3. přednáška Kvadratické formy + skalární součin

Opakování (1) $f : U \times U \to K$ bilin. symetrická
existuje báze B v U

$$f(u,v) = b_{11} x_1 y_1 + b_{22} x_2 y_2 + \dots + b_{nn} x_n y_n$$

$(u)_B = (x_1, \dots x_n)^T$
$(v)_B = (y_1, \dots y_n)^T$

(2) na úrovni matic: Každá sym. matice A je kongruentní s nějakou diag. maticí B
$\exists P$ regulární

$$B = P^T A P .$$

Algoritmus (1) A matice f v bázi α

$$\begin{array}{c|c} A & \alpha^T \\ \hline \alpha & \end{array} \xrightarrow[\text{úpravy}]{\text{stejné řádk. sloupc.}} \begin{array}{c|c} B & \beta^T \\ \hline \beta & \end{array}$$

$$B = \underbrace{P^T}_{} A P$$

$$\underbrace{\beta = \alpha P}_{} \qquad \beta^T = P^T \alpha^T$$

$$P = (id)_{\alpha, \beta}$$

(2)

$$\begin{array}{c|c} A & E \\ \hline E & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c|c} B & P^T \\ \hline P & \end{array}$$

$$B = P^T A P .$$

Kvadratická forma U vekt. prostor nad $\mathbb{K}$ je zobrazení

$$q : U \to \mathbb{K}$$

takové, že existuje sym. bilin. forma $f : U \times U \to \mathbb{K}$, že

$$q(u) = f(u,u)$$

Příklady ① $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \underline{2} x_1 y_2 + \underline{2} x_2 y_1 + 4 x_1 y_3 + 4 x_3 y_1 + 2 x_2 y_2$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$q(x) = f(x,x) = 2x_1 x_2 + 2 x_2 x_1 + 4 x_1 x_3 + 4 x_3 x_1 + 2 x_2 x_2$$
$$= 4 x_1 x_2 + 8 x_1 x_3 + 2 x_2^2$$

Lemma: Sym. bilin. forma určující danou kvadr. formu q je určena jednoznačně.

Dk: $q(u) = f(u,u)$

$$q(u+v) - q(u-v) = f(u+v, u+v) - f(u-v, u-v)$$
$$= f(u,u) + 2 f(u,v) + f(v,v)$$
$$f(u,v) + f(v,u)$$
$$- \{ f(u,u) - 2 f(u,v) + f(v,v) \} = 4 f(u,v)$$

Sym. bilin. formy $\longleftrightarrow$ kvadr. formy

bijekce

$\updownarrow$

Matice v dané bázi

Sym. matice

__Příklad__ Kvadr. forma $q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$q(x) = 8x_1^2 - 3x_1x_2 + 9x_2x_3$$

$f: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \qquad q(x) = f(x,x)$

$$f(x,y) = 8x_1y_1 - \frac{3}{2}x_1y_2 - \frac{3}{2}x_2y_1 + \frac{9}{2}x_2y_3 + \frac{9}{2}x_3y_2 .$$

__Důsledek__ Ke každé kvadr. formě $q: V \to K$ existuje báze B v V, že

$$q(u) = b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + \dots + b_{nn}x_n^2$$

kde $(u)_B = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

diagonální tvar, B polární báze

B není určena jednoznačně.

Příklad $\quad f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sym. bilin.

$$f(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j \qquad a_{ij} = a_{ji}$$

Všechny kvadr. formy $q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + \sum_{1 \le i < j \le n}{}' 2a_{ij} x_i x_j$$

Budeme ve vekt. prostorech nad $\mathbb{R}$!

Sylvestrův zákon setrvačnosti

Nechť $q: U \to \mathbb{R}$ je kvadr. forma. Pak lze v U najít bázi, v jejíž souřadnicích je

$$q(u) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_s^2 + 0 \cdot x_{s+1}^2 + \dots + 0 \cdot x_n^2$$

Navíc (setrvačnost): Počet $+1, -1, 0$ nezávisí na bázi, ve které zápis provádíme.

Důkaz: Víme existuje báze $(v_1 \dots v_n)$ že

$$q(u) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} y_i^2$$

$a_{ii} > 0$ položme $x_i = \sqrt{a_{ii}}\, y_i$ $\quad x_i^2 = a_{ii} y_i^2$

$$w_i = \frac{v_i}{\sqrt{a_{ii}}}$$

$$\begin{array}{c|c} a_{ii} & v_i \\ \hline v_i & \end{array}$$

$\Downarrow$

$$\begin{array}{c|c} 1 & \frac{v_i}{\sqrt{a_{ii}}} = u_i \\ \hline u_i = \frac{v_i}{\sqrt{a_{ii}}} & \end{array}$$

$a_{ii} < 0$ položme

$$x_i = \sqrt{-a_{ii}}\; y_i$$

$$-x_i^2 = -(-a_{ii})\, y_i^2 = a_{ii} y_i^2$$

$$u_i = \frac{v_i}{\sqrt{-a_{ii}}}$$

$a_{ii} = 0$ necháme $u_i = v_i$

Signatura kvadr. formy q je trojice čísel s_{+1}, s_{-1}, s_0, které značí počet $1, -1$ a 0 ve vyjádření kvadr. formy v polární verzi.

(reálné)

Signatura symetrické matice je signatura příslušné kvadr. formy.

$u \in \mathbb{R}^n$ $q(u) = (u)^T A u$ příslušná kvadr. forma

Signatura diag. matice

$$D \begin{pmatrix} b_{11} & & 0 \\ & b_{22} & \\ 0 & & \ddots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

je počet kladných koef.
počet záporných
počet 0

$$\underline{D} = P^T \underline{A} P$$

Kritérium kongruence reálných sym. matic

A a B sym. reálné jsou kongruentní, právě když mají stejnou signaturu.

Speciální kvadr. formy (dim $U = n$)

- ① pozitivně definitní
  $\forall u \in U \setminus \{0\} \quad q(u) > 0 \iff s_+ = n,\ s_- = s_0 = 0$
- ② negativně definitní
  $\forall u \in U \setminus \{0\} \quad q(u) < 0 \iff s_+ = 0,\ s_- = n,\ s_0 = 0$

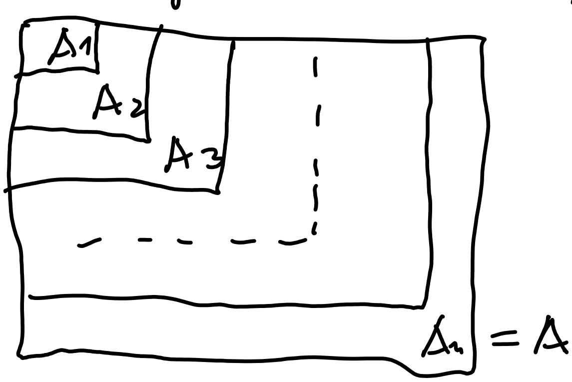
③ pozitivně semidefinitní
$\forall u \in U \quad q(u) \geq 0 \iff s_- = 0,\ s_+ + s_0 = n$

④ negativně semidefinitní
$\forall u \in U \quad q(u) \leq 0 \iff s_+ = 0,\ s_- + s_0 = n$

⑤ indefinitní
$\exists u \in U \quad q(u) > 0 \quad \exists v \in U \quad q(v) < 0$

Sylvestrovo kritérium

A sym. matice, hlavní minory



Hlavní minory jsou $\det A_i$

A_i je tvaru $i \times i$

Kritérium

(1) Kvadr. forma q je pozitivně definit.
$\Leftrightarrow$ hlavní minory její matice jsou kladné

$$\det A_1 > 0, \ \det A_2 > 0, \ \dots, \ \det A_n > 0.$$

$$q(x) = \sum_{1}^{n} x_i^2 \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \qquad \det A_i = 1 > 0.$$

(2) Kvadr. forma q je negativně defin.
$\Leftrightarrow$ pro hlavní minory platí

$$\det A_1 < 0, \ \det A_2 > 0, \ \det A_3 < 0, \dots$$

$$(-1)^i \det A_i > 0.$$

$$q(x) = -x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & -1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det A_1 = -1 < 0$$

$$\det A_2 = \det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 1 > 0$$

$$\det A_3 = \det \begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & -1 & \\ 0 & & -1 \end{pmatrix} = -1 < 0$$

Příklad: $q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$q(x) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 4x_1x_3 + 7x_3^2$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} \det A_1 &= 3 > 0 \\ \det A_2 &= 2 > 0 \\ \det A_3 &= 3 \cdot 7 - 4 - 7 = 10 > 0 \end{aligned}$$

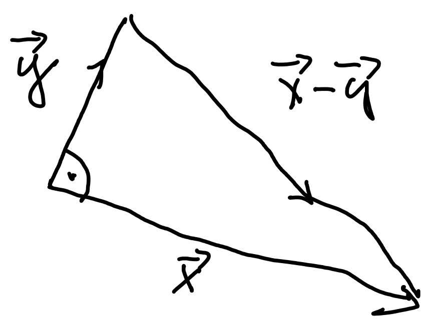
q je pozitivně definitní.

VEKTOROVÉ PROSTORY SE SKALÁRNÍM SOUČINEM

Dvojího typu nad $\mathbb{R}$, nad $\mathbb{C}$.

$$\langle -,- \rangle : U \times U \longrightarrow \mathbb{R} \ (\mathbb{C})$$

Motivace



$$\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|\vec{x}-\vec{y}\|^2$$

$$x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2$$

$$= (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2$$

$$\underline{x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2} = \underline{x_1^2} - 2x_1y_1 + \underline{y_1^2} + \underline{x_2^2} - 2x_2y_2 + \underline{y_2^2}$$

$$2(x_1y_1 + x_2y_2) = 0$$

$$x_1y_1 + x_2y_2 = 0$$

$$\langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 \qquad \langle x, y \rangle = 0 \iff x \perp y$$

Skal. součin na vekt. nad $\mathbb{R}$

je symetrická bilineární forma
$$\langle\, , \rangle : U \times U \longrightarrow \mathbb{R}$$
taková, že přidružená kvadr. forma je pozitivně definitní, tj.

$$\forall u \in U \setminus \{\vec{0}\} \quad \langle u, u \rangle > 0.$$

Příklady:

① Stand. skal. součin na $\mathbb{R}^n$

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n \, .$$

② na $\mathbb{R}^n$ existuje spousta skal. součinů jiných, např. na $\mathbb{R}^3$

$$\langle x, y \rangle = 3x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_2 y_2 + 2x_1 y_3 + 2x_3 y_1 + 7 x_3 y_3$$

Poz. def. – viz příklad na Sylv. kritérium

③ $U = C[a,b]$

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) \, dx$$

$$\langle f, f \rangle = \int_a^b f(x)^2 \, dx > 0 \text{ pro } f \not\equiv 0$$

Norma (velikost) vektoru $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$

kolmost vektorů $u \perp v$, jestliže $\langle u, v\rangle = 0$.

Skalární součin na kompl. vekt. prostorech

$z = a + ib \qquad a, b \in \mathbb{R}$

$\overline{z} = a - ib$

$$z \cdot \overline{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2 = |z|^2 \geq 0$$

Nechť U je vekt. prostor nad $\mathbb{C}$. Zobrazení

$$\langle \, , \, \rangle : U \times U \longrightarrow \mathbb{C}$$

se nazývá skalární součin, jestliže

① $\forall a, b \in \mathbb{C}, \ \forall u, v, w \in U$

$$\langle au + bv, w\rangle = a\langle u, w\rangle + b\langle v, w\rangle$$

② $$\langle u, av + bw\rangle = \overline{a}\langle u, v\rangle + \overline{b}\langle u, w\rangle$$

③ $$\langle v, u\rangle = \overline{\langle u, v\rangle}$$

④ (z 3 plyne, že $\langle u, u\rangle = \overline{\langle u, u\rangle}$
$\Rightarrow \langle u, u\rangle \in \mathbb{R}$)

$\forall u \in U \setminus \{0\} \quad \langle u, u\rangle > 0$.

Příklady

① $U = \mathbb{C}^n$ stand. skal. součin

$$\langle x, y\rangle = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + \dots + x_n\overline{y_n}$$

$$\langle x, ay\rangle = x_1\overline{(ay_1)} + x_2\overline{(ay_2)} + \dots + x_n\overline{(ay_n)}$$
$$= x_1\bar{a}\bar{y}_1 + x_2\bar{a}\bar{y}_2 + \dots$$
$$= \bar{a}\, x_1\bar{y}_1 + \bar{a}\, x_2\bar{y}_2 + \dots$$
$$= \bar{a}\,(x_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2 + \dots)$$
$$= \bar{a}\,\langle x, y\rangle$$

$$\langle y, x\rangle = \sum y_i\bar{x}_i = \sum \bar{x}_i\bar{\bar{y}}_i =$$
$$= \overline{\left(\sum x_i\bar{y}_i\right)} = \overline{\langle x, y\rangle}$$

$$\langle x, x\rangle = x_1\bar{x}_1 + \dots + x_n\bar{x}_n =$$
$$= |x_1|^2 + \dots + |x_n|^2 \geq 0$$

Platí (4)

(2) $U = (C[a,b], \mathbb{C})$ spojité funkce

na $[a,b]$ s hodnotami v $\mathbb{C}$

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)\,\bar{g}(x)\,dx$$

$$\langle f, f\rangle = \int_a^b f(x)\bar{f}(x)\,dx = \int_a^b |f(x)|^2\,dx$$

$f(x) = f_1(x) + i f_2(x)$ $\quad \bar{f}(x) = f_1(x) - i f_2(x)$

Cauchyova nerovnost

U vekt. prostor nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$ se skal. součinem. Pak pro všechna $u, v \in U$ platí

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\| .$$

Rovnost nastane právě když jsou u a v lineárně závislé.

Příklady

(1) $U = \mathbb{R}^n \quad \langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i\right| \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2}$$

Rovnost $c x_i = d y_i$ pro nějaká $(c, d) \neq (0, 0)$.

(2) $U = C[a, b] \quad \langle f, g\rangle = \int_a^b f(x) g(x) dx$

$$\left|\int_a^b f(x) g(x)\, dx\right| \leq \sqrt{\int_a^b f(x)^2 dx} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2(x) dx}$$

Rovnost $\exists c, d \quad c f(x) = d g(x) \quad (c, d) \neq (0, 0)$.

Důkaz pro reálné vekt. prostory

(1) $v = \vec{0}$, pak platí rovnost

(2) $v \neq \vec{0}$ pro všechna $t \in \mathbb{R}$ uvažujeme vektor $u - tv$

$$0 \leq \|u - tv\|^2 = \langle u - tv, u - tv \rangle =$$

$$= \underbrace{\langle u, u \rangle}_{\|u\|^2} - t\langle v, u \rangle - t\langle u, v \rangle + t^2 \overbrace{\langle v, v \rangle}^{= \|v\|^2}$$

$$= t^2 \|v\|^2 - 2t\langle u, v \rangle + \|u\|^2 = f(t)$$

je kvadr. funkce v proměnné t.

$f(t) \geq 0$ pro všechna t $\Rightarrow$ diskriminant je nekladný

$$D \leq 0$$

$$D = 4\langle u, v \rangle^2 - 4\|v\|^2 \|u\|^2 \leq 0$$

$$\langle u, v \rangle^2 \leq \|v\|^2 \|u\|^2 \qquad \sqrt{\ }$$

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

nerovnost je dokázána.

Kdy nastane rovnost?

$\exists t \quad f(t) = 0 \qquad D = 0$

$f(t) = \|u - tv\|^2 \qquad f(t) = 0 \Rightarrow \|u - tv\| = 0$

$\Rightarrow u - tv = 0$

$\Rightarrow u, v$ jsou lineárně závislé $u = tv$.

Důkaz „setrvačnosti" v Sylv. zákonu setrvačnosti

$q: U \to \mathbb{R}$ kvadr. forma

$q(u) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots$ v bázi $\alpha = (u_1, \dots u_n)$

$q(u) = y_1^2 + \dots + y_s^2 - y_{s+1}^2 - \dots$ v bázi $\beta = (v_1, \dots v_n)$

Sporem dokážeme, že $p = s$.

Předp. že $\underline{p > s}$.

Uvažujme podprostory v U

$W = [u_1, u_2, \dots, u_p]$ $\forall w \in W \setminus \{0\}$ $q(w) > 0$

$(w)_\alpha = (x_1, \dots x_p, 0, 0 \dots 0)^T$

$V = [v_{s+1}, v_{s+2}, \dots, v_n]$ $\forall v \in V$ $q(v) \leq 0$

$(v)_\beta = (\underbrace{0, \dots 0}_{s}\ y_{s+1}, \dots y_n)$

Spočítáme $\dim (W \cap V)$:

$\dim (W \cap V) = \dim W + \dim V - \underbrace{\dim (W + V)}_{\leq n}$

$\geq p + n - s - n = p - s > 0$

$\dim W \cap V > 0 \Rightarrow \exists u \in W \cap V \setminus \{0\}$

Podle definice W a V je současně

$q(u) > 0$ a $q(u) \leq 0 \Rightarrow$ spor.

Signatura matice $n \times n$

$$s_+ + s_- + s_0 = n$$

$$\boxed{s_+ + s_- = h(A)}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & -1 & \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} = \underline{P}^T A \underline{P}$$

$$h(D) = s_+ + s_-$$

$$s_+ + s_- = h(D) = h(P^T A P) = h(A)$$

Odpověď na dotaz po přednášce

Normy na $\mathbb{R}^2$

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$$
$$\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$$
$$\|x\| > 0 \text{ pro } x \neq \vec{0}$$

$$\|(x_1, x_2)\|_1 = |x_1| + |x_2|$$

$$\|(x_1, x_2)\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

$$\|(x_1, x_2)\|_{max} = \max(|x_1|, |x_2|)$$

Vekt. prostory se skal. součinem $\quad \|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$

$\cap |$ $\quad d(x,y) = \sqrt{\langle x-y, x-y \rangle}$

Vekt. prostory s normou $\quad d(x,y) = \|x-y\|$

$\cap |$

Metrické prostory $\quad (M, d)$