3. cvičení z lineární algebry II - afinní geometrie a bilineární formy

Dopočítat úlohy 4, 5, 6, 7, pokud jste je neudělali na 2. cvičení.

Příklad. 1. Napište nejdříve parametrický a potom implicitní popis nejmenšího afinního podprostoru v $\mathbb{R}^4$, který obsahuje body

$$A = [5, 2, 1, 0], \quad B = [4, 1, 0, 0], \quad C = [-3, 1, 0, 1].$$

Příklad. 2. V $\mathbb{R}^4$ jsou zadány dvě roviny

$$\pi : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \quad x_2 - x_4 = 2$$
$$\rho : x_1 - x_3 = 3, \quad x_2 + x_4 = 5.$$

Najděte přímku p rovnoběžnou s rovinou ρ, protínající rovinu π a procházející bodem $A = [0, 0, 1, 2]$.

Návod. Přímka p leží v rovině rovnoběžné s rovinou ρ a procházející bodem A. □

Řešení. Průsečík roviny π s přímkou p je $[-1, 2, 0, 0]$. □

Příklad. 3. V $\mathbb{R}^4$ jsou zadány rovina a dvě přímky

$$\theta : x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1, \quad 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 9,$$
$$q : [3, 2, 3, 8] + t(1, 2, -1, -2),$$
$$r : [1, 1, 9, 5] + s(2, 1, -2, -1).$$

Najděte přímku p rovnoběžnou s rovinou θ a protínající obě přímky q a r.

Návod. Testujeme, zda je vektor $Q - R$, kde $Q \in q$ a $R \in r$, rovnoběžný s rovinou θ. □

Příklad. 4 Pomocí afinních kombinací dokažte, že se těžnice v trojúhelníku ABC protínají v jediném bodě.

Příklad. 5. Zjistěte, zda následující funkce jsou bilineární formy. Pokud ano, zjistěte zda jsou symetrické nebo antisymetrické, a napište matici této formy ve standarní bázi prostoru $\mathbb{R}^2$ nebo $\mathbb{R}_2[x]$.

a) $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) = x_1y_1 + x_1y_2 - 5x_2,$

b) $g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ g(x, y) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 - 5x_2y_2,$

c) $h : \mathbb{R}_2[x] \times \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R},\ h(p, q) = p(1)q(2) + 4p(3)^2q(4),$

d) $k : \mathbb{R}_2[x] \times \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R},\ k(p, q) = p(1)q(2) + 4p(3)q'(8).$

Zde $q'(8)$ značí derivaci polynomu q v čísle 8.

Příklad. 6. K symetrické matici $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ najděte diagonální matici D kongruentní s A. Současně najděte regulární matici P takovou, že $D = P^TAP$.

Poznámka. Matice P není určena jednoznačně.