11. cvičení z lineární algebry II 2021

Minimalistický program je udělat úlohy 1 až 4.

Příklad. 1. Úloha lineární regrese. V rovině jsou dány body

$$[x_1, y_1) = [-1, 1], \quad [x_2, y_2] = [0, 0], \quad [x_3, y_3] = [1, 1], \quad [x_4, y_4] = [2, 3].$$

Těmito body proložte přímku $y = px + q$ tak, aby součet čtverců $\sum_{i=1}^{4} (y_i - (px_i + q))^2$ byl minimální.

Příklad. 2. Které z následujících matic jsou primitivní?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Příklad. 3. Farmář chová ovce. Jejich porodnost je dána pouze věkem a je průměrně 2 ovce na jednu ovci mezi jedním a dvěma lety věku, 4 ovce na jednu ovci mezi dvěma a třemi lety věku a 2 ovce na jednu ovci mezi třemi a čtyřmi roky věku. Ovce do jednoho roku nerodí. Z roku na rok umře vždy polovina ovcí a to rovnoměrně ve všech věkových skupinách. Po 4 letech posílá farmář ovce na jatka. Jakou část jehňátek může každý rok prodat, aby mu velikost stáda zůstávala stejná? V jakém věkovém poměru budou rozděleny počty ovcí v jednotlivých věkových skupinách?

Příklad. 4. Roční Albertek Einsteinů staví se 4 kostkami věž. Ta mu ale každou chvilku spadne. Když ji má čerstvě spadlou, vezme nějakou kostku a snaží se ji postavit na některou jinou, což se mu podaří s pravděpodobností 1/2. Když má věž ze dvou nebo tří kostek, snaží se postavit další kostku na její vrchol, což se mu opět s pravděpodobností 1/2 podaří. Pokud má věž ze čtyř kostek, radostně zatleská a věž zboří. Takto pokračuje pořád dokola. Maminka se na něj po dostatečně dlouhé době přijde podívat. Jaká je pravděpodobnost, že uvidí stát věž o čtyřech kostkách?

Příklad. 5. Populační model je dán Leslieho maticí

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}.$$

Pro která $a \in [0, 1]$ populace expanduje, pro která směřuje k vyhynutí a pro která se stabilizuje?

Příklad. 6. Rodina Novákova každoročně jezdí na celý srpen na dovolenou. Buď naloží auto kempingovým vybavením a cestuje po Evropě, nebo naloží kola a jedou k babičce na Vysočinu. Každý rok se rozhodují podle toho, jak trávili dovolenou poslední dva roky, a to částečně náhodně za použití klasické kostky. Rozhodují se podle následujících pravidel.

- Pokud byli poslední dva roky kempovat po Evropě, jedou na Vysočinu.

- Pokud byli poslední dva roky na Vysočině, tak jedou po Evropě.
- Pokud byli loni kempovat po Evropě a předloni u babičky, pak hází kostkou, a když padne liché číslo, tak jedou po Evropě, a když sudé číslo, tak jedou na Vysočinu.
- Pokud byli loni na Vysočině a předloni po Evropě, pak hází kostkou. Když padne 1 nebo 2, pak jedou na Vysočinu, jinak jedou po Evropě.

Tímto způsobem se o dovolené rozhodují celý život. V srpnu letošního roku je přijel do místa jejich bydliště navštívit kamarád, s kterým se neviděli po mnoho let. Soused, který věděl, že jsou buď na Vysočině nebo cestují po Evropě, ale nevěděl, kde byli poslední roky, jej poslal na Vysočinu. Určete, jaká je pravděpodobnost, že tam rodinu Novákovu najde.

Další příklady

Příklad. 1. Soustava lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & & & & & = & 1 \\ -x_1 & + & x_2 & & & = & -1 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ & & x_2 & - & x_3 & = & -1 \\ & & & & x_3 & = & 1 \end{array}$$

nemá řešení. Najděte všechny nejlepší aproximace řešení této soustavy.

Příklad. 2. V rovině jsou dány body

$$[x_1, y_1] = [2, 5], \quad [x_2, y_2] = [-1/2, 3/2], \quad [x_3, y_3] = [3/4, 1/4].$$

Těmito body proložte přímku $y = px + q$ tak, aby součet čtverců $\sum_{i=1}^{3} \left(y_i - (px_i + q)\right)^2$ byl minimální.

Příklad. 3. Uvažujme v rovině 4 body:

$$[x_1, y_1) = [-1, 1], \quad [x_2, y_2] = [0, 0], \quad [x_3, y_3] = [1, 1], \quad [x_4, y_4] = [2, 3].$$

Těmito body proložte parabolu $y = px^2 + qx + r$ tak, aby součet čtverců

$$\sum_{i=1}^{4} \left(y_i - (px_i^2 + qx_i + r)\right)^2$$

byl minimální.

Příklad. 4. V jezeru žije populace bílých ryb. Předpokládáme, že druhého roku se dožije 20 % plůdku a od tohoto věku jsou ryby schopné se reprodukovat. Z mladých ryb přežije do třetího roku do stadia velké ryby 60 %. Úmrtnost velkých ryb je zanedbatelná. Dále předpokládáme, že roční přírustek ryb je trojnásobkem počtu ryb schopných reprodukce.

Tato populace by evidentně jezírko přeplnila. Rovnováhu chceme dosáhnout nasazením štik. Každá štika sní ročně 500 velkých ryb. Kolik štik máme do jezera nasadit, aby populace ryb stagnovala?