

## 5. cvičení z lineární algebry II

**Příklad. 1.** Najděte ortonormální bázi podprostoru

$$S = [(1, 2, -1, 3, 1), (5, 2, -1, 7, 1), (2, -1, 2, -4, -2)] \subset \mathbb{R}^5,$$

jestliže prostor  $\mathbb{R}^5$  bereme se standardním skalárním součinem. Použijte k tomu prvně Gramův-Schmidtův ortogonalizační proces a potom získané vektory ortogonální báze vynormujte (tj. vydělte normou, abyste získali vektory jednotkové velikosti).

**Příklad. 2.** V  $\mathbb{R}^5$  se standardním skalárním součinem najděte ortogonální doplněk podprostoru

$$V = [(1, 2, -1, -3, 3), (1, -2, 3, 1, -1)].$$

**Příklad. 3.** Spočítejte kolmou projekci vektoru  $u = (2, 11, -3, -4, 7)$  do podprostoru  $V$  a jeho ortogonálního doplňku  $V^\perp$  z předchozího příkladu.

**Příklad. 4.** Uvažujme  $\mathbb{R}^n$  se standardním skalárním součinem a nadrovinu  $\rho$

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = 0.$$

Pomocí skalárního součinu napište předpis lineárního zobrazení  $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , které je kolmou projekcí do nadroviny  $\rho$ . (Předpokládáme, že  $(a_1, a_2, \dots, a_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$ .)

**Příklad. 5.** Necht'  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  je kolmá projekce na rovinu

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0.$$

Najděte matici  $A$  tvaru  $3 \times 3$  takovou, že v souřadnicích standardní báze je

$$\varphi(x) = Ax = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

**Příklad. 6.** V  $\mathbb{R}^4$  spočítejte vzdálenost bodu  $A = [3, 3, 1, 5]$  od roviny

$$\rho : x_1 - x_3 = -2, \quad x_2 + x_4 = 6.$$

Navíc najděte bod  $R \in \rho$  takový, že  $\text{dist}(A, \rho) = \|A - R\|$ .

*Řešení.*  $R = [1, 2, 3, 4]$ ,  $\text{dist}(A, \rho) = \sqrt{10}$ . □

### Další příklady na procvičení

**Příklad. 1.** [Studijní materiály v ISu, domácí úkoly ke cvičení č. 6, úloha 1d.]  
Najděte ortonormální bázi podprostoru

$$V = [(1, 1, 3, 3, 4), (1, 3, -5, -7, -1), (1, -1, 5, 7, -3)] \subset \mathbb{R}^5,$$

jestliže prostor  $\mathbb{R}^5$  bereme se standardním skalárním součinem.

**Příklad. 2.** [Studijní materiály v ISu, domácí úkoly ke cvičení č. 7, úloha 1]

V  $\mathbb{R}^5$  se standardním skalárním součinem najděte kolmou projekci vektoru  $u = (1, 2, 3, 4, 5)$  do vektorových podprostorů

$$V = [(3, 3, 2, 1, 3), (5, 1, 4, -1, 1)]$$

$$W = [(1, -3, 4, -2, 2), (1, 5, -8, -2, 4), (1, -9, 16, 4, -4)]$$

Ve druhém případě spočítejte prvně ortogonální doplněk  $W^\perp$  a kolmou projekci vektoru  $u$  do  $W^\perp$ .

**Příklad. 3.** Necht'  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  je kolmá projekce na přímku  $p$  procházející počátkem se směrovým vektorem  $(1, -2, 1)$ . Najděte matici  $B$  tvaru  $3 \times 3$  takovou, že v souřadnicích standardní báze je

$$\varphi(x) = Bx = B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$