6. přednáška VLASTNÍ ČÍSLA A VLASTNÍ VEKTORY

Minule $\varphi : U \to U$ lin. operátor
invariantní podprostor $V \subseteq U$

$$\varphi(V) \subseteq V.$$

Dnes inv. podprostory $V = [v]$, $v \neq \vec{o}$

$$\varphi([v]) \subseteq [v]$$

$$\varphi(v) = \lambda v$$

Definice: Vektor $v \in U \setminus \{\vec{o}\}$ se nazývá **vlastní vektor operátoru φ**, jestliže existuje číslo $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\varphi(v) = \lambda v.$$

Číslo λ se nazývá **vlastní číslo**.

Výpočet vl. čísel a vl. vektorů

Charakteristický polynom operátoru $\varphi : U \to U$.
α báze v U, matice φ v bázi α je

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha}.$$

Char. polynom operátoru φ je

$$\det\left((\varphi)_{\alpha\alpha} - \lambda E\right)$$

- Char. polynom je SKUTEČNĚ polynom.

$$\det\left(\varphi_{\alpha,\alpha} - \lambda E\right) = \det\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn}\end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots\ 1\end{pmatrix}\right)$$

$$= \det \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (-\lambda)^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + b_0$$

- Char. polynom operátoru φ nezávisí na volbě báze α.

α, β dvě báze v U, $\varphi : U \to U$

$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = A$, $(\varphi)_{\beta,\beta} = B$

$$(\varphi)_{\beta,\beta} = (id)_{\beta,\alpha} \cdot (\varphi)_{\alpha,\alpha} \cdot (id)_{\alpha,\beta}$$

$$= (id)^{-1}_{\alpha,\beta} \cdot (\varphi)_{\alpha,\alpha} \, (id)_{\alpha,\beta}$$

$$B = P^{-1} A P$$

Říkáme, že matice A a B jsou podobné. Podobnost matic je relace ekvivalence.

$A \sim B \qquad B = P^{-1} A P$ pro nějaké P

1) reflexivní $\quad A \sim A \qquad P = E$

2) symetrická $\quad A \sim B \Rightarrow B \sim A$

$$B = P^{-1} A P \Rightarrow P B P^{-1} = A$$

3) tranzitivní $\quad A \sim B \wedge B \sim C \Rightarrow A \sim C$

nechávám na DÚ

Pro matice φ v bazích α a β platí

$$B = P^{-1} A P$$

Ukážeme, že

$$\det(B - \lambda E) = \det(A - \lambda E)$$

$$\det(B - \lambda E) = \det(P^{-1} A P - \lambda E)$$

$$= \det(P^{-1} A P - \lambda P^{-1} E P)$$

$$= \det(P^{-1} (A - \lambda E) P)$$

$$= \underbrace{\det P^{-1} \cdot \det(A - \lambda E) \cdot \det P}_{1}$$

$$= \det(A - \lambda E)$$

Char. polynom operátoru φ je

$$\det((\varphi)_{\beta,\beta} - \lambda E) = \det((\varphi)_{\alpha\alpha} - \lambda E)$$

Lemma: λ_0 je vlastní číslo operátoru φ, právě když je kořenem jeho charakt. polynomu.

Důkaz: Následující tvrzení jsou ekvivalentní

- $\exists u \in U \setminus \{\vec{o}\}$ $\quad \varphi(u) = \lambda u$
- v nějaké bázi je $\quad (\varphi)_{\alpha,\alpha} \cdot (u)_\alpha = \lambda (u)_\alpha$
- $\exists u \in U \setminus \{o\} : ((\varphi)_{\alpha,\alpha} - \lambda E)\, (u)_\alpha = 0$
- $\exists x \in \mathbb{K}^n \setminus \{o\}$: $\quad ((\varphi)_{\alpha,\alpha} - \lambda E)\, x = 0$
- Homogenní soustava
$$((\varphi)_{\alpha,\alpha} - \lambda E)\, x = 0$$
má netriviální řešení $\left(x \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$
- $\det((\varphi)_{\alpha,\alpha} - \lambda E) = 0$
- Char. polynom operátoru φ má kořen λ_0.

Příklad: $\quad \varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \varphi(x) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$\varepsilon = (e_1, e_2)$ stand. báze $\mathbb{R}^2$

$$(\varphi)_{\varepsilon,\varepsilon} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Char. polynom

$$\det\left(\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} - \lambda E\right) =$$

$$= \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 4 & -2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda+2)(\lambda-3) + 4 = \lambda^2 - \lambda - 2$$

$$= (\lambda-2)(\lambda+1)$$

Kořeny char. polynomu = vl. čísla φ jsou

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -1.$$

Vl. vektor k $\lambda_1 = 2$ $\qquad (\varphi - 2\,id)v = 0$

$$\left(\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} x_1 = t \\ x_2 = t \end{matrix}$$

vlastní vektory k vl. číslu 2 jsou $t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $t \neq 0$.

Vlastní vektory k vl. číslu $\lambda_2 = \underline{-1}$

$$(\varphi - (-1)\,\mathrm{id})\,v = 0$$

$$\left(\begin{pmatrix}3 & -1\\4 & -2\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}4 & -1\\4 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$x_1 = t$, $x_2 = 4t$

Vl. vektory k -1 jsou $t\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$, $t \neq 0$.

Základní informace o kořenech polynomů

$p(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$

$a_n \neq 0$

polynom stupně n

$p(\lambda) \equiv 0$ hovoříme o stupni $\underline{-\infty}$

Pro stupně polynomů platí

$$\mathrm{st}(p \cdot q) = \mathrm{st}\,p + \mathrm{st}\,q$$

<u>Kořen polynomu</u> je číslo λ_0 takové, že $p(\lambda_0) = 0$.

Věta 1 λ_0 je kořenem polynomu p stupně ≥ 1, právě když
$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)\, q(\lambda),$$
kde q je polynom stupně st $p - 1$.

Věta 2 Nechť $p(\lambda) = \pm \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$, kde $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{Z}$. Jestliže má p kořen λ_0, který je racionální číslo, pak tento kořen je celé číslo a dělí abs. člen a_0. $\quad \lambda_0 \mid a_0$

$$0 = p(\lambda_0) = \pm \underline{\lambda_0^n} + \underline{a_{n-1}\lambda_0^{n-1}} + \dots + \underline{a_1\lambda_0} + a_0$$

Char. polynom je vždy tvaru
$(-1)^n \lambda^n + \dots$

a velmi často jsou koeficienty celočíselné. Kořeny hledáme mezi děliteli a_0.

Příklad: $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad \varphi(x) = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

Char. polynom
$$\det \begin{pmatrix} 5-\lambda & 2 & -3 \\ 4 & 5-\lambda & -4 \\ 6 & 4 & -4-\lambda \end{pmatrix} = \dots = \overset{(-1)^3}{-}\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6$$

Abs. člen 6 má dělitele $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

$p(1) = -1+6-11+6=0$ 1 je kořen

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = (\lambda-1)(\lambda^2 - 5\lambda + 6)$$

kořeny kvadr. trojčlenu

Vl. čísla

$$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_{2,3} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix}$$

Vl. vektory k vl. číslu $\lambda_1 = 1$ $\quad \varphi(x) = Ax$

$$(A - 1\cdot E)\,x = 0$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 4 & 4 & -4 \\ 6 & 4 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x_2 = p, \; x_3 = 2p, \; x_1 = p$ $\qquad p\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Vl. vektory k 2 nám podobně vyjde $\quad t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Vl. vektory k 3 $\quad s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Vezmeme v $\mathbb{R}^3$ bázi tvořenou vl. vektory

$$\alpha = \left(v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$$

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(v_1) = 1 \cdot v_1 = \underline{1} \cdot v_1 + \underline{0} \cdot v_2 + \underline{0} \cdot v_3$$
$$\varphi(v_2) = 2 \cdot v_2 = 0 \cdot v_1 + 2 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3$$
$$\varphi(v_3) = 3 \cdot v_3 = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 3 \cdot v_3$$

Věta: Nechť $\varphi: U \to U$ je lin. operátor. Nechť vlastní vektory tvoří bázi prostoru U, nazveme ji α. Pak

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

kde $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ jsou příslušná vl. čísla.

<u>Dk</u>: $\alpha = (v_1, v_2, \dots v_n)$ $\qquad \varphi(v_i) = \lambda_i v_i$

$$= 0 \cdot v_1 + \dots \lambda_i v_i + \dots 0 \cdot v_n$$

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} & 0 & \\ & 0 & \\ \cdots & \lambda_i & \cdots \\ & 0 & \\ & 0 & \end{pmatrix}$$

$\nearrow$ i-tý sloupec

Věta: Jsou-li $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ různá vlastní čísla operátoru $\varphi: U \to U$, pak příslušné vlastní vektory jsou lin. nezávislé.

Důkaz: mat. indukcí podle k

$k = 1$ vl. vektor $v_1 \neq \vec{0}$, v_1 je lin. nezávislý

Ind. předp. věta platí pro $k \geq 1$, dokážeme ji pro $k+1$.

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \lambda_{k+1}$ různá vl. čísla

$v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+1}$ příslušné vl. vektory

Ind. předp. $v_1, \dots, v_k$ jsou lin. nezávislé.

$$(0) \quad a_1 v_1 + \dots + a_k v_k + a_{k+1} v_{k+1} = \vec{0} \quad / \cdot \lambda_{k+1}$$

$$(1) \quad \lambda_{k+1} a_1 v_1 + \dots + \lambda_{k+1} a_k v_k + \underline{\lambda_{k+1} a_{k+1} v_{k+1}} = \vec{0}$$

Na rovnici (0) aplikujeme φ

$$a_1 \varphi(v_1) + \dots + a_k \varphi(v_k) + a_{k+1} \varphi(v_{k+1}) = \vec{0}$$

$$(2) \quad a_1 \lambda_1 v_1 + \dots + a_k \lambda_k v_k + \underline{a_{k+1} \lambda_{k+1} v_{k+1}} = \vec{0}$$

Odečteme (2) − (1)

$$(\lambda_1 - \lambda_{k+1}) a_1 v_1 + \dots + (\lambda_k - \lambda_{k+1}) a_k v_k = \vec{0}$$

$v_1, v_2, \dots, v_k$ jsou lin. nez.

$$\overbrace{(\lambda_1 - \lambda_{k+1})}^{\neq 0} a_1 = \dots = \overbrace{(\lambda_k - \lambda_{k+1})}^{\neq 0} a_k = 0$$

$$a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0$$

Dosadíme do (0)

$$a_{k+1} v_{k+1} = \vec{0}$$

v_{k+1} je vl. vektor, $v_{k+1} \neq 0$.

$$a_{k+1} = 0.$$

$v_1, v_2, \dots v_k, v_{k+1}$ jsou lin. nezávislé.

Důsledek předch. vět. Nechť $\dim U = n$. Nechť $\varphi: U \to U$ má n RŮZNÝCH vlastních čísel. Pak v U existuje báze α tvořená vl. vektory a platí

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \; \lambda_n \end{pmatrix},$$

kde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ jsou příslušná vl. čísla.

Důkaz: Podle předch. věty jsou vl. vektory $v_1, v_2, \dots v_n$ příslušné $\lambda_1 \dots \lambda_n$ lin. nezávislé, $n = \dim U$, tvoří bázi $\alpha = (v_1, \dots v_n)$ prostoru U.

Podle předchozí věty je

$$(\varphi)_{\alpha,\kappa} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Spektrum lineárního operátoru je množina všech jeho vlastních čísel.

Algebraická násobnost vl. čísla λ_0 je číslo k takové, že

char. polynom $= (\lambda - \lambda_0)^k q(\lambda)$ $\quad q(\lambda_0) \neq 0$.

– násobnost λ_0 jako kořene char. polynomu.

Geometrická násobnost vl. čísla

λ_0 je vl. číslo $\quad u$ je vl. vektor $\quad \varphi(u) = \lambda_0 u$

$$(\varphi - \lambda_0 id) u = \vec{0}$$

$$u \in Ker(\varphi - \lambda_0 id) \setminus \{\vec{0}\}$$

Geom. násobnost $=$ $\dim Ker(\varphi - \lambda_0 id)$

Podprostor $Ker(\varphi - \lambda_0 id)$ pro λ_0 vl. čísla se nazývá **vlastní podprostor**

Lemma 1: Součet alg. násobností vl. čísel operátoru $\varphi : U \to U$, kde $\dim U = n$, je $\leq n$.

Lemma 2: geom. násobnost $\lambda_0 \leq$ alg. nás. λ_0

Příklad 0 $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\varphi(x) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

otočení o úhel α kolem počátku

Char. polynom

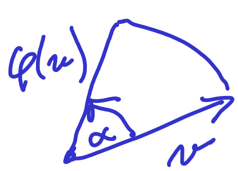
$$\det \begin{pmatrix} \cos\alpha - \lambda & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha - \lambda \end{pmatrix} = (\cos\alpha - \lambda)^2 + \sin^2\alpha$$

$$= (\cos\alpha - \lambda)^2 + \sin^2\alpha$$

$$= \lambda^2 - 2\cos\alpha \cdot \lambda + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha$$

$$= \lambda^2 - 2\cos\alpha \cdot \lambda + 1$$

$$D = 4\cos^2\alpha - 4 < 0 \text{ pro } \alpha \neq k\pi$$



nemá vl. čísla v $\mathbb{R}$

součet nás. vl. čísel $= 0 < 2$.

Příklady na lemma 2.

Příklad ① $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad \varphi(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^3$$

$\lambda_0 = 2$ je vl. číslo alg. násobnosti 3.

$$\ker(\varphi - 2\,\mathrm{id}) = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 2-2 & 0 & 0 \\ 0 & 2-2 & 0 \\ 0 & 0 & 2-2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \mathbb{R}^3$$

geometrická násobnost $\lambda_0 = 2$ $= 3$

$=$ alg. nás. λ_0

Příklad ② $\varphi(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

Char. polynom

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^3$$

Vl. čísla $\lambda_0 = 2$ má alg. násob. 3

$$\mathrm{Ker}\,(\varphi - 2\,\mathrm{id}) = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 ;\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \{ (0, p, q) \in \mathbb{R}^3 \} = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

Geom. nás. $= \dim [e_2, e_3] = 2$.

alg. nás $= 3 > 2 =$ geom. nás.

<u>Příklad</u> 3 $\quad \varphi(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

Char. polynom

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^3$$

Alg. nás. $\lambda_0 = 2$ je opět 3

Geom. nás.

$$\mathrm{Ker}\,(\varphi - 2\,\mathrm{id}) = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 ;\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$x_1 = 0,\ x_2 = 0$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right\} = [e_3]$$

geom. násob. $= \dim [e_3] = \underline{1}$

alg. násob. $= 3 > 1 =$ geom. násob.

Důkaz, že alg. násob. $\geq$ geom. násob.

Nechť λ_0 je vl. číslo geom. násob. k.
Existují vl. vektory k λ_0

$$v_1, v_2, \dots v_k \qquad (\text{báze } \operatorname{Ker} \varphi - \lambda_0 \mathrm{id})$$

které jsou lin. nez.
Tyto vektory doplníme na bázi α celého prostoru U

$$\alpha = (v_1, v_2, \dots v_k, u_{k+1}, \dots u_n)$$

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{array}{cl} \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \lambda_0 & & 0 \\ & \lambda_0 & \\ 0 & & \ddots \; \lambda_0 \end{matrix} & C \\ \hline O & D \end{array}\right) & \begin{array}{l} \}\, k \\ \}\, n-k \end{array} \\ \underbrace{\qquad\qquad}_{k} \; \underbrace{\qquad\qquad}_{n-k} & \end{array}$$

Char. polynom

$$\det \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_0-\lambda & & & \\ & \lambda_0-\lambda & & C \\ & & \ddots & \\ & & \lambda_0-\lambda & \\ \hline & 0 & & D-\lambda E \end{array}\right)$$

$$= \det \begin{pmatrix} \lambda_0-\lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_0-\lambda \end{pmatrix} \cdot \det (D-\lambda E)$$

$$= (\lambda_0-\lambda)^k \, q(\lambda)$$

$\Rightarrow$ alg. násobnost λ_0 je aspoň k.