Konzultace dne 30.4.
k 5. a 6. DU

5. DU

1. př vl. čísla a vektory A 3x3

2. př 4x4 4 různá vl. čísla

3x3 2 kořeny byly komplexní

$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\varphi(x) = Ax$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda E) = -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 17\lambda + 4$$

kořeny hledáme mezi děliteli čísla 4

$\lambda_1 = 4$

$$-\lambda^3 + 8\lambda^2 - 17\lambda + 4 = (4-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 1)$$

$$\begin{array}{l} -\lambda^3 + 4\lambda^2 \\ \hline \quad 4\lambda^2 - 17\lambda + 4 \\ \quad 4\lambda^2 - 16\lambda \\ \hline \quad\quad -\lambda + 4 \end{array}$$

$D = 16 - 4 = 12$

$$\lambda_{2,3} = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2}$$

$$\lambda_{2,3} = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$A-(2+\sqrt{3})E = \begin{pmatrix} -2-\sqrt{3} & 1 & 0 \\ 0 & -2-\sqrt{3} & 1 \\ 4 & -17 & 8-2-\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -2-\sqrt{3} & 1 & 0 \\ 0 & -2-\sqrt{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x_1 = 1 \qquad x_2 = 2+\sqrt{3}$

$$(-2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) + x_3 = 0$$

$$x_3 - (2+\sqrt{3})^2 = 0$$

$\lambda_2 = 2+\sqrt{3}$

$$x_3 = (2+\sqrt{3})^2 = 4+3+4\sqrt{3}$$
$$= 7+4\sqrt{3}$$

$$v_2 = (1,\ 2+\sqrt{3},\ 7+4\sqrt{3})$$

Pr. 3

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ \cancel{49} & \cancel{70} & \cancel{23} \end{pmatrix}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

$u_1 \quad u_2 \quad u_3$

$A \quad 3\times 3$

$A-1604E \qquad A^4$

$\lambda_1 - 1604 \quad u_1 \qquad \lambda_3 - 1604 \quad u_3$

$\lambda_2 - 1604 \quad u_2$

$Au = \lambda u$

$$(A-1604E)u = Au - 1604u = \lambda u - 1604u$$
$$= (\lambda - 1604)u$$

$$A u = \lambda u$$
$$A^2 u = A(Au) = A(\lambda u) = \lambda(Au)$$
$$= \lambda(\lambda u) = \lambda^2 u$$
$$\underline{A^4 u = \lambda^4 u}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

$\lambda_1^4 \quad \lambda_2^4 \quad \lambda_3^4$

<u>4. př</u> $\quad A \quad n \times n \quad p(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + \dots + a_0$

(1) $\quad a_0 = \det A$

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda E)$$
$$a_0 = p(0) = \det(A - 0E) = \det A$$

(2) $\quad A^{-1}$ existuje $\iff \lambda = 0$ není vl. číslo.

$\lambda = 0$ není vl. číslo $\iff p(0) \neq 0 \iff a_0 \neq 0$

$\iff \det A \neq 0$

$\iff A^{-1}$ existuje.

6. DU

1. př.

$$\varphi(x) = \frac{1}{3} \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

A je ortog.

<u>2 možnosti</u>

—

(1) $\quad \det A = 1$

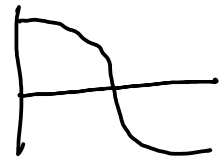
otočení, vl. čísla 1,

osa otáčení je určena

vl. vektorem k $\underline{\underline{1}}$

$v \perp u$

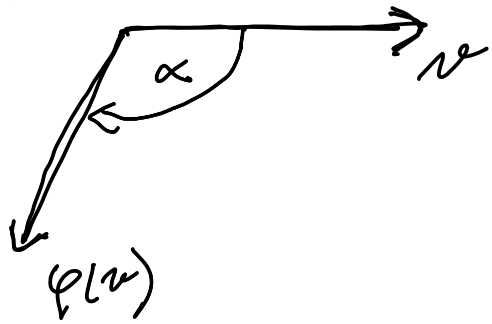
$\varphi(v)$



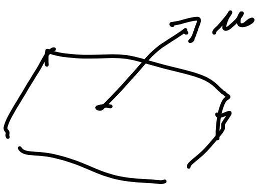
úhel otáčení je $\alpha \in [0, \pi]$

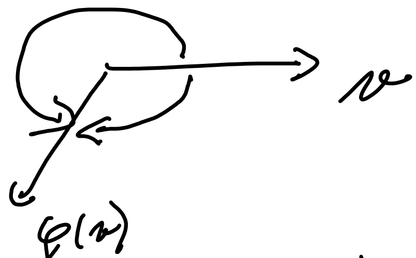
$$\cos\alpha = \frac{\langle v, \varphi(v)\rangle}{\|v\|\,\|\varphi(v)\|} = \frac{\langle \varphi(v), v\rangle}{\|v\|\,\|\varphi(v)\|}$$

$[-1, 1]$



$\underline{\alpha \in [0, \pi]}$





$$\det A = \det \frac{1}{3}\begin{pmatrix} & & \end{pmatrix} = \frac{1}{27}\det\begin{pmatrix} & & \end{pmatrix}$$

$$= 1$$

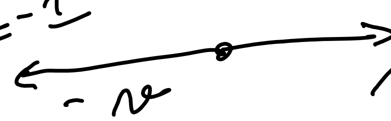
$\underline{u = (1,1,-2)}$ je vl. vekt. k 1

$(A-E)u = 0$

$v = (1,-1,0) \perp u$

$\varphi(v) = (-1, 1, 0) = -v$

$$\cos\alpha = \frac{\langle v, -v\rangle}{\|v\|\,\|-v\|} = \frac{-\|v\|^2}{\|v\|^2} = -1$$



$\alpha = \pi$

Otočení kolem osy $[(1,1,-2)]$
a úhel π = symetrie podle
téže osy.

2. možnost — $\det A = -1$, vl. číslo $\underline{-1}$

φ je ~~otočení~~ / symetrie podle
roviny kolmé k vl. vektoru
k -1 u

symetrie podle $[u]^\perp$
a otočení o úhel α kolem
osy $[u]$.

$$\cos\alpha = \frac{\langle v, \varphi(v)\rangle}{\|v\|\,\|\varphi(v)\|} \qquad v \perp u, \quad v \neq \vec{0}.$$

DÚ 6 př. 2

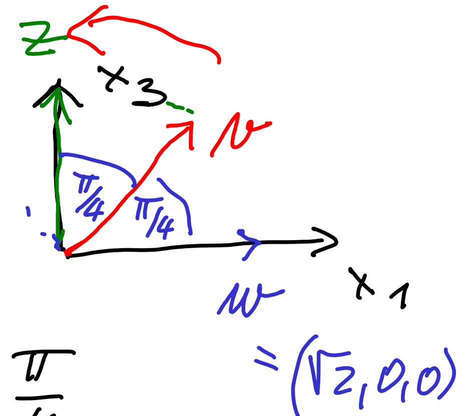
$\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ otočení kolem
přímky $x_1 = 0,\ x_3 = 0$
převádějící vektor $v = (1,0,1)^T$

na $\psi(v) = z = (0,0,-\sqrt{2})^T$.

Najít matice B

$$\psi(x) = Bx.$$

$$B = (\psi)_{\varepsilon_3, \varepsilon_3} = \big(\psi(e_1), \psi(e_2), \psi(e_3)\big)$$



Osa otáčení $u = (0,1,0)$

$$\psi(u) = u$$

$v = (1,0,1) \qquad \alpha = \frac{\pi}{4}$

$z = \psi(v) = (0,0,\sqrt{2}) \qquad \cos\alpha = \dfrac{\langle v, z\rangle}{\|v\|\,\|z\|} = \dfrac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2}$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{2} \qquad \alpha = \dfrac{\pi}{4}$

$\psi(z) = (-1,0,1) \qquad \psi(w) = (1,0,1)$

$$\left(\begin{array}{c|c} u & u \\ v & z \\ z & \psi(z) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} \sqrt{2} & 0 & 0 & +1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/\sqrt{2} & 0 & +1/\sqrt{2} \end{array}\right) \begin{array}{l} = \varphi(e_1) \\ = \varphi(e_2) \\ = \varphi(e_3) \end{array}$$

$$B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Příklad 3

$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$\varphi(u) = u - 2\frac{\langle u, v\rangle}{\|v\|^2} v$$

Jaké je to zobrazení.

$v \neq \vec{o}$

1. Je lineární

   φ je jednoznačně určena hodnotami na 3 lin. nez. vektorech.

2. $$\varphi(v) = v - 2\frac{\langle v, v\rangle}{\|v\|^2} v$$

   $$= v - 2v = -v$$

$u \perp v$

$$\varphi(u) = u - 2\,\frac{\langle u, v\rangle}{\|v\|^2}\,v =$$

$$= u - 2\,\frac{0}{\|v\|^2}\,v = u$$

$\varphi(v) = -v$

$\varphi(u) = u$

pro $u \in [v]^\perp$

$\Longrightarrow$ jde o symetrii podle roviny kolmé k v

podle $[v]^\perp$.

Jiný postup: Napadne nás, že

$$u \longmapsto \frac{\langle u, v\rangle}{\|v\|^2}\,v$$

je kolmá projekce na $[v]$.

Q : kolmá projekce do $[v]$

$Qu = av$

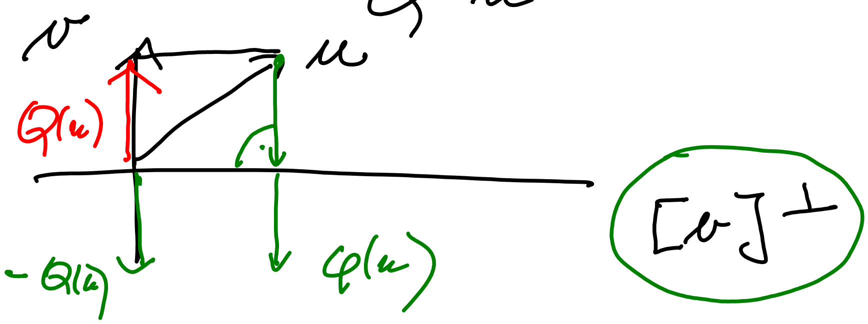
$u - av \perp v$

$$\langle u - av, v \rangle = 0$$

$$\langle u, v \rangle = a \langle v, v \rangle$$

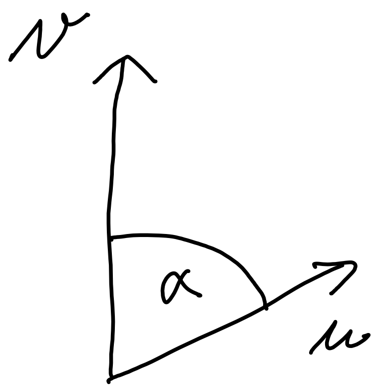
$$\frac{\langle u, v \rangle}{\|v\|^2} = a$$

$$Qu = av = \frac{\langle u, v \rangle}{\|v\|^2} v$$



$\varphi(u) = u - 2Qu$

<u>4. př</u>



$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

f symetrie podle $[u]$

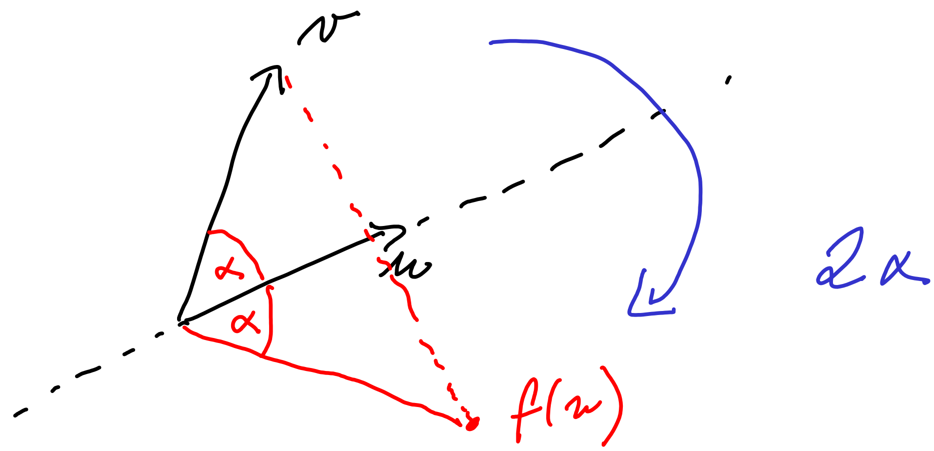
lin. zobr.

g symetrie podle $[v]$

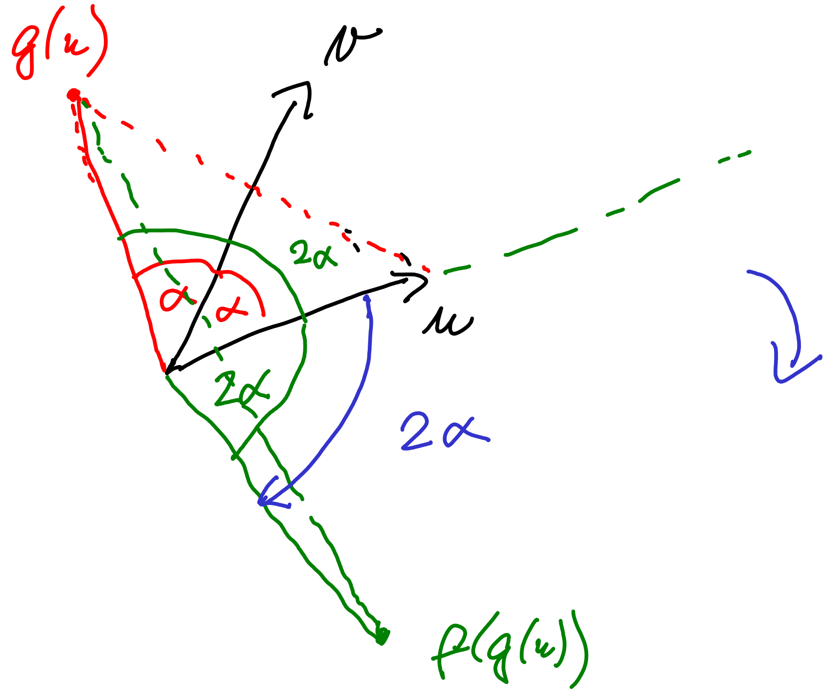
$f \circ g$

lin. zobr.

k jeho určení stačí znát dvě hodnoty.



$f\circ g\,(v) = f(v)$



$(f\circ g)(u)$

$f(g(u))$

Na u a v je $f\circ g$ otočení o úhel 2α ve směru od v k u. To je lin. zobrazení, tedy

$f\circ g$ = otočení o 2α od v k u