4. přednáška: Skalární součin a eukleidovská geometrie

Opakování $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ U vekt. prostor nad $\mathbb{K}$

$a \in \mathbb{R}$ $\overline{a} = a$

$a+ib \in \mathbb{C}$ $\overline{a+ib} = a-ib$

$$\langle\ ,\ \rangle : U \times U \longrightarrow \mathbb{K} \qquad a, b \in \mathbb{K}$$

(1) $\langle au + bv, w\rangle = a\langle u, w\rangle + b\langle v, w\rangle$

(2) $\langle u, av + bw\rangle = \overline{a}\langle u, v\rangle + \overline{b}\langle u, w\rangle$

(3) $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$

(4) $\forall u \in U \setminus \{\vec{o}\}$ $\langle u, u\rangle > 0$.

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle} \qquad \|u\| = 0 \Leftrightarrow u = \vec{o}$$

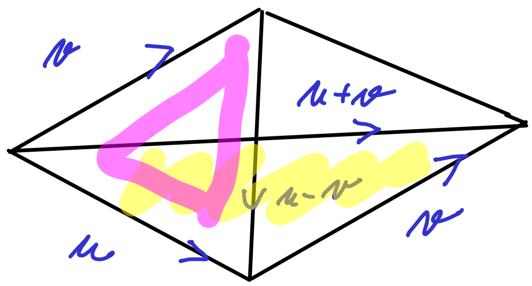
Cauchyova nerovnost

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\,\|v\|$$

rovnost nastane pro u, v lin. závislé.

Trojúhelníková nerovnost nad $\mathbb{R}$

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$
$$\|u - v\| \leq \|u\| + \|v\|$$



$$\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle = \langle u,u\rangle + \langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle$$
$$= \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u,v\rangle$$
$$\leq \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2$$
$$= (\|u\| + \|v\|)^2$$

Metrické prostory

U vekt. prostor se skal. součinem

Metrika $\rho : U \times U \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\rho(u,v) = \|u-v\|$$

$$\rho(u,z) \leq \rho(u,v) + \rho(v,z)$$

$$\|u-z\| \leq \|u-v\| + \|v-z\|$$

$$\|u-z\| = \|(u-v)+(v-z)\|$$

Pro ρ platí Δ nerovnost

$$\rho(u,v) = 0 \iff u = v.$$

Odchylka dvou vektorů u, v

$u \neq \vec{0}$, $v \neq \vec{0}$

$$-1 \leq \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|} \leq 1$$

$$\Uparrow$$

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

Odchylka vektorů u a v je úhel $\alpha \in [0, \pi]$

$$\cos \alpha = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|}$$

$$u \perp v \qquad \langle u, v \rangle = 0$$

$$\cos \frac{\pi}{2} = 0 = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|}$$

Ortogonální vektory $u_1, u_2, \ldots, u_k$

$$\langle u_i, u_j \rangle = 0 \qquad i \neq j$$

Lemma: Ortogonální nenulové vektory $u_1, u_2, \ldots, u_k$ jsou lin. nezávislé.

Důkaz: $\sum_{i=1}^{k} a_i u_i = \vec{0} \overset{?}{\Longrightarrow} a_1 = \ldots = a_k = 0$

Nechť $\sum_{i=1}^{k} a_i u_i = \vec{o}$ $\quad / \langle \;, u_j \rangle$

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \underbrace{\langle u_i, u_j \rangle}_{=0 \quad i \neq j} = \langle \vec{o}, u_j \rangle$$

$$a_j \underset{\substack{\neq \\ 0}}{\langle u_j, u_j \rangle} = 0$$

$$a_j = 0.$$

Tím jsme dokázali LN.

Grammův - Schmidtův ortogonalizační proces

je algoritmus, který z lin. nezávislých vektorů $u_1, u_2, \dots, u_k$ vytvoří ortogonální vektory $v_1, v_2, \dots, v_k$ s vlastnostmi, že

$$[u_1, u_2, \dots u_i] = [v_1, v_2, \dots, v_i]$$

pro $1 \leq i \leq k$. Vektory $v_1, v_2, \dots, v_k$ hledáme takto:

$$v_1 = u_1$$

$$v_{e+1} = u_{e+1} - a_1 v_1 - a_2 v_2 - \dots - a_e v_e$$

volíme tak, aby $v_{e+1} \perp v_i$ pro $i = 1, 2, \dots, e$.

Rovnici

$$v_{l+1} = u_{l+1} - a_1 v_1 - a_2 v_2 - \dots - a_l v_l$$

vynásobíme skalárně v_i pro $1 \le i \le l$.

$$0 = \langle v_{l+1}, v_i \rangle = \langle u_{l+1}, v_i \rangle - \sum_{j=1}^{l} a_j \cdot \underbrace{\langle v_j, v_i \rangle}_{0 \; i \neq j}.$$

$$0 = \langle u_{l+1}, v_i \rangle - a_i \langle v_i, v_i \rangle$$

$$a_i = \frac{\langle u_{l+1}, v_i \rangle}{\|v_i\|^2}$$

Příklad $\mathbb{R}^3$ $u_1 = (1,0,0)$ $u_2 = (1,2,0)$ $u_3 = (1,1,2)$

$\mathbb{R}^3$ bereme se stand. skal. součinem

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

$$v_1 = u_1 = (1,0,0)$$

$$v_2 = u_2 - a v_1 \qquad a = \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} = 1$$

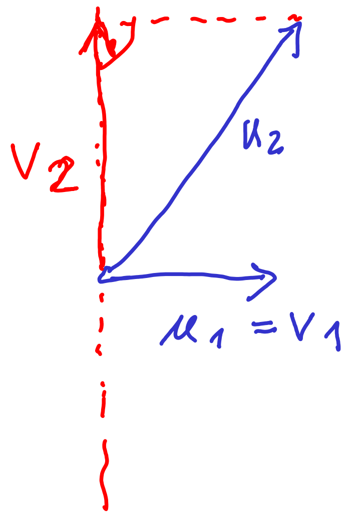
$$v_2 = (0,2,0)$$

$$v_3 = u_3 - b_1 v_1 - b_2 v_2$$

$$b_1 = \frac{\langle u_3, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} = 1 \qquad b_2 = \frac{\langle u_3, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$v_3 = (1,1,2) - 1\cdot(1,0,0) - \frac{1}{2}(0,2,0)$$
$$= (0,0,2)$$

Geometricky:



Ortonormální vektory $u_1, u_2, \dots u_k$

$$\langle u_i, u_j \rangle = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$\|u_i\|^2 = \langle u_i, u_i \rangle = 1 \quad \Rightarrow \quad \|u_i\| = 1.$$

Ortonormální báze je báze tvořená ortonormálními vektory.

VĚTA: V každém prostoru konečné dimenze se skalárním součinem existuje ortonormální báze.

Důkaz: $u_1, u_2, \dots u_n$ nějaká báze

Provedeme GSOP, dostaneme $v_1, v_2, \dots v_n$ ortogonální

$$[v_1, \dots v_n] = [u_1, \dots u_n] = U$$

$v_1, \dots v_n$ tvoří bázi.

Normalizace

$$w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}, \dots, w_n = \frac{v_n}{\|v_n\|}$$

$$\|au\| = \sqrt{\langle au, au\rangle} = \sqrt{a\bar{a}\langle u, u\rangle} =$$
$$= \sqrt{|a|^2 \|u\|^2} = |a|\,\|u\|$$

$$\left\| \frac{v_1}{\|v_1\|} \right\| = \frac{1}{\|v_1\|}\|v_1\| = 1$$

$w_1, w_2, \dots w_n$ je ortonormální báze

ORTOGONÁLNÍ DOPLNĚK

$M \subseteq U$

$$M^\perp = \{u \in U : \forall v \in M \ \langle u, v\rangle = 0\}$$

$M^\perp$ je vždy vekt. podprostor

$u_1, u_2 \in M^\perp \quad \forall v \in M$

$$\langle au_1 + bu_2, v\rangle = a\underbrace{\langle u_1, v\rangle}_{0} + b\underbrace{\langle u_2, v\rangle}_{0} = 0$$

$$au_1 + bu_2 \in M^\perp$$

VĚTA: Nechť $V \subseteq U$ je sekerný podprostor. Pak

$$V \oplus V^\perp = U$$

Důkaz • Součet je direktní

$$u \in V \cap V^\perp \quad \langle \underset{V^\perp}{\underset{\Uparrow}{u}}, \underset{V}{\underset{\Uparrow}{u}}\rangle = 0 \Rightarrow u = \vec{0}$$

$$V \cap V^\perp = \{\vec{0}\}$$

• Součet je U.

Nechť $v_1 \dots v_k$ je ortonormální báze v V. Doplníme ji na ortonormální bázi celého prostoru U.

$$v_1 \dots v_k \; u_{k+1} \dots u_n \quad \text{báze } U$$

a z ní vytvoříme ortonormální bázi.

$$\underline{v_1 \dots v_k} \; \underline{v_{k+1}, \dots v_n} \quad \text{orton. báze } U$$

$v_{k+1}, \dots v_n \in V^{\perp}$

Každý vektor z U lze psát

$$u = \underbrace{a_1 v_1 + \dots + a_k v_k}_{\in V} + \underbrace{a_{k+1} v_{k+1} + \dots + a_n v_n}_{\in V^{\perp}}$$

$$V + V^{\perp} = U.$$

Kolmá projekce na podprostor V v U je zobrazení

$$P : U \longrightarrow V$$

takové, že

$$(*) \quad Pu \in V, \quad u - Pu \in V^{\perp}$$

$$u = \underbrace{Pu}_{\in V} + \underbrace{u - Pu}_{\in V^{\perp}}$$

Trochu jiná definice

Jestliže $U = V \oplus V^{\perp}$, pak každý vektor $u \in U$ lze psát jednoznačně ve tvaru

$$u = v + w, \quad v \in V, \ w \in V^{\perp}$$

Potom definujeme

$$Pu = v.$$

Dk. jednoznačnosti:

$$u = v_1 + w_1$$
$$u = v_2 + w_2$$

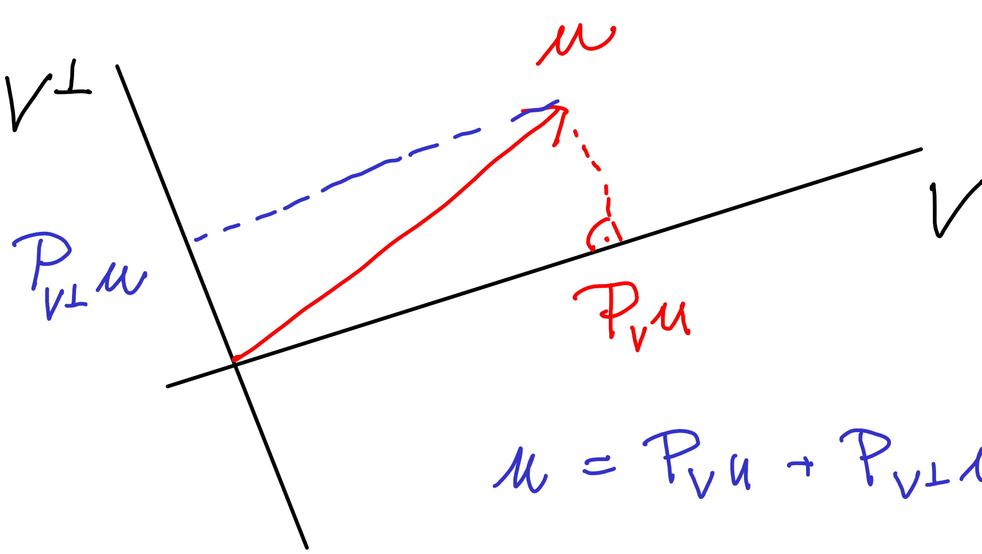
$$v_1 + w_1 = v_2 + w_2$$

$$V \ni v_1 - v_2 = w_2 - w_1 \in V^\perp$$

$$v_1 - v_2 = w_2 - w_1 \in V \cap V^\perp = \{\vec{o}\}$$

$$v_1 - v_2 = w_2 - w_1 = \vec{o}$$

$$v_1 = v_2, \quad w_1 = w_2.$$



$$u = P_V u + P_{V^\perp} u$$

Výpočet kolmé projekce

$V = [v_1, v_2, v_3] \subseteq U$ $\quad P$ kolmá projekce do V

$u \in U$

$$Pu = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3$$

$$u - Pu = u - \underline{a_1} v_1 - \underline{a_2} v_2 - \underline{a_3} v_3 \perp V$$

$$\perp v_1, v_2, v_3$$

3 rovnice o neznámých a_1, a_2, a_3

$$\langle u - a_1 v_1 - a_2 v_2 - a_3 v_3 , v_1 \rangle = 0$$

$$\langle \quad , v_2 \rangle = 0$$

$$\langle \quad , v_3 \rangle = 0$$

$$\langle u, v_1 \rangle - a_1 \langle v_1, v_1 \rangle - a_2 \langle v_2, v_1 \rangle - a_3 \langle v_3, v_1 \rangle = 0$$

Matice soustavy je

Grammova matice

$$\begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 & \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \langle v_1, v_1 \rangle & \langle v_2, v_1 \rangle & \langle v_3, v_1 \rangle & \langle u, v_1 \rangle \\ \langle v_1, v_2 \rangle & \langle v_2, v_2 \rangle & \langle v_3, v_2 \rangle & \langle u, v_2 \rangle \\ \langle v_1, v_3 \rangle & \langle v_2, v_3 \rangle & \langle v_3, v_3 \rangle & \langle u, v_3 \rangle \end{array}\right)$$

v_1, v_2, v_3 lin. nezávislé $\Rightarrow$ soustava má jediné řešení

v_1, v_2, v_3 jsou ortonormální

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \langle u, v_1 \rangle \\ 0 & 1 & 0 & \langle u, v_2 \rangle \\ 0 & 0 & 1 & \langle u, v_3 \rangle \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} a_1 = \langle u, v_1 \rangle \\ a_2 = \langle u, v_2 \rangle \\ a_3 = \langle u, v_3 \rangle \end{array}$$

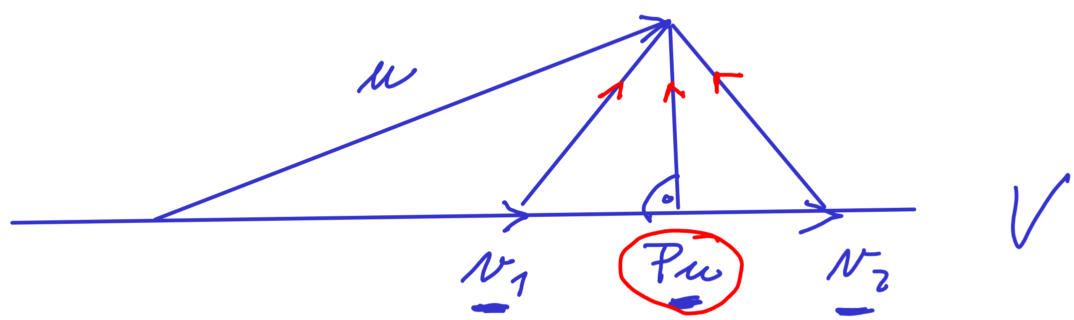
Vzdálenost dvou vektorů u, v $\quad \|u-v\| = \|v-u\|$

Věta: Charakteristika kolmé projekce

Nechť V je podprostor v U, nechť $u \in U$ a Pu jeho kolmá projekce do V.

Pu je jediný vektor z V, který minimalizuje vzdálenost $\|u-v\|$ pro všechny vektory $v \in V$.

$$\|u - Pu\| = \min_{v \in V} \|u - v\|$$



Důkaz:

$$\|u-v\|^2 = \langle u-v, u-v\rangle = \langle \underbrace{u-Pu}_{\in V^\perp} + \underbrace{Pu-v}_{\in V}, \underbrace{u-Pu}_{\in V^\perp} + \underbrace{Pu-v}_{\in V}\rangle$$

$$= \langle u-Pu, u-Pu\rangle + \underbrace{\langle \underbrace{u-Pu}_{V^\perp}, \underbrace{Pu-v}_{\in V}\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle Pu-v, u-Pu\rangle}_{=0}$$

$$+ \langle Pu-v, Pu-v\rangle = \|u-Pu\|^2 + \|Pu-v\|^2$$

nejmenší pro $v = Pu$ $\qquad$ zde bude 0

Poznámka $\quad u \perp v \Rightarrow \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$

$$\langle u+v, u+v\rangle = \langle u,u\rangle + \underbrace{\langle u,v\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle v,u\rangle}_{=0} + \langle v,v\rangle$$

$$= \|u\|^2 + \|v\|^2$$

Eukleidovská geometrie

zabývá se vzdálenostmi
a odchylkami.

U vekt. prostor, afinní podprostor
sama sebe.

Body $A, B \in U \qquad A - B = \overrightarrow{BA}$ vektor

$$\operatorname{dist}(A,B) = \|A-B\|$$

$\mathcal{N}$ bude afinní podprostor v U

Vzdálenost bodu A od $\mathcal{N}$

$$\operatorname{dist}(A,\mathcal{N}) = \inf_{N\in\mathcal{N}} \operatorname{dist}(A,N)$$

$$= \inf_{N\in\mathcal{N}} \|A-N\|$$

Vzdálenost dvou afinních podprostorů $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$ je

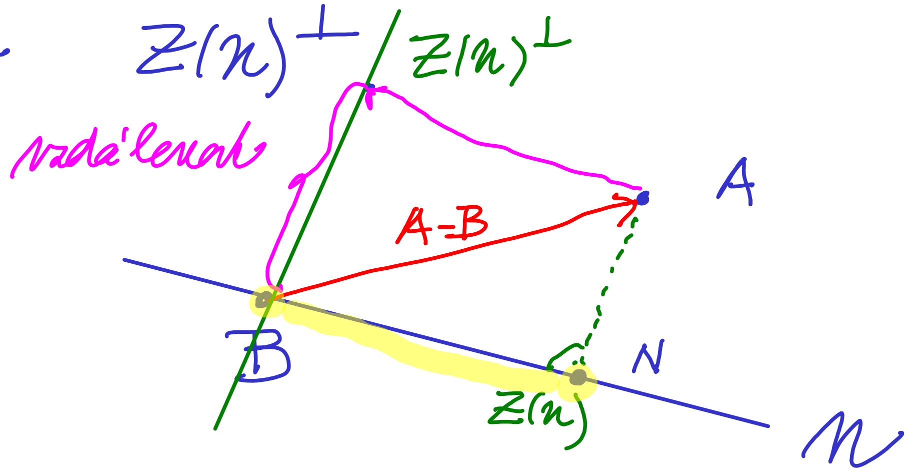
$$\operatorname{dist}(\mathcal{M},\mathcal{N}) = \inf_{\substack{M\in\mathcal{M},\\ N\in\mathcal{N}}} \operatorname{dist}(M,N)$$

$$= \inf_{\substack{M\in\mathcal{M}\\ N\in\mathcal{N}}} \|M-N\|$$

Definice platí pro všechny podmnožiny, ale v případě afinních podprostorů lze výpočty dělat pomocí kolmých projekcí.

Věta: Vzdálenost bodu od afinního podprostoru

(a) Vzdálenost bodu A od afinního podprostoru $\mathcal{N} = B + Z(\mathcal{N})$ je rovna velikosti kolmé projekce vektoru $A-B$ do $Z(\mathcal{N})^{\perp}$



(b) Pro $N \in \mathcal{N}$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

(1) $\operatorname{dist}(A, \mathcal{N}) = \|A - N\|$ říkáme, že vzdálenost se realizuje v bodě N

(2) $A - N \perp Z(\mathcal{N})$

(3) $N = B + P_{Z(\mathcal{N})}(A - B)$ kolmá projekce do zaměření $Z(\mathcal{N})$

Důkaz 1. části

Nechť $X = B + u$ je libovolný bod z $\mathcal{N}$, $u \in Z(\mathcal{N})$. Pak podle charakterizace kolmé projekce je

$$\|A - X\| = \|\underbrace{A - B}_{\text{vektor z } U} - \overset{\text{vektor ze } Z(\mathcal{N})}{u}\| \geq \underbrace{\|A - B - P_{Z(\mathcal{N})}(A - B)\|}_{= \|P_{Z(\mathcal{N})^\perp}(A - B)\|}$$

$$\Rightarrow \operatorname{dist}(A, \mathcal{N}) = \|P_{Z(\mathcal{N})^\perp}(A - B)\|$$

2. část (1) $\Rightarrow$ (3)

$N = B + u$, $u \in Z(\mathcal{N})$

Nechť platí (1) $\|A - N\| = \operatorname{dist}(A, \mathcal{N})$

podle předchozího musí být

$$\|A - B - u\| = \operatorname{dist}(A, \mathcal{N})$$

$$u = P_{Z(n)}(A-B)$$

$$N = B + P_{Z(n)}(A-B) \, , \text{ to je } (3)$$

(3) $\Rightarrow$ (2)

$$A - N = A - B - P_{Z(n)}(A-B) = P_{Z(n)^\perp}(A-B)$$

$$\perp \; Z(n)$$

(2) $\Rightarrow$ (1) $\quad A - N \perp Z(n)$

$\forall u \in Z(n)$

$$\|\overbrace{A - N}^{\in Z(n)^\perp} - \underbrace{N - u}_{\in n}\|^2 = \|A-N\|^2 + \|u\|^2$$

$$\mathrm{dist}(A, n) = \|A-N\|^2 \, , \text{ což je } (1).$$

<u>Příklad</u> $\mathbb{R}^4$ stand. skal. součin

spočtěte vzdálenost bodu $A = (x_1, x_2, x_3, x_4)$

od nadroviny n

$$ay_1 + by_2 + cy_3 + dy_4 + e = 0$$

$(a, b, c, d) \neq (0,0,0,0)$. Předp. $d \neq 0$.

$$\mathrm{dist}(A, n) = \|P_{Z(n)^\perp}(A-B)\|$$

$B \in n$, $\quad B = \left[0, 0, 0, -\frac{e}{d}\right].$

$Z(n)$ $\qquad ay_1 + by_2 + cy_3 + dy_4 = 0$

vektor $u = (a, b, c, d) \perp Z(n)$

$\langle u, (y_1, \dots y_4) \rangle = ay_1 + by_2 + cy_3 + dy_4 = 0$

$Z(n)^\perp = [u]$

Kolmá projekce $A - B = (x_1, x_2, x_3, x_4 + \frac{e}{d})$

$P_{Z(n)^\perp}(A-B) = \alpha \cdot u = \alpha(a, b, c, d)$

$(A-B) - P_{Z(n)^\perp}(A-B) \perp Z(n)^\perp$

$\perp u$

$A - B - \alpha u \perp u$

$\langle \alpha u, u \rangle = \langle A-B, u \rangle$

$$\alpha = \frac{\langle A-B, u \rangle}{\|u\|^2} = \frac{ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 + e}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

$$\mathrm{dist}(A, n) = \|\alpha u\| = |\alpha| \cdot \|u\| =$$

$$= \frac{|ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 + e|}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

$$= \frac{|ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 + e|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}}$$