Příklad. 1. Symetrická bilineární forma $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ má v souřadnicích standardní báze vyjádření $f(u, v) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_1y_3 + 2x_2y_1 + 3x_3y_1$. ($x$ a y jsou souřadnice vektorů u a v ve standardní bázi.) Najděte v $\mathbb{R}^3$ nějakou její polární bázi, tj. bázi β v jejíž souřadnicích má f vyjádření $f(u, v) = b_{11}\bar{x}_1\bar{y}_1 + b_{22}\bar{x}_2\bar{y}_2 + b_{33}\bar{x}_3\bar{y}_3$. Toto vyjádření rovněž najděte. ($\bar{x}$ a $\bar{y}$ jsou souřadnice vektorů u a v v bázi β.)

Poznámka. Polární báze není určena jednoznačně. Jednoznačně je určen pouze počet kladných a záporných koeficientů v zápisu bilineární formy v souřadnicích polární báze.

$(u)_\varepsilon = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ $\quad (u)_\beta = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{pmatrix}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ matica bilineárnej formy v bázi ε.

$(v)_\varepsilon = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ $\quad (v)_\beta = \begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \\ \bar{y}_3 \end{pmatrix}$

- Nájdeme $\beta = (w_1, w_2, w_3)$ pomocou $(id)_{\varepsilon,\beta} = \left((w_1)_\varepsilon \ (w_2)_\varepsilon \ (w_3)_\varepsilon \right)$.

Máme $f(u,v) = (u)_\varepsilon^T \cdot A \, (v)_\varepsilon$, chceme $\boxed{f(u,v) = (u)_\beta^T \cdot B \cdot (v)_\beta}$, kde $(A)_{ij} = f(e_i, e_j)$ a $(B)_{ij} = f(w_i, w_j)$ je diagonálna matica.

Z definície matice prechodu máme $(v)_\varepsilon = (id)_{\varepsilon,\beta} \cdot (v)_\beta$. Potom

$$f(u,v) = \Big[\underbrace{(id)_{\varepsilon,\beta} \cdot (u)_\beta}_{(u)_\varepsilon}\Big]^T \cdot A \cdot \Big[\underbrace{(id)_{\varepsilon,\beta} (v)_\beta}_{(v)_\varepsilon}\Big] = (u)_\beta^T \cdot \Big[\underbrace{(id)_{\varepsilon,\beta}^T A \, (id)_{\varepsilon,\beta}}_{B}\Big] (v)_\beta$$

$$B = (id)_{\varepsilon,\beta}^T \cdot A \cdot (id)_{\varepsilon,\beta} = P^T \cdot A \cdot P, \quad \text{kde } \boxed{P = (id)_{\varepsilon,\beta}.}$$

Teda P vieme spočítať algoritmom z minulého cvičenia:

$$\left(\begin{array}{c|c} A & E \\ \hline E & \end{array}\right) \ \underset{\text{ESO}}{\overset{\text{rovnaké ERO}}{\sim}} \ \left(\begin{array}{c|c} \overbrace{P^T A P}^{B \text{ diagonálna}} & P^T \\ \hline P & \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right) \overset{\text{ERO}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -6 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right) \overset{\text{ESO}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -6 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & -2 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right) \overset{\text{ERO}}{\sim}$$

$-2 \quad -2 \quad -3 \quad -3 \quad -\frac{2}{3}$

0 0 1 |

0 0 1 1

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -9 & -3 & 0 & 1 \\ \hline 1 & -2 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right) \overset{-3}{} \quad \text{ESO} \sim \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -9 & -3 & 0 & 1 \\ \hline 1 & -2 & -3 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right) -\tfrac{2}{3} \quad \text{ERO} \sim \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 6 & 2 & 0 & -\tfrac{2}{3} \\ \hline 1 & -2 & -3 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right) -\tfrac{2}{3} \quad \text{ESO} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 2 & 0 & -\tfrac{2}{3} \\ \hline 1 & -2 & 2 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & -\tfrac{2}{3} & & & \end{array}\right) \oplus \quad \text{ERO} \sim \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\tfrac{2}{3} \\ \hline 1 & -2 & 2 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & -\tfrac{2}{3} & & & \end{array}\right) \oplus \quad \text{ESO} \sim \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} \multicolumn{3}{c|}{B} & \multicolumn{3}{c}{P^T} \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\tfrac{2}{3} \\ \hline 1 & -2 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 1 & & & \\ 0 & 0 & -\tfrac{2}{3} & & & \\ \multicolumn{3}{c|}{P} & & & \end{array}\right)$$

$$P = (id)_{\varepsilon, B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\tfrac{2}{3} \end{pmatrix} \qquad w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; w_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\tfrac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$B = (w_1, w_2, w_3)$$

$$f(u,v) = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{y}_1 \\ \overline{y}_2 \\ \overline{y}_3 \end{pmatrix} = \overline{x}_1 \cdot \overline{y}_1 - 4 \cdot \overline{x}_2 \cdot \overline{y}_2 .$$

Skúška:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\tfrac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\tfrac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\tfrac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Příklad. 3. Uvažujme kvadratickou formu $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 - 3x_2^2$. Pomocí definice napište matici její symetrické bilineární formy v bázi $\alpha = ((1,2),(3,-1))$.

Príslušná symetrická bilineárna forma G k g v bázi ε je

$G(x,y) = 2x_1y_1 + 2(x_1y_2 + x_2y_1) - 3x_2y_2$

$A_{11} = G((1,2),(1,2)) = 2\cdot1\cdot1 + 2\cdot(1\cdot2 + 2\cdot1) - 3\cdot2\cdot2 = -2$

$A_{12} = G((1,2),(3,-1)) = 2\cdot1\cdot3 + 2\cdot(1\cdot(-1) + 2\cdot3) - 3\cdot2\cdot(-1) = 22$

$A_{21} = A_{12}$ (symetrická forma)

$A_{22} = G((3,-1),(3,-1)) = 2\cdot3\cdot3 + 2\cdot(3\cdot(-1) + (-1)\cdot3) - 3\cdot(-1)^2 = 3$

$A = \begin{pmatrix} -2 & 22 \\ 22 & 3 \end{pmatrix}$ matica symetrickej bilineárnej formy G v báze α.

Příklad. 2. Kvadratická forma $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ má ve standardní bázi vyjádření
$$f(u) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2 - 2x_2x_3 - x_3^2.$$
Najděte její vyjádření v bázi $\alpha = ((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0))$. Dále najděte nějakou její polární bázi, tj. bázi ~~β~~ γ, v jejíž souřadnicích je $f(u) = b_{11}\bar{x}_1^2 + b_{22}\bar{x}_2^2 + b_{33}\bar{x}_3^2$, kde čísla $b_{ii} = 0, 1$ nebo -1. Určete signaturu f.

Zo zadania $(id)_{\varepsilon,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, potom $(u)_\varepsilon = (id)_{\varepsilon,\alpha}(u)_\alpha$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$x_1 = \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 + \tilde{x}_3$$
$$\Rightarrow \quad x_2 = \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2$$
$$x_3 = \tilde{x}_3$$

symetrická, preto $(id)_{\varepsilon,\alpha}^T = (id)_{\varepsilon,\alpha}$

z definície máme

$$f(u) = 2\cdot(\tilde{x}_1+\tilde{x}_2+\tilde{x}_3)^2 + 2\cdot(\tilde{x}_1+\tilde{x}_2+\tilde{x}_3)(\tilde{x}_1+\tilde{x}_2)$$
$$-(\tilde{x}_1+\tilde{x}_2)^2 - 2(\tilde{x}_1+\tilde{x}_2)\cdot\tilde{x}_3 - \tilde{x}_3^2 \quad (*)$$
$$= \dots$$

pre $(u)_\alpha = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)^T$.

Nájdeme maticu príslušnej symetrickej bilineárnej formy v bázi ε:

$$F(u,v) = 2x_1y_1 + (x_1y_2 + x_2y_1) - x_2y_2 - (x_2y_3 + y_2x_3) - x_3y_3$$ (overte, že skutočne $F(u,u) = f(u)$)

$$F(u,v) = (x_1, x_2, x_3)\cdot\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}}_{A}\cdot\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Teraz dopočítame vyjadrenie $f(u)$ v bázi α:

$$f(u) = \underbrace{((id)_{\varepsilon\alpha}(u)_\alpha)^T}_{(u)_\alpha^T\cdot(id)_{\varepsilon,\alpha}^T}\cdot A\cdot\left((id)_{\varepsilon,\alpha}(u)_\alpha\right) = \underbrace{(u)_\alpha^T}_{(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\tilde{x}_3)}\underbrace{\left[(id)_{\varepsilon,\alpha}^T\cdot A\ (id)_{\varepsilon,\alpha}\right]}_{B}\underbrace{(u)_\alpha}_{\begin{pmatrix}\tilde{x}_1\\\tilde{x}_2\\\tilde{x}_3\end{pmatrix}}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad (**)$$

$$\Rightarrow \quad f(u) = 4\tilde{x}_1\cdot\tilde{x}_2 + 6\tilde{x}_1\cdot\tilde{x}_3 + 3\cdot\tilde{x}_2^2 + 6\tilde{x}_2\tilde{x}_3 + 2\tilde{x}_3^2$$

(namiesto roznásobenia výrazu v $(*)$ sme použili násobenie matíc v $(**)$)

Nájdeme bázu β, taká, že $D = P^TAP$ je diagonálna matica a $\boxed{P = (id)_{\varepsilon,\beta}}$.

Algoritmus z minulého príkladu:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & | & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \dots \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dots \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ERO } \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\text{ERO}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\text{ESO}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\text{ERO}}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \overset{\text{ESO}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ 3\cdot \end{array} \overset{\text{ERO}}{\underset{\text{ESO}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & -3 & 3 \end{array}\right) \overset{\text{ERO}}{\underset{\text{ESO}}{\sim}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\begin{matrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{matrix}}_{D} \;\Bigg|\; \underbrace{\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{matrix}}_{P^T}$$

$$P = \left(\underset{w_1}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \overset{w_2}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \underset{w_3}{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}} \right) = (id)_{\varepsilon,\beta}$$

$$\beta = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

$$f(u) = -\bar{x}_1^2 + 3\bar{x}_2^2 - 3\bar{x}_3^2 \quad \text{v báze } \beta$$

Skúška:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Signatura f:

	+1	-1	0
#	1	2	0

! $f(u)$ v β nemá tie správne koeficienty $1, -1, 0$. Preto potrebujeme ešte previesť jednu úpravu.

$$f(u) = -\bar{x}_1^2 + 3\bar{x}_2^2 - 3\bar{x}_3^2 = -\underbrace{\bar{x}_1}_{\bar{\bar{x}}_1}{}^2 + \underbrace{(\sqrt{3}\,\bar{x}_2)}_{\bar{\bar{x}}_2}{}^2 - \underbrace{(\sqrt{3}\,\bar{x}_3)}_{\bar{\bar{x}}_3}{}^2$$

$$\begin{aligned} \bar{\bar{x}}_1 &= \bar{x}_1 \\ \bar{\bar{x}}_2 &= \sqrt{3}\,\bar{x}_2 \\ \bar{\bar{x}}_3 &= \sqrt{3}\,\bar{x}_3 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\begin{pmatrix} \bar{\bar{x}}_1 \\ \bar{\bar{x}}_2 \\ \bar{\bar{x}}_3 \end{pmatrix}}_{(u)_\gamma} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}}_{(id)_{\gamma,\beta}} \underbrace{\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{pmatrix}}_{(u)_\beta}$$

$$(id)_{\varepsilon,\gamma} = (id)_{\varepsilon,\beta} \cdot (id)_{\beta,\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}}_{(id)_{\gamma,\beta}^{-1}} =$$

$$\underline{\gamma = (z_1, z_2, z_3)}$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \overset{z_2}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1/\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2/\sqrt{3} \\ 3/\sqrt{3} \end{pmatrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} z_1 & & z_3 \end{array}$$

v bázi η má $f(u)$ tvar

$$\boxed{f(u) = -\bar{\bar{x}}_1^{\,2} + \bar{\bar{x}}_2^{\,2} - \bar{\bar{x}}_3^{\,2}} \quad , \text{kde} \quad (u)_\eta = \begin{pmatrix} \bar{\bar{x}}_1 \\ \bar{\bar{x}}_2 \\ \bar{\bar{x}}_3 \end{pmatrix}$$

Příklad. 4. Ve standardních souřadnicích napište nějakou kvadratickou formu $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, která je pozitivně definitní na podprostoru V a negativně definitní na podprostoru W, kde

$$V = [\underbrace{(1,0,2)}_{v_1}, \underbrace{(0,1,1)}_{v_2}], \quad W = [\underbrace{(1,1,0)}_{w}].$$

$\alpha = (v_1, v_2, w)$

kvadratická forma je pozitivně definitní na V, až má signaturu

	1	-1	0
#	n	0	0

$n = \dim V$

je negativně definitní na W, až má signaturu

	1	-1	0
#	0	m	0

$m = \dim W$

$(\bar{x})_\alpha = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$

$$h(\bar{x}) = \underbrace{\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2}_{h \text{ na } V} \underbrace{- \bar{x}_3^2}_{h \text{ na } W}$$

$$= (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}^{D} \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{pmatrix}$$

$$h(x) = \underbrace{\left((id)_{\alpha,\varepsilon}(x)_\varepsilon\right)^T}_{(x)_\varepsilon^T \cdot (id)_{\alpha,\varepsilon}^T} D \, (id)_{\alpha,\varepsilon}(x)_\varepsilon$$

$$= (x_1, x_2, x_3) \cdot \underbrace{(id)_{\alpha,\varepsilon}^T \cdot D \cdot (id)_{\alpha,\varepsilon}}_{B} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$(id)_{\varepsilon,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(id)_{\alpha,\varepsilon} = (id)_{\varepsilon,\alpha}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & 1/3 & -1/3 \end{array}\right)$$

$$\boxed{(x)_\alpha = (id)_{\alpha,\varepsilon} (x)_\varepsilon}$$

$$B = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & -7 & 1 \\ -7 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$h(x) = \frac{1}{9} \left(x_1^2 - 14 x_1 x_2 + 2 x_1 x_3 + 4 x_2^2 + 4 x_2 x_3 + x_3^2 \right)$$

h v standardnej báze ε.

Příklad. 5. Definují následující symetrické bilineární formy skalární součin na $\mathbb{R}^3$? Pokud ano, napište pro ně Caychyovu nerovnost.

a) $f(x,y) = x_1y_1 + 3x_2y_2 + 5x_3y_3 + 3x_1y_3 + 3x_3y_1 - x_2y_3 - x_3y_2$,
b) $f(x,y) = x_1y_1 + 3x_2y_2 + 5x_3y_3 + 2x_1y_3 + 2x_3y_1 - x_2y_3 - x_3y_2$,
c) $f(x,y) = x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_1y_3 + 2x_3y_1 + 4x_2y_3 + 4x_3y_2$,
d) $f(x,y) = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + 2x_3y_3$.

Skalárny súčin na $\mathbb{R}^3$ je symetrická bilineárna forma, ktorá je pozitívne definitná.

Overme, či formy sú pozitívne definitné.

a) Nájdeme maticu bilineárnej formy v bázi ε: Určme, či je pozitívne definitná výpočtom hlavných minorov. (má všetky minory kladné)

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} A_1 & A_2 & A_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix} \end{array}$$

$A_1 = 1 > 0$

$A_2 = 1 \cdot 3 > 0$

$A_3 = 3\cdot 5 + 0 + 0 - (27 + 1 + 0) = -13 < 0$

↑ nie je pozitívne definitná

$f(x,y)$ pozitívne definitná $\iff$ jej matica je pozitívne definitná v nejakej bázi.

b)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$B_1 = A_1 > 0$

$B_2 = A_2 > 0$

$B_3 = 3\cdot 5 + 0 + 0 - (12 + 1 + 0) = 3 > 0$

B je pozitívne definitná matica

Cauchyho nerovnosť: $|\langle x,y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad \forall x,y \in U$, rovnosť nastáva $\iff$ x,y sú lineárne závislé

$$|f(x,y)| \leq \sqrt{f(x,x)} \cdot \sqrt{f(y,y)}$$

$$(*) \quad |x_1y_1 + 3x_2y_2 + 5x_3y_3 + 2x_1y_3 + 2x_3y_1 - x_2y_3 - x_3y_2| \leq \sqrt{x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3} \cdot \sqrt{y_1^2 + 3y_2^2 + 5y_3^2 + 4y_1y_3 - 2y_2y_3}$$

Pomocou tejto nerovnosti dokážeme, že $(3x_1 + 2x_2 + 4x_3)^2 \leq (1+3+5+4-2) \cdot (x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3)$

Zvolíme $(y_1, y_2, y_3) = (1,1,1)$, potom $(*)$ prejde do:

$$|x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_1 + 2x_3 - x_2 - x_3| \leq \sqrt{1+3+5+4-2} \cdot \sqrt{x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3}$$ ← Všetko nezáporné, môžeme $|^2$

$$(3x_1 + 2x_2 + 4x_3)^2 \leq 11 \cdot (x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3)$$

Rovnosť nastáva $\iff$ $(x_1, x_2, x_3) = a \cdot (1,1,1) \iff \begin{matrix} x_1 = a = x_2 \\ x_1 = a = x_3 \end{matrix} \iff x_1 = x_2 = x_3$

c)

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$C_1 = 0 \not> 0 \implies$ nie je pozitívne definitná

d) $D = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$D_1 = 1 > 0$
$D_2 = 5 - 4 = 1 > 0$
$D_3 = 10 - 1 - 8 = 1 > 0$

je pozitivne definitná t.j. f určuje skalárny súčin.

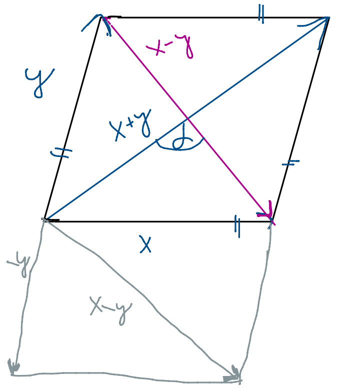
Cauchyho nerovnosť $\quad |f(x,y)| \leq \sqrt{f(x,x)}\,\sqrt{f(y,y)}$

$$|x_1 \cdot y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + 2x_3 \cdot y_3| \leq \sqrt{x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2} \cdot \sqrt{y_1^2 - 4y_1y_2 + 5y_2^2 - 2y_2y_3 + 2y_3^2}$$

Příklad. 6. Pomocí skalárního součinu dokažte:

(1) V rovnoběžníku je součet druhých mocnin uhlopříček roven součtu druhých mocnin všech stran. (rovnobežníkovo pravidlo)

(2) Rovnoběžník je kosočtverec, právě když jsou jeho uhlopříčky na sebe kolmé.



(1) chceme ukázať, že $\boxed{2\cdot\|x\|^2 + 2\cdot\|y\|^2 = \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2}$ $\forall x,y \in \mathbb{E}^n$

Počítajme:

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle + \langle x-y, x-y\rangle = \langle x+y, x\rangle + \langle x+y, y\rangle + \langle x-y, x\rangle - \langle x-y, y\rangle$$

$$= \langle x,x\rangle + \cancel{\langle y,x\rangle} + \cancel{\langle x,y\rangle} + \langle y,y\rangle + \langle x,x\rangle - \cancel{\langle y,x\rangle} - \cancel{\langle x,y\rangle} + \langle y,y\rangle$$

$$= 2\langle x,x\rangle + 2\langle y,y\rangle = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

(2) kosoštvorec: $\|x\| = \|y\|$

Uhlopriečky sa pretínajú v strede oboch úsečiek.

$$\cos\alpha = \frac{\langle \frac{1}{2}(x+y), \frac{1}{2}(x-y)\rangle}{\|\frac{1}{2}(x+y)\|\cdot\|\frac{1}{2}(x-y)\|} = \frac{\frac{1}{4}(\|x\|^2-\|y\|^2)}{\|\frac{1}{2}(x+y)\|\cdot\|\frac{1}{2}(x-y)\|} \overset{\|x\|=\|y\|}{=} 0$$

Platí $\cos\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = \pi/2$ t.j. $x+y \perp x-y$, čo znamená, že uhlopriečky sú kolmé.
$\alpha\in(0,\pi)$

Opačne nech $\cos\alpha = 0$, potom $\cos\alpha = \dfrac{1/4(\|x\|^2-\|y\|^2)}{\|1/2(x+y)\|\cdot\|1/2(x-y)\|} = 0 \Rightarrow \|x\|^2-\|y\|^2=0$

$\Leftrightarrow \|x\|^2=\|y\|^2$

$\Leftrightarrow \|x\|=\|y\|$,

lebo $\|x\|,\|y\|\geq 0$.

$\boxed{\text{Príklad 7}}$ Zistite, či nasledujúce funkcie sú kvadratické formy. Ak áno, napíšte odpovedajúcu symetrickú bilineárnu formu a maticu tejto formy v štandardnej báze priestoru $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$ / $\mathbb{R}_1[x]$.

a) $f: Mat_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ $\quad f(X) = Tr(X^3)$, kde Tr je stopa matice X.

b) $g: Mat_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ $\quad g(X) = Tr(X^2)$, kde Tr je stopa matice X.

c) $k: \mathbb{R}_1[x] \to \mathbb{R}$ $\quad h(p) = \underbrace{p(1)}_{\text{lineárne zobrazenie}} \cdot \overbrace{p(2)}^{\text{lineárne zobrazenie}} + \underbrace{4p(3)}_{\text{lineárne zobrazenie}} \cdot \overbrace{p'(0)}^{\text{lineárne zobrazenie}}$

Riešenie:

a) Predpokladajme, že f je odvodená zo symetrickej bilineárnej formy F t.j. $f(X) = F(X,X)$

Z bilinearity F: $f(t\cdot X) = F(t\cdot X, t\cdot X) = t^2 F(X,X) = t^2 f(X)$

Zvoľme napr. $Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Potom $\quad f(t\cdot Y) = Tr((t\cdot Y)^3) = Tr(t^3\cdot Y^3) = t^3 \cdot Tr(Y^3)$

$$t^2 f(Y) = t^2 Tr(Y^3).$$

$$t^3 Tr(Y^3) \neq t^2 Tr(Y^3) \iff t^3 \neq t^2 \iff t^2\cdot(t-1) \neq 0 \iff t \neq 0,1$$

Zvoľme $t = 2$ napr.

b) Zvoľme $G(X,Y) = Tr(X\cdot Y) = \langle r_1(X), s_1(Y)\rangle + \dots + \langle r_n(X), s_n(Y)\rangle$, potom
↙ štandardný skalárny súčin na $\mathbb{R}^n$

$G(X,X) = Tr(X^2)$ ✓

$G(X,Y) = Tr(X\cdot Y) = Tr(Y\cdot X)$ (domáca úloha v M1110)

$G(aX + b\cdot Y, Z) \stackrel{?}{=} a\cdot G(X,Z) + b\cdot G(Y,Z)$

$$G(aX + b\cdot Y, Z) = Tr((aX + bY)\cdot Z) = \langle r_1(aX+bY), s_1(Z)\rangle + \dots + \langle r_n(aX+bY), s_n(Z)\rangle$$
$$= \langle a\cdot r_1(X) + b\cdot r_1(Y), s_1(Z)\rangle + \dots + \langle a\cdot r_n(X) + b\cdot r_n(Y), s_n(Z)\rangle$$
$$= a\cdot\langle r_1(X), s_1(Z)\rangle + b\cdot\langle r_1(Y), s_1(Z)\rangle + \dots + a\langle r_n(X), s_n(Z)\rangle + b\langle r_n(Y), s_n(Z)\rangle$$
$$= a\cdot Tr(X\cdot Z) + b\cdot Tr(Y\cdot Z)$$
$$= a\cdot G(X,Z) + b\cdot G(Y,Z)$$

Bilinearita $G(X,Y)$ plynie zo symetrie a bilinearity v 1. zložke.

c) Máme súčet súčinov 2 lineárnych zobrazení, budeme ukazovať, že sa jedná o kvadratickú formu.

$$H(p,q) = \frac{1}{2}p(1)q(2) + \frac{1}{2}q(1)p(2) + 2p(3)q'(0) + 2q(3)p'(0).$$

Iste $H(p,p) = h(p)$ a $H(p,q) = H(q,p)$. Zostáva ukázať bilinearitu v niektorej zložke, vid' minulé cvičenie.