V tomto textu se bude zabývat prvními částmi Kapitoly 6, která je věnována dvojnému integrálu. V části 6. 1 je definován dvojný integrál na množině *M* a jeho geometrický význam. V části 6. 2 je vyslovena Fubiniova věta, pomocí které se dvojný integrál převede na integrál dvojnásobný. V tomto textu se budeme zabývat i částí 6. 3 , kde jsou zavedeny polární souřadnice. Transformaci a výpočet dvojného integrálu v polárních souřadnicích v části 6. 4 necháme až do dalšího textu. V části 6. 5 jsou popsány nějaké aplikace dvojného integrálu. To bude také příště.

Výpočet dvojných integrálů má v podstatě tři fáze. Nejprve je třeba popsat množinu *M*. Tak stanovíme meze dvojnásobného integrálu, který pomocí Fubiniovy věty sestavíme. V poslední fázi dvojnásobný integrál vypočteme.

Popis množiny *M* dělá studentům často potíže, proto se jím v přiloženém textu priklady_chemici_3 bude zabývat zvlášť.

Začneme obdélníkem (čtvercem), který bývá zadán čtyřmi vrcholy. Viz př. 6. 3, str. 72. Zvykněte si množinu *M* vždy nakreslit, nebývá to pokaždé nutné, ale opakujeme si tím dovednosti, které potřebujeme i jinde. Popsat množinu *M* znamená najít hranice pro obě souřadnice všech bodů [x,y], které tuto množinu tvoří. Tyto hranice jsou pak i mezemi dvojnásobného integrálu. Výjimečně mohou být tyto meze stanoveny přímo v zadání příkladu, např. cv. 1c na str. 83. Pak můžeme rovnou sestavit integrál.

V případě obdélníka nemáme s popisem množiny *M* problém. Základním případem pro nás je situace, kdy pro *x* na nějakém intervalu <a,b> jsou definovány dvě funkce, jejichž grafy tvoří horní a dolní mez pro proměnnou *y*. Základní příklady vidíte v přiloženém textu. Již v případě trojúhelníka, př. 2 v textu, jde o tuto situaci. Studenti se mnohdy domnívají, že i v tomto případě pro souřadnici *y* také platí, že je od „0 do 2“. Je třeba pochopit, že pokud by tomu tak bylo, pak by opět šlo o obdélník. Prostě horní hranice pro *y* závisí na *x*. Hodnoty 2 dosahuje pouze pro $x=1$. V příkladu 5 je uveden i druhý možný popis množiny *M*. Pro *y* z intervalu <0,2> je definována funkce $x = 1 - ½\, y$, její graf tvoří „pravou“ hranici oblasti. Tuto druhou možnost využijeme na obrázku 6 v textu. Zde trojúhelník nemůžeme popsat tak snadno jako v příkladu 2. Museli bychom množinu *M* rozdělit na dvě části a také počítat dva integrály. My ovšem můžeme využít toho, že strany *AB* a *AC* je možno popsat jako grafy funkcí proměnné *y*. Popis oblasti je stručnější a budeme počítat jen jeden integrál. Tato myšlenka je ve skriptu popsána v příkladu 6. 8 na str. 75. Já volil co nejjednodušší situaci. Někdy se ale rozdělení množiny *M* nevyhneme, viz obr. 7 v doprovodném textu.

Velmi často, nejen v našich příkladech, je množinou *M* část kruhu. V tom případě popíšeme množinu *M* v polárních souřadnicích a integrál do nich transformujeme. Nyní se ale budeme zabývat pouze samotnou množinou. Dosud jsme pracovali v souřadnicích kartézských. Pokud dostaneme za úkol znázornit body [1,3], [-2,1], [2,2] všichni to dokážeme. Poloha bodu ale může být určena i jinak. Viz část 6. 3 ve skriptu, str. 76. U každého bodu můžeme určit jeho vzdálenost od počátku [0,0]. Tuto vzdálenost označíme ρ . Toto ale nestačí, bodů, které mají např. $\rho=2$ je „celá kružnice“. Když ovšem dodáme, že průvodič tohoto bodu (spojnice bodu s počátkem) svírá navíc s kladným směrem osy *x* úhel $\varphi = \pi/4$, pak už je jen jeden bod, který toto splňuje. Snadno odvodíme vztahy mezi *x* , resp. y a ρ a φ.

Je-li naší množinou *M* kruh se středem v počátku (s jiným středem v tuto chvíli pracovat nebudeme, úlohu 6. 18, str. 80, a cvičení 2d a 3b, str. 83 vysvětlím případně zájemcům na konzultaci) a poloměrem třeba 3, můžeme tento kruh popsat jak v kartézských, tak v polárních souřadnicích. Je důležité si uvědomit, znáte ze střední školy, že kružnice není grafem žádné funkce jedné proměnné $y= f(x)$. Vidíme ale, že grafem funkce už jsou horní a dolní polokružnice. Pak jsem schopni kruh v kartézských souřadnicích rovněž snadno popsat. Horší je to již s výpočtem integrálů, které mohou být zbytečně složité. Proto se zamyslíme nad vyjádřením v polárních souřadnicích. To je ovšem snadné bez nějakých odvozování. Libovolný bod kruhu má vzdálenost od počátku „mezi nulou a trojkou“ a jeho průvodič svírá s kladným směrem osy x úhel z intervalu <0,2π>. Pozor! Už 30 let v písemkách vídávám, že některý student napíše, že ρ je z intervalu <-3,3>. ρ je vzdálenost, ta nemůže být záporná.

Množinou M může být i část kruhu, případně mezikruží. Z obrázků je snad jasné, jak v tomto případě množinu M v polárních souřadnicích popíšeme. Pořád uvažujte tak, že si uvědomíte co je ρ a co je φ.

A nyní přistoupíme k vlastnímu výpočtu dvojného integrálu. Vracíme se tedy do části 6. 2 ve skriptu. Nejprve je řešena situace, kdy množinou M je obdélník. Trochu jiný zápis znamená, že proměnná x se pohybuje v intervalu $<a,b>$ a proměnná y v intervalu $<c,d>$. Vzorec (6.2) udává, jak převedeme dvojný integrál na integrál dvojnásobný. V případě obdélníka máme dvě možnosti, integrovat nejprve podle proměnné y a poté podle proměnné x. Nebo v obráceném pořadí. Pomáháme si závorkami, nejprve řešíme integrál v závorce. Popíšeme si to na příkladu ve skriptu 6.3 na str. 72. Podívejte se pak na můj první integrál v přiloženém textu.

Př. 6. 3 Nejprve popíšeme množinu M, to je snadné, tím získáme meze pro dvojnásobný integrál. Příklad je neprve řešen tak, že integrujeme v závorce podle proměnné y. Podobně jako u parciálních derivací se na výraz x^2 díváme jako na konstantu, kterou opíšeme a integrujeme výraz y. Máme meze, tedy výsledek integrace napíšeme do hranaté závorky a pak dosadíme nejprve horní mez za y a pak dolní mez (odečteme!). Dostaneme už integrál, kde není a nesmí být y. Integrál je proměnné x a integrujeme jako určitý integrál s mezemi 0 a 2.

Mohli jsme integrovat také nejprve podle proměnné x, pak podle proměnné y. Pokud je množinou M obdélník, jen tehdy, a současně integrovaná funkce dvou proměnných je taková, že je v součinu funkce proměnné x a funkce proměnné y, můžeme použít jednodušší postup. Proměnné „separujeme“ do dvou určitých integrálů, každý spočítáme zvlášť a jejich výsledky vynásobíme. Může se stát, že jeden z nich je nula, pak druhý, třeba nějaký obtížný, už nemusíme počítat. Pozor, opravdu lze použít jen pro obdélník (čtverec) a pro součin. Pokud bychom třeba na obdélníku integrovali funkci $f(x,y) = x + y$, pak bychom to takto udělat nemohli.

Podívejte se nyní do mého textu na druhý integrál, dále např. 6. 6 a 6. 7 (podívejte, jak je tam zadána hyperbola y = $1/x$) do skripta. V těchto příkladech už musíme využít vzorce (6. 3) na str. 73. Lichoběžník v příkladu 6. 6 se mnoho neliší od trojúhelníka, ve zbývajících případech už musíme nakreslit jednotlivé křivky, odhadnout a nebo spočítat průsečíky a tím stanovit meze pro proměnnou x. Podle ní budeme integrovat naposledy, jsou tam konstantní meze a výsledek musí být číslo. Integrujeme nejprve podle proměnné y, meze integrálu jsou funkce proměnné x, když je dosadíme, pak y zmizí. Snad je to z příkladů jasné.

Třetí integrál v mém textu ukazuje situaci, kdy množinu M můžeme, ale nemusíme, rozdělit do dvou množin, integrál spočítat přes každou z nich a výsledky sečíst, řešení a). Podobně je řešen příklad 6. 8 ve skriptu na straně 75. Začnete ale „mým příkladem“, který je mnohem snadnější. Ukazuji tam i druhou možnost, řešení b), tedy dívat se na křivky jako na grafy funkcí proměnné y. Pak integrál můžeme spočítat přímo.

Jako cvičení si spočítejte příklady 1 a – f na str. 83. Pokud vám řešení dvojnásobného integrálu půjde, není třeba počítat vše, ale u zbývajících zadání si namalujte množinu M a dvojnásobný integrál napište.