

8. cvičení z lineární algebry II

Příklad 1 jsem sice dělal na přednášce, ale je dobré ho udělat krátce i na cvičení. Příklad 2 - na přednášce jsem ukazoval, že ortogonální matice tvaru 2×2 s determinantem -1 reprezentují symetrii podle osy procházející počátkem. Návod k řešení příkladů 3, 4, 5 jsem dával na přednášce, dělejte to podle něj. (Prvně zjistit, že jsou to ortogonální matice, pak spočítat determinant a vlastní vektory k 1 nebo -1 podle determinantu, atd. Charakteristický polynom a komplexní vlastní čísla a vektory není třeba počítat.) Příklady 3, 4 a 5 spočítejte všechny. Příklad podobný příkladu 6 jsme již dělali, je možné ho v případě nedostatku času vynechat. Příklad 7 udělejte tak, že najdete obrazy tří lineárně nezávislých vektorů.

Příklad 1. Lineární zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

je otočení o úhel α proti směru hodinových ručiček. Přesvědčte se o tom tím, že zobrazíte vektory $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} r \cos \beta \\ r \sin \beta \end{pmatrix}$.

Ukažte podle definice, že je to ortonormální operátor. Spočtěte determinant příslušné matice a v oboru komplexních čísel najděte její vlastní čísla.

Příklad 2. Zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ je symetrie podle přímky $x_1 - 2x_2 = 0$. Najděte matici B takovou, že ve standardních souřadnicích je $\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = B \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Jaká jsou vlastní čísla zobrazení φ a čemu se rovná $\det B$?

Příklad 3. Zjistěte, jakou geometrickou transformaci popisuje zobrazení $\varphi(x) = Ax$, kde

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Příklad 4. Zjistěte, jakou geometrickou transformaci popisuje zobrazení $\varphi(x) = Bx$, kde

$$B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Příklad 5. Zjistěte, jakou geometrickou transformaci popisuje zobrazení $\varphi(x) = Cx$, kde

$$C = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Příklad. 6. Necht' $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ je symetrie podle roviny

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0.$$

Najděte matici A tvaru 3×3 takovou, že v souřadnicích standardní báze je

$$\varphi(x) = Ax = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Příklad. 7. Zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ je rotace kolem přímky

$$x_1 - x_2 = 0, \quad x_3 = 0$$

převádějící vektor $(0, 0, 2)^T$ na vektor $(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0)^T$. Najděte matici B takovou, že ve standardních souřadnicích je $\varphi(x) = Bx$.

Další úlohy

Příklad. 1. [Studijní materiály v ISu, domácí úkoly ke cvičení č. 10, úloha 1a.]

Zjistěte, jakou geometrickou transformaci popisuje zobrazení $\varphi(x) = Gx$, kde

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Příklad. 2. Zjistěte, jakou geometrickou transformaci popisuje zobrazení $\varphi(x) = Fx$, kde

$$G = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Příklad. 3. [Studijní materiály v ISu, domácí úkoly ke cvičení č. 10, úloha 2b.]

Zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ je rotace kolem přímky

$$x_2 - x_3 = 0, \quad x_1 = 0$$

převádějící vektor $(2, 0, 0)^T$ na vektor $(0, \sqrt{2}, -\sqrt{2})^T$. Najděte matici B takovou, že ve standardních souřadnicích je $\varphi(x) = Bx$.

Příklad. 4. Necht' $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ je symetrie podle roviny $x_1 - x_2 + x_3 = 0$. Najděte matici C tvaru 3×3 takovou, že v souřadnicích standardní báze je $\varphi(x) = Cx$.