[Elaydi, pg. 87]

**Př. 4.14B:** Vyřešte

$$y_{k+2} - y_{k+1} - 6y_k = 5 \cdot 3^k. \qquad (*)$$

**Ř.:** Charakteristická rovnice

$$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$$

má kořeny $\lambda_1 = 3$ a $\lambda_2 = -2$. Pravá strana $f_k = 5 \cdot 3^k$ odpovídá volbě $m = 0$, $c = 3$ a $\varphi = 0$. Jelikož $c \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi) = 3 \cdot (\cos 0 + i \sin 0) = 3 = \lambda_1$, je partikulární řešení $\{y^{[p]}\}$ tvaru

$$y_k^{[p]} = k \cdot 3^k \left[ A \cdot \cos 0k + B \cdot \sin 0k \right] = k \cdot 3^k \cdot A.$$

Po dosazení do $(*)$ dostaneme

$$(k+2)3^{k+2} A - (k+1)3^{k+1} \cdot A - 6 \cdot k \cdot 3^k \cdot A = 5 \cdot 3^k \,/ : 3^k$$

$$(k+2) \cdot 9A - (k+1)3A - 6kA = 5$$

$$\Downarrow$$

$k^0$: $18A - 3A = 5 \Rightarrow 15A = 5 \Rightarrow A = \frac{1}{3}$

$k^1$: $9A - 3A - 6A = 0$ ✓

Partikulární řešení tedy je

$$y_k^{[p]} = \frac{1}{3} \cdot k \cdot 3^k = k \cdot 3^{k-1},$$

takže obecné řešení rovnice $(*)$ je

$$\underline{y_k = C_1 3^k + C_2 (-2)^k + k \cdot 3^{k-1}}. \qquad \blacktriangle$$

[Elaydi, pg 87]

Př. 4.14 c: Vyřešte

$$y_{k+2} + 4y_k = 8\cdot 2^k \cdot \cos\frac{k\pi}{2}. \quad (*)$$

Ř: Charakteristická rovnice

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

má kořeny $\lambda_{1,2} = \pm 2i$. Pravá strana $f_k = 8\cdot 2^k \cdot \cos\frac{k\pi}{2}$ odpovídá volbě $m=0$, $c=2$ a $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Jelikož $c(\cos\varphi + i\sin\varphi) = 2(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = 2i = \lambda_1$, je partikulární řešení $\{y^{[p]}\}$ tvaru

$$y_k^{[p]} = k\cdot 2^k\left(A\cdot\cos\frac{k\pi}{2} + B\cdot\sin\frac{k\pi}{2}\right).$$

Po dosazení do $(*)$ dostaneme

$$(k+2)\,2^{k+2}\left(A\cdot\cos\frac{(k+2)\pi}{2} + B\cdot\sin\frac{(k+2)\pi}{2}\right) + 4\cdot k\cdot 2^k\left(A\cos\frac{k\pi}{2} + B\sin\frac{k\pi}{2}\right) =$$

$$= 8\cdot 2^k\cdot\cos\frac{k\pi}{2} \quad /:2^k$$

$$4(k+2)\left(A\cdot\underbrace{\cos\left(\frac{k\pi}{2}+\pi\right)}_{-\cos\frac{k\pi}{2}} + B\cdot\underbrace{\sin\left(\frac{k\pi}{2}+\pi\right)}_{-\sin\frac{k\pi}{2}}\right) + 4k\left(A\cdot\cos\frac{k\pi}{2} + B\cdot\sin\frac{k\pi}{2}\right) = 8\cdot\cos\frac{k\pi}{2}$$

$$-4k\left(A\cos\frac{k\pi}{2} + B\sin\frac{k\pi}{2}\right) - 8\left(A\cdot\cos\frac{k\pi}{2} + B\sin\frac{k\pi}{2}\right)$$

$$+4k\left(A\cdot\cos\frac{k\pi}{2} + B\sin\frac{k\pi}{2}\right) = 8\cdot\cos\frac{k\pi}{2}$$

$\Downarrow$

$\cos\frac{k\pi}{2}$: $-8A = 8 \Rightarrow A = -1$

$\sin\frac{k\pi}{2}$: $-8B = 0 \Rightarrow B = 0$

Partikulární řešení je $y_k^{[p]} = -k\cdot 2^k\cdot\cos\frac{k\pi}{2}$,

takže obecné řešení rovnice $(*)$ je $y_k = 2^k\left(C_1\cos\frac{k\pi}{2} + C_2\sin\frac{k\pi}{2} - k\cdot\cos\frac{k\pi}{2}\right)$.

[Kobza str. 43-49]

Neurčité koeficienty a/nebo variace konstant

Cv.1 a) $y_{k+2}-8y_{k+1}+15y_k=130\sin\frac{k\pi}{2}$

[$C_1 3^k+C_2 5^k+7\cdot\sin\frac{k\pi}{2}+4\cos\frac{k\pi}{2}$]

b) $y_{k+2}+6y_{k+1}+9y_k=(4k^2+4k)(-3)^{k+3}$

[$C_1(-3)^k+C_2\cdot k(-3)^k+k^2(-k^2+2k+1)(-3)^k$]

c) $y_{k+2}-6y_{k+1}+5y_k=2^{2k+1}-7\cdot5^k$

[$C_1+C_2 5^k-\frac{2}{3}\cdot4^k-\frac{7}{20}k\cdot5^k$]

d) $y_{k+2}-3y_{k+1}-4y_k=12k^2-2k+15$ [$C_1(-1)^k+C_2 4^k-2k^2+k-3$]

e) $y_{k+2}-7y_{k+1}+10y_k=-260\cos\frac{k\pi}{2}$ [$C_1 2^k+C_2 5^k+14\sin\frac{k\pi}{2}-18\cos\frac{k\pi}{2}$]

f) $y_{k+2}+6y_{k+1}+9y_k=2(3k+2)(-3)^{k+2}$

[$(C_1+C_2k)(-3)^k+k^2(k-1)(-3)^k$]

g) $9y_{k+2}-12y_{k+1}+4y_k=3-2k$ [$(C_1+C_2k)(\frac{2}{3})^k-2k+15$]

h) $2y_{k+1}-6y_k=3^k-k\cdot2^{-k}$ [$C_1 3^k+\frac{k}{2}\cdot3^{k-1}+(\frac{k}{5}+\frac{1}{25})2^{-k}$]

i) $y_{k+2}-5y_{k+1}+6y_k=3^k-k$ [$C_1 2^k+C_2 3^k+k\cdot3^{k-1}-\frac{k}{2}-\frac{3}{4}$]

j) $y_{k+2}-10y_{k+1}+25y_k=5^k-2k$ [$(C_1+C_2k)5^k+\frac{k^2}{50}\cdot5^k-\frac{k}{8}-\frac{1}{16}$]

[Elaydi pg. 88-90]

k) $y_{k+2}-5y_{k+1}+6y_k=1+k$

l) $y_{k+2}+8y_{k+1}+12y_k=e^k$

m) $y_{k+2}-5y_{k+1}+4y_k=4^k-k^2$

n) $y_{k+2}+8y_{k+1}+7y_k = k e^k$

o) $y_{k+2}-y_k = k\cdot\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)$

p) $y_{k+4}+2y_{k+2}+y_k = \sin\frac{k\pi}{2}-\cos\frac{k\pi}{2}$

q) $\Delta^2 y_k = 0,\ y_0=2,\ y_1=3$

r) $\Delta^2 y_k + 7y_k = J\sin\frac{k\pi}{4},\ y_0=0,\ y_1=1$

s) $y_{k+3}-3y_{k+2}+y_{k+1}-3y_k = 3^k,\ y_0=0,\ y_1=1,\ y_2=3$

t) $y_{k+2}-y_k = k\cdot 2^k\cdot\sin\frac{k\pi}{2}$

u) $y_{k+2}+8y_{k+1}+7y_k = k\cdot 2^k$

v) $y_{k+2}+y_k = \begin{cases} 1 & n\in\{0,1,2\} \\ -1 & n\in\mathbb{N}\setminus\{1,2\}\end{cases}$ & $y_0=0,\ y_1=1.$

w) $y_{k+2}-7y_{k+1}+6y_k = k$

x) $y_{k+2}-5y_{k+1}+6y_k = 2^k,\quad y_1=y_2=0$

[Kelley & Peterson, pg. 57

y) $y_{k+2}-7y_{k+1}+6y_k = k$ $\quad\left[c_1 6^k + c_2 + \frac{3}{50}k - \frac{1}{10}k^2\right]$

z) $\Delta y_k = 3^k\sin\frac{k\pi}{2}$ $\quad\left[c_1 - \frac{3^k}{10}\left(\sin\frac{k\pi}{2}+3\cos\frac{k\pi}{2}\right)\right]$

z1) $8y_{k+2}-6y_{k+1}+y_k = 2^k$

Z2) $y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k = 3k + 5$

Z3) $y_{k+2} + y_{k+1} - 12y_k = k \cdot 3^k$

Z4) $y_{k+2} + 4y_k = \cos k$

Z5) $y_{k+2} - 4y_{k+1} + 3y_k = k \cdot 4^k, \quad y_1 = \frac{2}{9}, \quad y_2 = 1/9$

Z6) $y_{k+2} - y_{k+1} + 2y_k = 3^k + k \cdot 3^k$

Z7) $y_{k+2} - 7y_{k+1} + 10y_k = 4^k$

Z8) $y_{k+2} - 6y_{k+1} + 8y_k = 4^k$

Z9) $y_{k+2} - y_{k+1} - 2y_k = 4 + 2^k$

Z10) $y_{k+2} - 4y_{k+1} + 4y_k = 2^k$

Z11) $y_{k+2} - 5y_{k+1} + 6y_k = 3$

Z12) $y_{k+2} - y_{k+1} - 2y_k = k \cdot 2^k$

Z13) $y_{k+2} - 7y_{k+1} + 12y_k = 5^k$

Z14) $y_{k+1} - 2y_k = 2^k \binom{k}{5}$

Z15) $y_{k+2} - 7y_{k+1} + 6y_k = 2k - 1$

Z16) $y_{k+3} - 2y_{k+2} - y_{k+1} + 2y_k = 8 \cdot 3^k$

[Agarwal, pg. 107

217) $y_{k+2} - 6y_{k+1} + 8y_k = 3 + 4k^2 - 7\cdot 3^k$

218) $y_{k+2} - 4y_{k+1} + 3y_k = 27\cdot k\cdot 4^k$

219) $y_{k+2} - 3y_{k+1} + 2y_k = 3\cdot \sin 3k + 2\cdot \sin 3k$

220) $y_{k+2} - 4y_{k+1} + 4y_k = 2 + (-1)^k + 3\cdot 2^k$

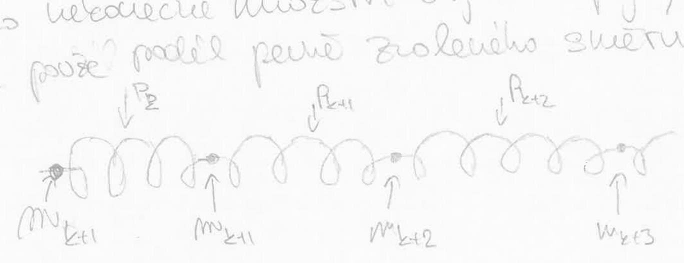
221) $y_{k+3} - 7y_{k+2} + 16y_{k+1} - 12y_k = 5k\cdot 2^k + 7\cdot 3^k$

## 4.3 Aplikace

V tomto odstavci si ukážeme některé další aplikace $\Delta$-rovnic (k těm, které jsme si již ukázali v úvodní kapitole). Ačkoli rovnice s konstantními koeficienty se mohou zdát být velmi speciálním případem, uvidíme, že i s jejich pomocí lze řešit řadu zajímavých úloh.

[Kelley & Peterson, pg. 64-65]

Př. 4.3.1 (Krystalická mřížka): Krystalická mřížka bývá občas matematicky modelována jako nekonečné množství objektů spojených pružinou, přičemž uvažujeme vibrace pouze podél pevně zvoleného směru.




Označme jako $v_k$ vzdálenost $k$-tého bodu od rovnovážného bodu. Potom pohybová rovnice je

$$m_{k+1}\cdot \frac{d^2 v_{k+1}}{dt^2} = p_{k+1}\left(v_{k+2} - v_{k+1}\right) + p_k\left(v_k - v_{k+1}\right),$$