4. cvičení z lineární algebry II - bilineární a kvadratické formy

Příklad. 1. Symetrická bilineární forma $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ má v souřadnicích standardní báze vyjádření $f(u,v) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_1y_3 + 2x_2y_1 + 3x_3y_1$. ($x$ a y jsou souřadnice vektorů u a v ve standardní bázi.) Najděte v $\mathbb{R}^3$ nějakou její polární bázi, tj. bázi β v jejíž souřadnicích má f vyjádření $f(u,v) = b_{11}\bar{x}_1\bar{y}_1 + b_{22}\bar{x}_2\bar{y}_2 + b_{33}\bar{x}_3\bar{y}_3$. Toto vyjádření rovněž najděte. ($\bar{x}$ a $\bar{y}$ jsou souřadnice vektorů u a v v bázi β.)

Poznámka. Polární báze není určena jednoznačně. Jednoznačně je určen pouze počet kladných a záporných koeficientů v zápisu bilineární formy v souřadnicích polární báze.

$$\left(\begin{array}{c|c} f(e_i,e_j) & e_i \\ \hline e_j & \end{array}\right) \underset{\text{a sloupc. operace}}{\overset{\text{stejné řádk.}}{\sim}} \left(\begin{array}{c|c} f(u_i,u_j) & u_i \\ \hline u_j & \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c|c} A & \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix} \\ \hline e_1\ e_2\ e_3 & \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} b_{11} & 0 & 0 & u_1 \\ 0 & b_{22} & 0 & u_2 \\ 0 & 0 & b_{33} & u_3 \\ \hline u_1 & u_2 & u_3 & \end{array}\right)$$

Hledaná báze β je $\beta = (u_1, u_2, u_3)$.

Konkrétně:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & e_1 \\ 2 & 0 & 0 & e_2 \\ 3 & 0 & 0 & e_3 \\ \hline e_1 & e_2 & e_3 & \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & e_1 \\ 0 & -4 & -6 & e_2-2e_1 \\ 0 & -6 & -9 & e_3-3e_1 \\ \hline e_1 & e_2 & e_3 & \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & -4 & -6 & e_2-2e_1 \\ 0 & -6 & -9 & e_3-3e_1 \\ \hline e_1 & e_2-2e_1 & e_3-3e_1 & \end{array}\right) \overset{2\times 3.\check{r}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & -4 & -6 & e_2-2e_1 \\ 0 & -12 & -18 & 2e_3-6e_1 \\ \hline e_1 & e_2-2e_1 & e_3-3e_1 & \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & -4 & -12 & e_2-2e_1 \\ 0 & -12 & -36 & 2e_3-6e_1 \\ \hline e_1 & e_2-2e_1 & 2e_3-6e_1 & \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & -4 & -12 & e_2-2e_1 \\ 0 & 0 & 0 & 2e_3-3e_2 \\ \hline e_1 & e_2-2e_1 & 2e_3-6e_1 & \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & -4 & 0 & e_2-2e_1 \\ 0 & 0 & 0 & 2e_3-3e_2 \\ \hline e_1 & e_2-2e_1 & 2e_3-3e_2 & \end{array}\right)$$

$$B = (e_1, e_2-2e_1, 2e_3-3e_2)$$
$$= ((1,0,0), (-2,1,0), (0,-3,2))$$

V bázi B je

$$f(u,v) = \overline{x}_1\overline{y}_1 - 4\overline{x}_2\overline{y}_2$$

kde $(u)_B = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3)$

$(v)_B = (\overline{y}_1, \overline{y}_2, \overline{y}_3)$

Příklad. 2. Kvadratická forma $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ má ve standardní bázi vyjádření

$$f(u) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2 - 2x_2x_3 - x_3^2.$$

Najděte její vyjádření v bázi $\alpha = ((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0))$. Dále najděte nějakou její polární bázi, tj. bázi β, v jejíž souřadnicích je $f(u) = b_{11}\bar{x}_1^2 + b_{22}\bar{x}_2^2 + b_{33}\bar{x}_3^2$, kde čísla $b_{ii} = 0$, 1 nebo -1. Určete signaturu f.

$\alpha = (v_1, v_2, v_3)$ matice f v bázi α:

F příslušná sym. bilin. forma

$$F(u,v) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 - x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 - x_3y_3$$

Matice f = matice F v bázi α je

$$A = (a_{ij} = F(u_i, u_j))$$

$$a_{12} = F(v_1, v_2) = F\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$$

$$= 2+1+1-1-0-1-0 = 2$$

Hledáme polární bázi B

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & e_1 \\ 1 & -1 & 0 & e_2 \\ -1 & 0 & -1 & e_3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & e_2 \\ 2 & 1 & -1 & e_1 \\ -1 & 0 & -1 & e_3 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & e_2 \\ 1 & 2 & -1 & e_1 \\ 0 & -1 & -1 & e_3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & e_2 \\ 0 & 3 & -1 & e_1+e_2 \\ 0 & -1 & -1 & e_3 \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & | & e_2 \\ 0 & 3 & -1 & | & e_1+e_2 \\ 0 & -1 & -1 & | & e_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & | & e_2 \\ 0 & -1 & -1 & | & e_3 \\ 0 & 3 & -1 & | & e_1+e_2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & | & e_2 \\ 0 & -1 & -1 & | & e_3 \\ 0 & -1 & 3 & | & e_1+e_2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & | & e_2 \\ 0 & -1 & -1 & | & e_3 \\ 0 & 0 & 4 & | & e_1+e_2-e_3 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & | & e_2 \\ 0 & -1 & 0 & | & e_3 \\ 0 & 0 & 4 & | & e_1+e_2-e_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & | & e_2 \\ 0 & -1 & 0 & | & e_3 \\ 0 & 0 & 2 & | & \frac{1}{2}e_1+\frac{1}{2}e_2-\frac{1}{2}e_3 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & | & \cdots \\ 0 & -1 & 0 & | & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & | & \cdots \end{pmatrix}$$

$$B = \left(e_2, e_3, \tfrac{1}{2}(e_1+e_2-e_3)\right) = \left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1/2\\1/2\\-1/2\end{pmatrix}\right)$$

V B má f vyjádření

$$f(u) = -\bar{x}_1^2 - \bar{x}_2^2 + 1\bar{x}_3^2$$

$$(u)_B = \begin{pmatrix}\bar{x}_1\\ \bar{x}_2\\ \bar{x}_3\end{pmatrix}$$

Příklad. 3. Uvažujme kvadratickou formu $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 - 3x_2^2$. Pomocí definice napište matici její symetrické bilineární formy v bázi $\alpha = ((1,2),(3,-1))$.

$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad g(x) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 - 3x_2^2$

v souřadnicích stand. báze

Matice g v bázi $\alpha = \big(\overset{u_1}{(1,2)}, \overset{u_2}{(3,-1)}\big)$.

Příslušná sym. bilin. forma je

$$G(u,v) = 2x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 - 3x_2y_2.$$

$$A = \big(a_{ij} = G(u_i, u_j)\big)$$

$$a_{11} = G(u_1,u_1) = G((1,2),(1,2)) = 2 + 4 + 4 - 3\cdot 4 = -2$$

$$a_{12} = G(u_1,u_2) = G((1,2),(3,-1)) = 2\cdot 1\cdot 3 + 2\cdot 1(-1) + 2\cdot 2\cdot 3 - 3\cdot 2\cdot(-1) = 6 - 2 + 12 + 6 = 22$$

$$a_{21} = a_{12} = 22$$

$$a_{22} = G(u_2,u_2) = G((3,-1),(3,-1)) = 2\cdot 3\cdot 3 + 2\cdot 3(-1) + 2\cdot(-1)\cdot 3 - 3(-1)(-1) = 18 - 6 - 6 - 3 = 3$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 22 \\ 22 & 3 \end{pmatrix} \qquad g(u) = -2\overline{x}_1\overline{y}_1 + 22\overline{x}_1\overline{y}_2 + 22\overline{x}_2\overline{y}_1 + 3\overline{x}_2\overline{y}_2$$

Příklad. 4. Ve standardních souřadnicích napište nějakou kvadratickou formu $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, která je pozitivně definitní na podprostoru V a negativně definitní na podprostoru W, kde

$$V = [(1,0,2),(0,1,1)], \quad W = [(1,1,0)].$$

$h(u) > 0 \quad \forall u \in V \setminus \{\vec{o}\}$

$h(w) < 0 \quad \forall w \in W \setminus \{\vec{o}\}$

$$\alpha = \big(\overset{u_1}{(1,0,2)}, \overset{u_2}{(0,1,1)}, \overset{u_3}{(1,1,0)} \big)$$

Měli bychom se přesvědčit, že u_1, u_2, u_3 jsou LN.

V souřadnicích báze α $\qquad (u)_\alpha = (y_1, y_2, y_3)^T$

položíme

$$h(u) = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$$

poz. def. na V

neg. def. na W.

$u \in V$

$u = y_1 u_1 + y_2 u_2 + 0 \cdot u_3$

$h(u) = y_1^2 + y_2^2 > 0$

pro $u \neq \vec{o}$

$w \in W \quad w = 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + y_3 u_3$

$h(w) = -y_3^2 < 0$

pro $y_3 \neq 0$.

Matice h v bázi α je

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

B matice h ve stand. bázi $\varepsilon = (e_1, e_2, e_3)$

$$B = (id)_{\alpha,\varepsilon}^T A \, (id)_{\alpha,\varepsilon}$$

$$(id)_{\varepsilon,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(id)_{\alpha,\varepsilon} = (id)^{-1}_{\varepsilon,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$$(id)_{\alpha,\varepsilon} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & -7 & 1 \\ -7 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Vyjádření h ve stand. souřadnicích je

$$h(u) = \frac{1}{9}\left(x_1^2 - 14x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2\right)$$

$$(u)_\varepsilon = (x_1, x_2, x_3)^T$$

h pos. def. na V, neg. def. na W

$9h$ pos. def. na V, neg. def. na W

$$H(u) = 9h(u) = x_1^2 - 14x_1x_2 - 2x_1x_2 + 4x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

13^{04}

Příklad. 5. Definují následující symetrické bilineární formy skalární součin na $\mathbb{R}^3$? Pokud ano, napište pro ně Caychyovu nerovnost.

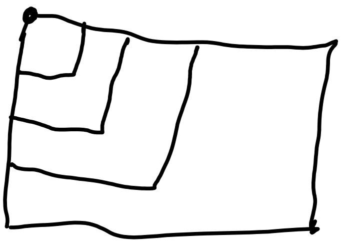
- a) $f(x,y) = x_1y_1 + 3x_2y_2 + 5x_3y_3 + 3x_1y_3 + 3x_3y_1 - x_2y_3 - x_3y_2$, sym.
- b) $f(x,y) = x_1y_1 + 3x_2y_2 + 5x_3y_3 + 2x_1y_3 + 2x_3y_1 - x_2y_3 - x_3y_2$, sym.
- c) $f(x,y) = x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_1y_3 + 2x_3y_1 + 4x_2y_3 + 4x_3y_2$, sym.
- d) $f(x,y) = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + 2x_3y_3$. sym.

Jsou pozitivně definitní.

Sylvestrovo kritérium

A matice kvadr. formy

forma je pozitivně definitní, právě když všechny hlavní minory jsou kladné.



(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

$\det \Delta_1 = \det(1) = 1$

$\det A_2 = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 3$

$\det A = 15 - 27 - 1 < 0$

není poz. def.

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

$\det \Delta_1 = 1 > 0$

$\det \Delta_2 = 3 > 0$

$\det A = 15 - 12 - 1 = 2 > 0$

Příslušná bilin. forma je skalární součin.

Cauchyova nerovnost

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

$$|x_1y_1 + 3x_2y_2 + 5x_3y_3 + 2x_1y_3 + 2x_3y_1 - x_2y_3 - x_3y_2| \leq$$

$$\leq \left(x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3\right)^{1/2} \cdot$$

$$\cdot \left(y_1^2 + 3y_2^2 + 5y_3^2 + 4y_1y_3 - 2y_2y_3\right)^{1/2}$$

(c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ $\det A_1 = 0$

není poz. definitní

(d) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ $\det A_1 = 1 > 0$

$\det A_2 = 5 - 4 = 1 > 0$

$\det A = 10 - 8 - 1 = 1 > 0$

Forma je pozitivně definitní.

Cauchyova nerovnost $|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \|v\|$

$$|x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + 2x_3y_3|$$

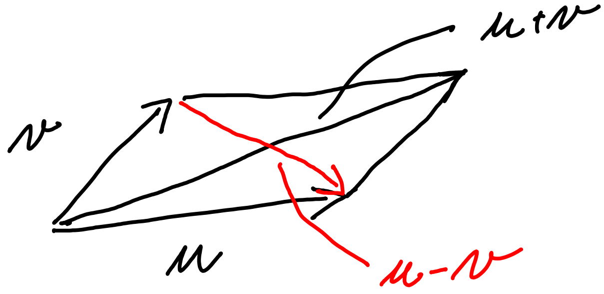
$$\leq \left(x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_2x_3\right)^{1/2}\left(y_1^2 + 5y_2^2 + 2y_3^2 - 4y_1y_2 - 2y_2y_3\right)^{1/2}$$

Příklad. 6. Pomocí skalárního součinu dokažte:

(1) V rovnoběžníku je součet druhých mocnin uhlopříček roven součtu druhých mocnin všech stran.

(2) Rovnoběžník je kosočtverec, právě když jsou jeho uhlopříčky na sebe kolmé.

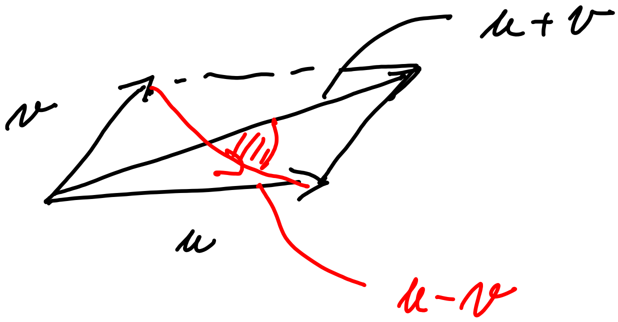
(1)



$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle + \langle u-v, u-v\rangle = \langle u,u\rangle + \langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle + \langle u,u\rangle - \langle u,v\rangle - \langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle$$

$$= 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$$

(2)



nad $\mathbb{R}$

$\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle$

$$\langle u+v, u-v\rangle = \langle u,u\rangle \underbrace{- \langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle}_{=0} - \langle v,v\rangle$$

$$= \|u\|^2 - \|v\|^2$$

$u+v \perp u-v$ právě když $\|u\| = \|v\|$.

Úloha na další procvičení

Příklad. Kvadratická forma $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ má ve standardní bázi vyjádření
$$f(u) = 2x_1x_2 + 8x_1x_3 - 2x_2x_3 - 8x_2x_4 + 8x_3x_4.$$
Najděte nějakou bázi β, v jejíž souřadnicích je $f(u) = b_{11}\bar{x}_1^2 + b_{22}\bar{x}_2^2 + b_{33}\bar{x}_3^2 + b_{44}\bar{x}_4^2$, kde čísla $b_{ii} = 0$, 1 nebo -1.

$$\left(\begin{array}{cccc|l} 0 & 1 & 4 & 0 & e_1 = 1\,0\,0\,0 \\ 1 & 0 & -1 & -4 & e_2 = 0\,1\,0\,0 \\ 4 & -1 & 0 & 4 & e_3 = 0\,0\,1\,0 \\ 0 & -4 & 4 & 0 & e_4 = 0\,0\,0\,1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|l} 1 & 1 & 3 & -4 & e_1+e_2 \\ 1 & 0 & -1 & -4 & e_2 \\ 4 & -1 & 0 & 4 & e_3 \\ 0 & -4 & 4 & 0 & e_4 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|l} 2 & 1 & 3 & -4 & e_1+e_2 \\ 1 & 0 & -1 & -4 & e_2 \\ 3 & -1 & 0 & 4 & e_3 \\ -4 & -4 & 4 & 0 & e_4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|l} 2 & 1 & 3 & -4 & e_1+e_2 \\ 2 & 0 & -2 & -8 & 2e_2 \\ 3 & -2 & 0 & 8 & 2e_3 \\ -4 & -4 & 4 & 0 & e_4 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|l} 2 & 2 & 6 & -4 & e_1+e_2 \\ 2 & 0 & -4 & -8 & 2e_2 \\ 6 & -4 & 0 & 8 & 2e_3 \\ -4 & -8 & 8 & 0 & e_4 \end{array}\right) \sim$$

Signatura je jednoznačná počet kl. čl. na diagonále & počet záporných, počet

Hledaných bází je nekonečně mnoho

$$\begin{pmatrix} 2 & & & \\ & 3 & & \\ & & -4 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 9 & & \\ & & -100 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

Mošnak kenbealy

$$f(x) = 2x_1^2 + \ldots\ldots\ldots \qquad F(x,y) = 2x_1y_1 +$$

diag. kvar

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & & & u_1 \\ & 3 & & 0 & u_2 \\ & & 0 & & u_3 \\ & & & 8 & u_4 \end{array}$$

$F(u_1, u_1) = f(u_1) = 2$

$F(u_1, u_2) = 0$

$F(u_2, u_2) = f(u_2) = 3$

$F(u_2, u_4) = 0$

signu.

<u>laini</u>