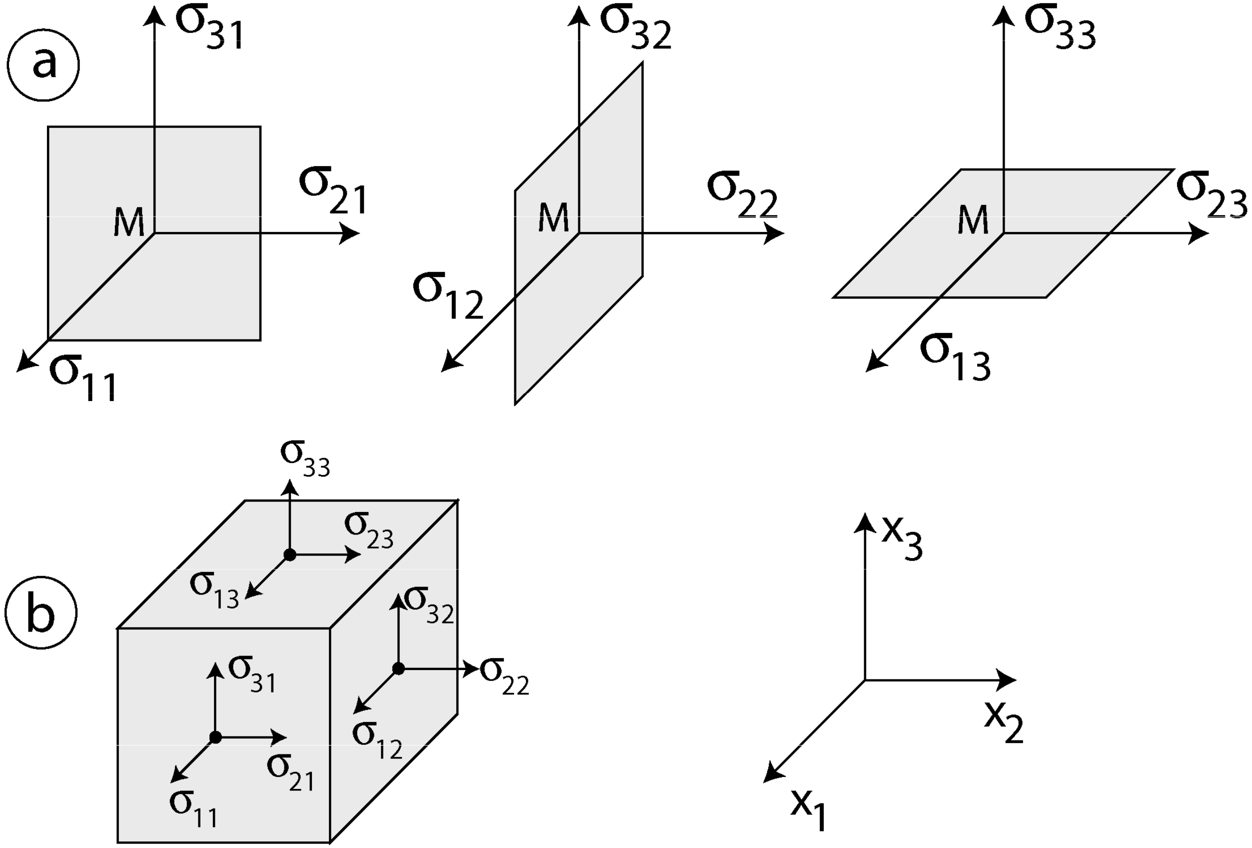
Normálová složka napětí (σ) je kolmá na zvolenou plošku.
Tah = kladné hodnoty, tlak = záporné hodnoty.

$\tau = F/S$



Smykové složky (τ) leží v rovině zvolené plošky,
znaménko je otázkou konvence

Napětí je tedy tenzor 2 řádu, pozor na literaturu: často se mluví o napětí jako skalární nebo vektorové veličině.



$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

Vlastnosti tenzoru napětí

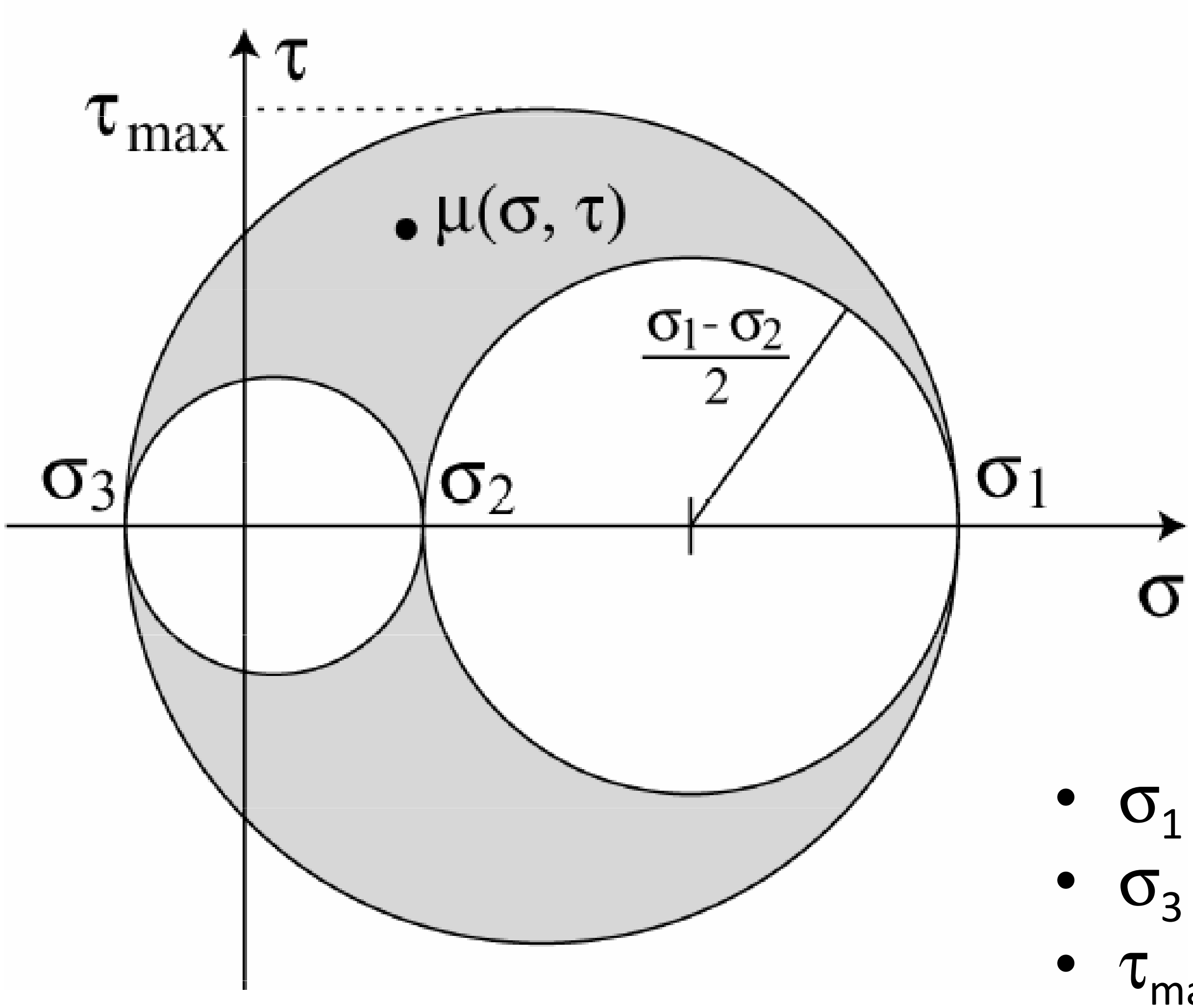
- Symetrický, tj. 6 nezávislých komponent
- Rovnice rovnováhy
- 3 invarianty při změně souřadného systému
- Vždy lze najít s.s., kdy je tenzor napětí diagonální – hlavní napětí
- Na volném povrchu jsou všechny složky napětí kolmé k povrchu nulové

$$\overline{\overline{\sigma}}\,' = A\,\overline{\overline{\sigma}}\,A^T$$

Příklad: Matice A pro přechod z válcových souřadnic do kartézských:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Mohrův diagram



- σ_1 – trhliny
- σ_3 – vzpěr
- τ_{max} – plastická deformace

Deformace

Při působení sil na těleso dochází k

- přemístění – nebudeme dále uvažovat
- rotaci π
- deformaci ε

$$\boxed{\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = \varepsilon_{ji}}$$

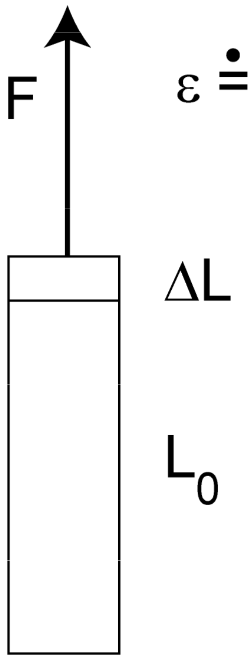
$$\boxed{\pi_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = -\pi_{ji}}$$

$\overrightarrow{u}$ je vektor přemístění

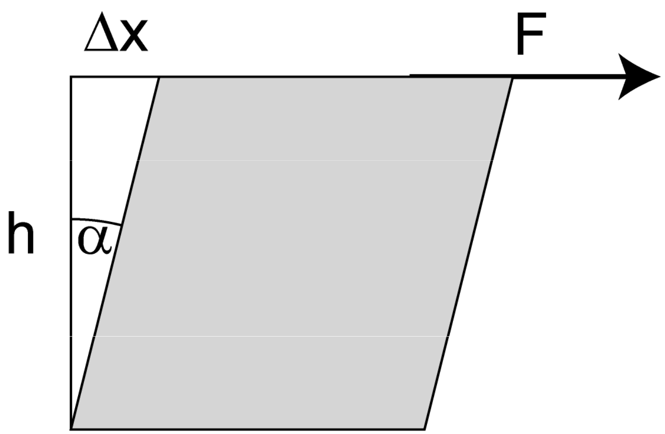
Vlastnosti tenzoru deformace

- Symetrický, tj. 6 nezávislých komponent
- Normálové a smykové složky
- Stejné 3 invarianty při změně souřadného systému jako u napětí
- Součet diagonály = relativní změna objemu

$$\varepsilon \doteq \Delta L/L_0$$



$$\gamma = \Delta x/h = \mathrm{tg}\,\alpha \sim \alpha$$



$$\gamma_{ij} = 2\,\varepsilon_{ij} \qquad i \neq j$$

Hookův zákon

- Pro tahovou zkoušku $\sigma_{11} = E\,\varepsilon_{11}$

- Obecný $\sigma_{ij} = \sum_{kl} C_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}$ $\varepsilon_{ij} = \sum_{kl} S_{ijkl}\,\sigma_{kl}$

  81 elastických konstant ? symetrie – 36, energetické úvahy: **21,**
  krystalové mřížky – další symetrie (hexa – 5, kubické – 3)

- Pro izotropní materiál – 2 nezávislé elastické konstanty

$$\sigma_{ij} = 2G\,\varepsilon_{ij} + \lambda\,I_1\,\delta_{ij}$$

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu}\,\varepsilon_{ij} + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\,I_1\,\delta_{ij}$$

I_1 – první invariant tenzoru deformace = součet diagonály
δ_{ij} – Kroneckerovo delta

Elastické konstanty

z teorie (izotropní m.)

$C_{1111} = 2G + \lambda$

$C_{1122} = \lambda$

$C_{2323} = G$

z experimentu

$\sigma_{11} = E\,\varepsilon_{11}$

$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\,\nu\,\varepsilon_{11}$

$\tau = G\,\gamma$

$S_{1111} = 1/E$

$S_{1122} = -\,\nu/E$

$$\sigma_{ij} = 2G\,\varepsilon_{ij} + \lambda\, I_1\, \delta_{ij}$$

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{ij} + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} I_1\, \delta_{ij}$$

Obecná lineární elasticita

Hledané veličiny:
- 3 složky vektoru přesunutí **u**
- 6 složek tenzoru napětí
- 6 složek tenzoru deformace

Známé rovnice:
- 6 rovnic mezi **u** a ε
- 3 rovnice rovnováhy
- 6 rovnic Hookova zákona

15 neznámých … 15 rovnic

programy na výpočet ε, σ, **u** využívající metody konečných prvků

Všechny rovnice jsou lineární = princip superpozice

Jednoduché analytické výpočty

$$\begin{tikzcd} \vec{u} \arrow[r, bend left] & \bar{\bar{\varepsilon}} \arrow[l, bend left] \arrow[r, bend left] & \bar{\bar{\sigma}} \arrow[l, bend left] \arrow[r, bend left] & \vec{F} \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}$$

1. odhad tvaru tělesa po deformaci, tj. "uhodnutí" vektoru přemístění **u**
2. z **u** vypočítáme **ε**
3. z **ε** vypočítáme **σ**
4. pro vztah mezi **F** a **σ** se používají různé postupy