# LA 2 – 1. přednáška Afinní geometrie

Požadavky – 13 týdnů

| | | |
|---|---|---|
| Dom. úlohy 10× | průběžná písemka | závěreč. písemka |
| 10×10 = 100 b maximálně | max 10b | |
| potřeba zisku 60 | | T + P |
| z toho, co je navíc | | 10 + 12 |
| bude bonifikace | | + ústní |
| $\frac{\text{navíc}}{10} \doteq$ bonifikace | | |

Podmínka je 1) aspoň 60b z DÚ
2) aspoň 5 b z T
3) aspoň 17 b ze součtu bonifikace + zisku + celá zkouška

Aspoň 9 účastí na cvičeních.

# Afinní geometrie

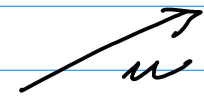
$U$ vekt. prostor nad $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$

prvky prostoru $U$ se nazývají vektory $u, v, z \in U$

v afinní geometrii je budeme nazývat také body

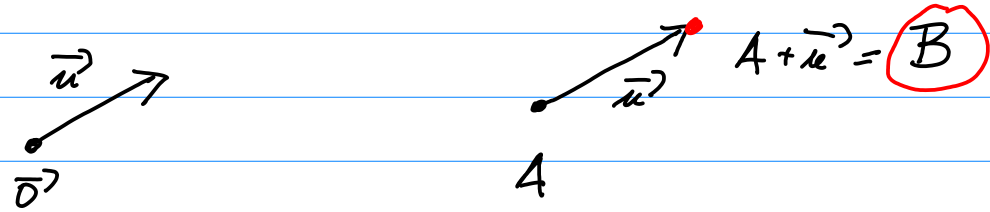
vektor = „šipka"

bod = „bod"




• bod $A$

K bodu lze přičíst vektor a výsledkem je bod




Afinní podprostory v $U$

víme, že vekt. podprostory v $\mathbb{R}^2$ jsou počátek, všechny přímky přes počátek, celé $\mathbb{R}^2$

Chceme pracovat se všemi body a všemi přímkami.

Afinní podprostor bude „vekt. podprostor posunutý do nějakého bodu"

**Definice** Afinní podprostor $M$ ve vekt. prostoru $U$ je neprázdná podmnožina tvaru

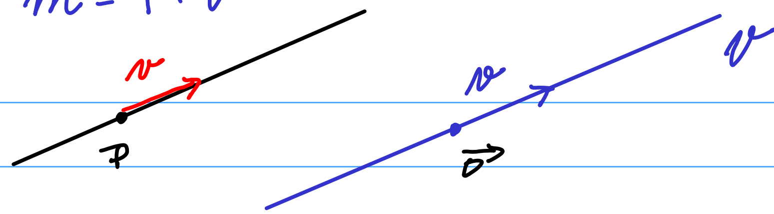
$$M = P + V = \{P + v \in U,\ v \in V\},$$

kde $P$ je nějaký bod a $V$ je vekt. podprostor v $U$.

**Příklady:** (1) Afin. podpr. v $\mathbb{R}^2$

- všechny body $\qquad M = M + \{\vec{o}\}$
- všechny přímky

$M = P + V$




• celé $\mathbb{R}^2$

(2) Analogicky afin. podprostory v $\mathbb{R}^3$ jsou
• všechny body
• všechny přímky
• všechny roviny
• celé $\mathbb{R}^3$

(3) Afinní prostor jako množina řešení soustavy lin. rovnic

A matice $k \times n$ nad $\mathbb{K}$, $b \in \mathbb{K}^k$

Soustava $Ax = b$

Frobeniova věta: Soustava má řešení $\iff h(A) = h(A|b)$

Nechť $h(A) = h(A|b)$. Pak

$M = \{x \in \mathbb{K}^n, Ax = b\}$ je afinní podprostor.

• neprázdná

• $M = \{z + y \in \mathbb{K}^n, Ay = 0\} = \underbrace{z}_{\text{bod}} + \underbrace{\{y \in \mathbb{K}^n, Ay = 0\}}_{\text{vekt. podprostoru}}$

$z$ je nějaké řešení $Az = b$

$M$ je afinní podprostor.

(4) $U = \mathbb{R}_{10}[x]$

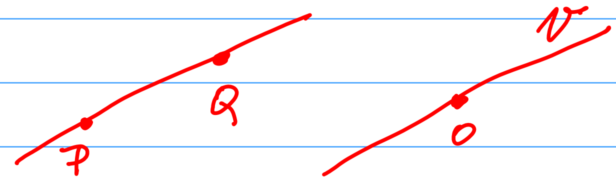
$M = \{p \in \mathbb{R}_{10}[x];\ p(1) = 2021\}$

Polynom $p(x) = 2021 \in \mathbb{R}_{10}[x]$

$$M = \underbrace{2021}_{\text{bod}} + \underbrace{\{q \in \mathbb{R}_{10}[x], q(1) = 0\}}_{\substack{q(x) = (x-1)\,s(x) \quad s \in \mathbb{R}_9[x] \\ \text{vekt. podprostor}}}$$

$\mathcal{M}$ je afinní podprostor

Poznámka: V definici $\mathcal{M} = P + V$ není bod $P$ určen jednoznačně, ale podprostor $V$ ano.




$P + V = Q + V = \mathcal{M}$

Proto můžeme definovat

zaměření afin. podprostoru $\mathcal{M} = P + V$

$$Z(\mathcal{M}) = V$$

$\dim \mathcal{M} = \dim Z(\mathcal{M})$.

Příklad důležitý

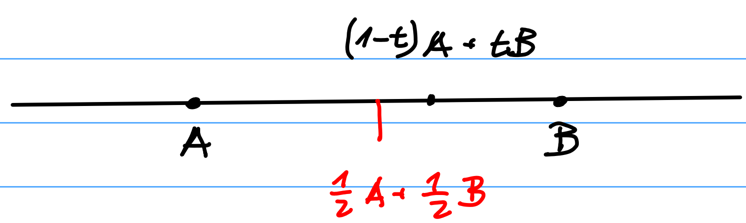
$$\mathcal{M} = \{x \in K^n, \ Ax = b\}$$
$$Z(\mathcal{M}) = \{y \in K^n, \ Ay = 0\}$$

Lin. kombinace vektorů $\quad a\vec{u} + b\vec{v}$

Afinní kombinace bodů $\quad A, B$

$$(1-t)A + tB := \overset{\text{bod}}{A} + t\overbrace{(B-A)}^{\text{vektor}}$$ výsledek je bod

$$sA + tB \qquad s + t = 1$$

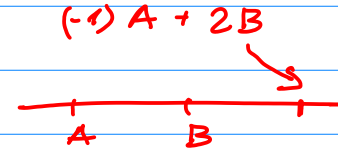



$0 \cdot A + 1 \cdot B = B$

$1 \cdot A + 0 \cdot B = A$

$\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$ = střed úsečky

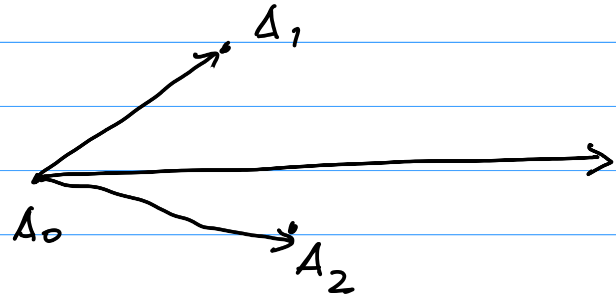
$(-1)A + 2B$




Afinní kombinace více bodů $A_0, A_1, \dots A_k$ je

$$\sum_{i=0}^{k} t_i A_i = \left(1 - \sum_{i=1}^{k} t_i\right)A_0 + t_1 A_1 + \dots \dots =$$ kde $\sum_{i=0}^{k} t_i = 1$

$$:= A_0 + t_1(A_1 - A_0) + t_2(A_2 - A_0) + \dots$$




$A_0 + t_1(A_1 - A_0) + t_2(A_2 - A_0)$

$= (1 - t_1 - t_2)A_0 + t_1 A_1 + t_2 A_2$

Věta: $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{U}$ je afinní podprostor, právě když s každými dvěma body $A, B$, $A \neq B$, obsahuje i všechny body přímky $A, B$.

Jinak: Afinní podprostor je neprázdná množina uzavřená na afinní kombinace.

$\triangle ABC$

těžiště $\quad \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C$

## DVOJÍ POPIS AFIN. PODPROSTORŮ

① Parametrický popis:

- souvisí s definicí $\quad \mathcal{M} = P + V$

Nechť $V$ je podprostor s bazí $v_1, v_2, \dots v_k$

Pak každý bod $M \in \mathcal{M}$ je tvaru

$$M = P + t_1 v_1 + t_2 v_2 + \dots + t_k v_k .$$

To je param. popis.

Rovina v $\mathbb{R}^3$ $\quad P + t\vec{u} + s\vec{v}$, kde $\vec{u}, \vec{v}$ jsou lin. nezávislé

$V = [\vec{u}, \vec{v}]$

② Implicitní popis = popis pomocí soustavy rovnic

Popis je $M = \{x \in \mathbb{K}^n ;\ Ax = b\}$, kde
$A$ je matice $k \times n$ nad $\mathbb{K}$, $b \in \mathbb{K}^k$ a $h(A) = h(A|b)$

Příklad (i) rovina v $\mathbb{R}^3$ $\quad a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = b$

$A = (a_1\ a_2\ a_3) \neq (0\ 0\ 0)$

$h(A) = 1 \qquad 1 = h(A) = h(A|b) = h(a_1\ a_2\ a_3\ b) = 1$

(ii) rovnice přímky v $\mathbb{R}^3$

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 = b_1$$
$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 = b_2$$

$$h(A) = h\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = 2$$

V tomto případě $2 = h(A) = h(A|b) = 2$.

Přechod od implicitního popisu k parametrickému
– stačí vyřešit soustavu pomocí parametrů

Pro příklad $\quad Ax = b$ má řešení

$$x_1 = (2 + 3t - s)$$
$$x_2 = (3 + t - 8s)$$
$$x_3 = (1 + 3t)$$
$$x_4 = 2 + t + 2s$$

$$\mathcal{M} = \{[2+3t-s,\ 3+t-8s,\ 1+3t,\ 2+t+2s],\ t,s\in\mathbb{R}\}$$

$$= \{[2,3,1,2] + t(3,1,3,1) + s(-1,-8,0,2),\ s,t\in\mathbb{R}\}$$

Přechod od param. popisu k implicitnímu

$\mathcal{M}$: $\quad X = P + t_1 v_1 + \dots + t_k v_k$

V souřadnicích
$$x_1 = p_1 + c_{11}t_1 + c_{12}t_2 + \dots + c_{1k}t_k$$
$$x_2 = p_2 + c_{21}t_1 + c_{22}t_2 + \dots + c_{2k}t_k$$
$$\vdots$$
$$x_n = p_n + c_{n1}t_1 + \qquad + c_{nk}t_k$$

$$x = Ct + p \qquad x = \begin{pmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} \quad t = \begin{pmatrix} t_1\\ \vdots\\ t_k\end{pmatrix} \quad p = \begin{pmatrix} p_1\\ \vdots\\ p_n\end{pmatrix}$$

jedn. matice $\to$ $Ex = Ct + p$ $\quad \oplus$

$$(E \mid C \mid p) \xrightarrow[\text{operace}]{\text{el. řádk.}} \left(\begin{array}{c|c|c} A_1 & C_1 & b_1\\ A & 0 & b\end{array}\right)$$

matice ve schod. tvaru, $C_1$ je ve schod. tvaru bez nulového řádku

$$\begin{pmatrix} A_1\\ A\end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} C_1\\ 0\end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} b_1\\ b\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} A_1 x = C_1 t + b_1\\ A x = b\end{array}\right\} \quad (*)$$

Závěr: Je-li $X \in M$, pak jeho souřadnice splňují soustavu $\quad Ax = b$.

Nechť platí $Ax = b$ pro nějaké $x$. Pak v rovnici
$$A_1 x - b_1 = C_1 t \qquad C_1 \text{ ve schod. tvaru bez nul. řádku}$$
Existuje $t = \begin{pmatrix} t_1\\ \vdots\\ t_k\end{pmatrix}$ splňující tuto rovnici.

Proto dvojice $x, t$ splňují soustavu (+)

$$A_1 x = C_1 t + b_1$$
$$A x = b$$

Ta je ekvivalentní se soustavou (+)

$$x = Ct + p$$

Tedy $X$ leží v $M$.

## Průnik afinních podprostorů $M$ a $N$

Je-li neprázdný je to afinní podprostor.
Při počítání nastávají 3 případy

(1) Oba podprostory jsou dány soustavou rovnic

$$M: \quad Ax = b$$
$$N: \quad Cz = d$$
$$M \cap N: \quad \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

(2) $M$ parametricky $\quad M : X = P + t_1 v_1 + \dots + t_k v_k$

$N$ zadán soustavou $\quad N : \quad Ax = b$

Dosadíme $\quad x_1 = p_1 + c_{11} t_1 + \dots + c_{1k} t_k$

$\quad x_2 = p_2 + c_{21} t_1 + \dots$

a dosadíme do rovnice pro $X$.
Dostaneme rovnice pro $t_1, t_2, \dots t_n$.
Obvykle neznámých $t$ je méně než neznámých $X$. Vyřešíme

$$t_1 = 1 + 2s_1 - 3s_2$$
$$t_2 = 2 + s_1 + s_2$$
$$t_3 = 3 - 2s_2$$

Pak $M \cap N$ je parametricky vyjádřen takto

$$M \cap N: \; P + (1+2s_1-3s_2)v_1 + (2+s_1+s_2)v_2 + (3-2s_2)v_3 = \underbrace{P + v_1 + 2v_2 + 3v_3}_{\text{bod}} + s_1(2v_1+v_2) + s_2(-3v_1+v_2-2v_3)$$

(3) Oba af. podprostory jsou zadány parametricky

$$M: \; P + t_1u_1 + t_2u_2 + t_3u_3$$
$$N: \; Q + s_1v_1 + s_2v_2$$

$$M \cap N = \{X = P + t_1u_1 + t_2u_2 + t_3u_3 = \underline{Q + s_1v_1 + s_2v_2}\}$$

řešíme rovnici

$$t_1u_1 + t_2u_2 + t_3u_3 - s_1v_1 - s_2v_2 = Q - P$$

Stačí spočítat $s_1, s_2$:

$$s_1 = 2 + a$$
$$s_2 = 3 + 4a$$

$$\mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \{ Q + (2+a)v_1 + (3+4a)v_2 \}$$

$$= \{ \underbrace{Q + 2v_1 + 3v_2}_{\text{bod}} + a(v_1 + 4v_2) \}$$

$$= Q + 2v_1 + 3v_2 + [v_1 + 4v_2]$$

## Spojení afinních podprostorů $\mathcal{M} \sqcup \mathcal{N}$

je to nejmenší afinní podprostor obsahující af. podprostory $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$

Příklad body $A, B$ $\quad A \neq B$

$$A \sqcup B = \overleftrightarrow{AB}$$

bod $A$, přímka $p$ $\quad A \sqcup p$ ... rovina určená bodem $A$ a přímkou $p$

$$\mathcal{M} = P + V \qquad \mathcal{N} = Q + W$$

$$\mathcal{M} \sqcup \mathcal{N} = P + [Q-P] + V + W$$

## Vzájemná poloha afinních podprostorů

$U$ vekt. prostor, $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ afinní podpr.
Zjišťujeme, zda

(1) je $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \emptyset$

(2) je $Z(\mathcal{M}) \subseteq Z(\mathcal{N})$ nebo $Z(\mathcal{N}) \subseteq Z(\mathcal{M})$

4 možné kombinace odpovědí určují vzájemnou polohu

(I) $m \subseteq n$ nebo $n \subseteq m$

v tomto případě $m \cap n \neq \emptyset$

a $Z(m) \subseteq Z(n)$ nebo $Z(n) \subseteq Z(m)$.

(II) $m$ a $n$ jsou rovnoběžné

zde $m \cap n = \emptyset$

a $Z(m) \subseteq Z(n)$ nebo $Z(n) \subseteq Z(m)$

(III) $m$ a $n$ jsou různoběžné

Nyní $m \cap n \neq \emptyset$

a $Z(m) \not\subseteq Z(n)$ ani $Z(n) \not\subseteq Z(m)$

(IV) $m$ a $n$ jsou mimoběžné

$m \cap n = \emptyset$ a

$Z(m) \not\subseteq Z(n)$ ani $Z(n) \not\subseteq Z(m)$

Příklad: Dvě roviny v $R^4$, které jsou mimoběžné.

$\rho$ : $[0,0,0,0] + s(1,0,0,0) + t(0,1,0,0) = [s,t,0,0]$

$\pi$ : $[0,0,0,1] + a(0,1,0,0) + b(0,0,1,0) = [0,a,b,1]$

$$\rho \cap \pi = \emptyset$$

$$Z(\rho) = [e_1, e_2] \nsubseteq Z(\pi) = [e_2, e_3]$$
$$\nsupseteq$$

## Další typické úlohy afinní geometrie

Najděte af. podprostor daných vlastností:

(1) V $\mathbb{R}^3$ zadán bod $A$ a dvě mimoběžky $k$ a $l$. Najděte přímku $p$ tak, že

- $A \in p$
- $k \cap p \neq \emptyset$ $\quad A \notin l,\ A \notin k$
- $l \cap p \neq \emptyset$

Řešení: Vezmeme rovinu $\alpha = A \sqcup l$ musí platit $p \subseteq \alpha$. Proto $p \cap k \subseteq \alpha \cap k$. Spočítáme průnik je to bod $B$ a hledaná přímka $p$ je $\overleftrightarrow{AB}$.

(2) V $\mathbb{R}^4$ dán bod $A$, přímka $l$, rovina $\rho$, $A \notin l$, $A \notin \rho$, $l, \rho$ mimoběžné! Najděte přímku $p$ tak, že

- $A \in p$
- $p \cap l \neq \emptyset$
- $p \cap \rho \neq \emptyset$

Řešení: Vezmeme znovu $\alpha = A \cup l$, opět $p \subseteq \alpha$. Pak $p \cap \rho \subseteq \alpha \cap \rho$. Spočítáme průnik $\alpha \cap \rho$, dostaneme bod $B$ a hledaná přímka $p$ je $\overleftrightarrow{AB}$.

Pojem afinního zobrazení – v oficiální verzi přednášky.