Př. 4.13B: Naleznite obecné řešení rovnice

$$y_{k+7}-2y_{k+6}+16y_{k+4}-32y_{k+3}+64y_{k+1}-128y_k=0$$

Ř.: Charakteristický polynom je

$$\lambda^7-2\lambda^6+16\lambda^4-32\lambda^3+64\lambda-128=0$$

jehož kořeny jsou („Horner")

$$\lambda_1=2,\ \lambda_2=\lambda_3=-2,\ \lambda_4=\lambda_5=1+\sqrt{3}i,\ \lambda_6=\lambda_7=1-\sqrt{3}i$$

Komplexní kořeny přepíšeme do goniometrického tvaru

$$\lambda_4=\lambda_5=1+\sqrt{3}i=\sqrt{1+3}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\begin{matrix}\alpha=1\\ \beta=\sqrt{3}\end{matrix} \Rightarrow \varphi=\operatorname{arctg}\frac{\beta}{\alpha}=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{1}=\frac{\pi}{3}$$

Obecné řešení $\{y\}$ proto je

$$y_k=C_1 2^k+C_2(-2)^k+C_3 k\cdot(-2)^k+C_4\cdot 2^k\cos\frac{k\pi}{3}+C_5\cdot k\cdot 2^k\cdot\cos\frac{k\pi}{3}+$$
$$+C_6 2^k\cdot\sin\frac{k\pi}{3}+C_7\cdot k\cdot 2^k\cdot\sin\frac{k\pi}{3}$$

pro $k\in\mathbb{Z}$ a $C_1,\dots,C_7\in\mathbb{R}$. ▲

Cv. 1

a) $y_{k+2}+y_k=0$ $\quad\left[\underset{1,0,-1,0,\dots}{C_1\cos\frac{k\pi}{2}}+\underset{0,1,0,-1,\dots}{C_2\sin\frac{k\pi}{2}}\right]$

[Prágerová, str. 67-79]

b) $y_{k+2}-3y_{k+1}+2y_k=0$ $\quad[C_1 2^k+C_2]$

c) $y_{k+1}=\frac{10}{3}y_k-y_{k-1},\ y_1=-2,\ y_2=0$ $\quad\left[\frac{1}{4}3^{k-1}-3^{3-k}\right]$

d) $y_{k+2} + 4y_k = 0$ $\quad [2^k(C_1\cos\frac{k\pi}{2} + C_2\sin\frac{k\pi}{2})]$

e) Fibonacci $y_{k+2} = y_{k+1} + y_k$, $y_0 = y_1 = 1$
(Př. 1.7)

$$\left[\frac{1}{\sqrt5}\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^k - \frac{1}{\sqrt5}\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^k\right]$$

f) $\Delta_{0,2}\, y_k + 9y_k = 0$ $\quad k \in \{0{,}1 + 0{,}2\cdot k\}_{k=0}^{\infty}$

$y_{0,5} = -3$ $\quad$ krok je jen $h = 0{,}2$

$$[y_k = -3(-8)^{k-2}]$$

g) $y_{k+4} - 8y_{k+2} + 16y_k = 0$ $\quad [(C_1+C_2k)2^k + (C_3+C_4k)(-2)^k]$

[Kobza, str. 37-42]

h) $y_{k+2} - 2y_{k+1} + 4y_k = 0$ $\quad [2^k(C_1\cos\frac{k\pi}{3} + C_2\sin\frac{k\pi}{3})]$

i) $y_{k+6} - 2y_{k+5} + 3y_{k+4} - 4y_{k+3} + 3y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k = 0$ $\quad [C_1 + C_2k + (C_3+C_4k)\cos\frac{k\pi}{2} + (C_5+C_6k)\sin\frac{k\pi}{2}]$

j) $y_{k+2} + y_{k+1} - 6y_k = 0$, $y_1 = -13$, $y_2 = -11$ $\quad [-5\cdot 2^k + (-3)^k]$

k) $y_{k+2} + 4y_{k+1} - 12y_k = 0$, $y_1 = -32$, $y_2 = 32$ $\quad [-5\cdot 2^{k+1} + 2\cdot(-6)^k]$

l) $y_{k+2} + 4y_{k+1} + 16y_k = 0$, $y_1 = 2$, $y_2 = -40$ $\quad [2\cdot 4^k\cdot\cos\frac{2k\pi}{3} + \sqrt3\cdot 4^k\cdot\sin\frac{2k\pi}{3}]$

m) $y_{k+2} = 9y_{k+1} - 18y_k$, $y_1 = 1$, $y_2 = 21$ $\quad [-5\cdot 3^{k-1} + 6^k]$

n) $y_{k+2} = 2y_{k+1} + 2y_k$, $y_1 = -1$, $y_2 = 1$ $\quad \left[\frac{9+5\sqrt3}{12}(1-\sqrt3)^k + \frac{9-5\sqrt3}{12}(1+\sqrt3)^k\right]$

o) $y_{k+2} = 2y_{k+1} - 2y_k$, $y_1 = 2$, $y_2 = -2$ $\quad \left[\sqrt{2}^k \left(3\cos\frac{k\pi}{4} - \sin\frac{k\pi}{4}\right)\right]$

p) $y_{k+3} + 8y_k = 0$ $\quad \left[C_1(-2)^k + C_2 2^k \cos\frac{k\pi}{3} + C_3 2^k \sin\frac{k\pi}{3}\right]$

q) $y_{k+3} - 12y_{k+2} + 48y_{k+1} - 64y_k = 0$ $\quad \left[C_1 4^k + C_2 k 4^k + C_3 k^2 4^k\right]$

r) $y_{k+3} - 5y_{k+2} - 4y_{k+1} + 20y_k = 0$ $\quad \left[C_1 2^k + C_2(-2)^k + C_3 5^k\right]$

s) $y_{k+3} - 3y_{k+2} + 4y_{k+1} - 12y_k = 0$ $\quad \left[C_1 2^k \cos\frac{k\pi}{2} + C_2 2^k \sin\frac{k\pi}{2} + C_3 3^k\right]$

t) $y_{k+4} - 2y_{k+2} + y_k = 0$ $\quad \left[C_1 + C_2 k + C_3(-1)^k + C_4 k(-1)^k\right]$

u) $\Delta^2 y_k - \Delta y_k = 0$ $\quad \left[C_1 + C_2 2^k\right]$

v) $\Delta^3 y_k + 3\Delta^2 y_k + 3\Delta y_k = 0$ $\quad \left[C_1 + C_2 \cos\frac{2k\pi}{3} + C_3 \sin\frac{2k\pi}{3}\right]$

(Elaydi, p. 80-81)

w) Nalezněte homogenní diferenční rovnice, jejichž řešení jsou

i) $2^{k-1} - 5^{k+1}$

ii) $3\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)$

iii) $(k+2)5^k \sin\left(\frac{k\pi}{4}\right)$

iv) $(C_1 + C_2 k + C_3 k^2)7^k$

v) $1 + 3k - 5k^2 + 6k^3$

x) Nalezněte homogenní diferenční rovnici 2. řádu, jejíž řešení generuje posloupnost

$1, 2, 5, 12, 29, \ldots$ Poté udejte explicitní předpis pro tuto posloupnost.

[$-\Delta k \cdot 150-$

y) Uvažme integrál

$$I_k(\varphi) := \int_0^{\pi} \frac{\cos(k\theta) - \cos(k\varphi)}{\cos\theta - \cos\varphi}\, d\theta, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \ \varphi \in \mathbb{R}.$$

i) Ukažte, že platí

$$I_{k+2}(\varphi) - 2\cos\varphi\, I_{k+1}(\varphi) + I_k(\varphi) = 0, \quad I_0(\varphi) = 0, \quad I_1(\varphi) = \pi.$$

ii) Nalezněte explicitní řešení diferenční rovnice z předchozí části.

z) Čebyševovy polynomy 1. a 2. druhu jsou definovány jako

$$T_k(x) := \cos(k \cdot \arccos x), \quad U_k(x) := \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sin[(k+1)\arccos x], \quad |x| < 1.$$

i) Ukažte, že pro $k \in [0,\infty)_{\mathbb{Z}}$ platí

$$T_{k+2}(x) - 2x\, T_{k+1}(x) + T_k(x) = 0, \quad T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x,$$

$$U_{k+2}(x) - 2x\, U_{k+1}(x) + U_k(x) = 0, \quad U_0(x) = 0, \quad U_1(x) = 2x.$$

ii) Nalezněte explicitní řešení těchto diferenčních rovnic.

iii) Ukažte, že $T_k(\cos\theta) = \cos k\theta$ a

$$U_k(\cos\theta) = \frac{\sin(k+1)\theta}{\sin\theta}$$

iv) Ukažte, že obecné řešení rovnice

$$y_{k+2} - 2s \cdot y_{k+1} + y_k = 0, \quad |s| < 1,$$

je tvaru

$$y_k = C_1 T_k(s) + C_2 U_k(s).$$

iia) Ukažte, že Čebyševovy polynomy jsou na $(-1,1)$ ortogonální vzhledem k $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, tj.

$$\int_{-1}^{1} T_i(x) T_j(x) w(x)\, dx = 0$$

pro všechna $i \neq j$.

v) Ukažte, že obecné řešení rovnice

$$y_{k+2} + a^{[1]} \cdot y_{k+1} + a^{[0]} y_k = 0$$

je pro $a^{[0]}>0$ & $(a^{[1]})^2<4a^{[2]}$ tvar

$$y_k = r^k\left[c_1 T_k(s) + c_2 U_k(s)\right],$$

kde $r := \sqrt{a^{[0]}}$ & $s := \dfrac{a^{[1]}}{2\sqrt{a^{[0]}}}$.

Z1) Lucasova čísla jsou velmi úzce spojena s Fibonacciho čísly.

Lucasova čísla splňují

$$L_{k+2} = L_{k+1} + L_k, \quad L_0 = 2, \; L_1 = 1.$$

Naleznete explicitní předpis pro Lucasova čísla.

[Kelley & Peterson, pg. 111-

Z2) $y_{k+2} + 6y_{k+1} + 3y_k = 0$

Z3) $y_{k+3} - 4y_{k+2} + 5y_{k+1} - 2y_k = 0$

Z4) $y_{k+4} - 8y_{k+2} + 16y_k = 0$

Z5) $y_{k+2} - 8y_{k+1} + 32y_k = 0$

Z6) $y_{k+4} + 2y_{k+2} + y_k = 0$

Z7) $y_{k+6} + 2y_{k+3} + y_k = 0$

Z8) Naleznete homogenní diferenční rovnici s konstantními koeficienty, jejíž jedno řešení je

i) $(k+\sqrt{2})^2$

ii) k^5

iii) $k(-3)^k$

iv) $\dfrac{\sin\frac{2k\pi}{3}}{2^k}$