2. cvičení z lineární algebry II - afinní geometrie

Příklad. 1. Rozhodněte, které z podmnožin jsou afinní podprostory. Pokud jsou, najděte jejich zaměření a dimenzi.

(1) $\mathcal{M} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y^2 = x^3 + 1\} \subset \mathbb{R}^2$.
(2) $\mathcal{N} = \{p \in \mathbb{R}_5[x];\ p(2) + p(3) = 5, p'(20) = 21\} \subset \mathbb{R}_5[x]$.
(3) $\mathcal{P} = \{C \in \mathrm{Mat}_{3\times3}(\mathbb{R});\ \mathrm{h}(C) \leq 2\} \subset \mathrm{Mat}_{3\times3}$.

K důkazu, že nejde o afinní podprostor lze využít charakterizaci afinního podprostoru jako podmnožiny obsahující s každými dvěma různými body i přímku, která jimi prochází.

Příklad. 2. Napište nejdříve parametrický a potom implicitní popis nejmenšího afinního podprostoru v $\mathbb{R}^4$, který obsahuje body

$$A = [5, 2, 1, 0], \quad B = [4, 1, 0, 0], \quad C = [-3, 1, 0, 1].$$

Příklad. 3. Pomocí afinních kombinací dokažte, že se těžnice v trojúhelníku ABC protínají v jediném bodě.

Příklad. 4. Najděte průnik a spojení afinním podprostorů $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$ v $\mathbb{R}^5$:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &: [2, 3, 4, 3, 6] + a(1, 1, 1, -1, 1) + b(0, 0, 1, 0, 1) \\ \mathcal{N} &: [2, 2, 4, 4, 6] + c(1, 0, 0, 0, 1) + d(0, 0, 1, 0, 0) + e(2, 1, 1, -1, 1). \end{aligned}$$

Příklad. 5. V $\mathbb{R}^4$ určete vzájemnou polohu rovin

$$\begin{aligned} \pi &: 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 5, \quad 5x_1 - x_2 + 2x_4 = 3, \\ \rho &: x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -3, \quad 2x_2 - x_3 + x_4 = -2. \end{aligned}$$

Příklad. 6. V $\mathbb{R}^4$ určete vzájemnou polohu roviny

$$\rho:\ [3, -1, 0, 0] + s(-1, 1, 1, 0) + t(2, 1, 0, 1)$$

a přímek p, q a r, které mají parametrická vyjádření

a) $p : [7, 4, 2, 3] + a(5, -2, -3, 1)$,
b) $q : [1, 2, 3, 4] + b(1, 5, 3, 2)$,
c) $r : [1, 2, 3, 4] + c(1, 1, 1, 1)$.

Příklad. 7. V $\mathbb{R}^3$ najděte přímku p, která protíná mimoběžky $r :\ [1, 2, -1] + s(1, -1, 1)$ a $q :\ [0, 9, -2] + t(1, 0, 0)$ (taková přímka se nazývá příčka mimoběžek) a je rovnoběžná s vektorem $v = (1, 2, 0)$.

Návod. Přímka p leží v rovině určené přímkou r a vektorem v. □

Příklad. 8. V $\mathbb{R}^4$ najděte přímku p, která protíná přímku $q :\ [1, 2, 0, 0] + s(1, 1, 1, 0)$ a rovinu $\rho :\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2, \quad x_1 + x_3 = 7$ a prochází bodem $B = [1, 3, 2, 1]$.

Příklad. 9. V $\mathbb{R}^4$ jsou zadány dvě roviny

$$\pi : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \quad x_2 - x_4 = 2$$
$$\rho : x_1 - x_3 = 3, \quad x_2 + x_4 = 5.$$

Najděte přímku p rovnoběžnou s rovinou ρ, protínající rovinu π a procházející bodem $A = [0, 0, 1, 2]$.

Návod. Přímka p leží v rovině rovnoběžné s rovinou ρ a procházející bodem A. □

Řešení. Průsečík roviny π s přímkou p je $[-1, 2, 0, 0]$. □

Příklad. 10. V $\mathbb{R}^4$ jsou zadány rovina a dvě přímky

$$\theta : x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1, \quad 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 9,$$
$$q : [3, 2, 3, 8] + t(1, 2, -1, -2),$$
$$r : [1, 1, 9, 5] + s(2, 1, -2, -1).$$

Najděte přímku p rovnoběžnou s rovinou θ a protínající obě přímky q a r.

Návod. Testujeme, zda je vektor $Q - R$, kde $Q \in q$ a $R \in r$, rovnoběžný s rovinou θ. □