8. přednáška: Samoadjungované operátory

Začneme příkladem

$$\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k \qquad \varphi(x) = Ax$$

$A \in Mat_{k \times n}(\mathbb{R})$

$A^T \in Mat_{n \times k}(\mathbb{R})$

$$\varphi^* : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n \qquad \varphi^*(y) = A^T y$$

Tento příklad zobecníme a φ^* budeme nazývat adjungovaným zobrazením k φ.

$\underline{n = k}$ $\qquad \varphi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n \qquad \varphi(x) = Ax$

$\qquad \varphi^* : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k \qquad \varphi^*(y) = A^T y$

Jestliže $A = A^T$ (A je symetrická), pak

$$\varphi = \varphi^*$$

a φ nazýváme samoadjungovaný operátor.

Teorie

U, V dva vekt. prostory se skalárním součinem nad $\mathbb{R}$ nebo nad $\mathbb{C}$

Lin. zobrazení $\qquad \varphi : U \to V$

Lin. zobrazení splňující $\qquad \varphi^* : V \to U$

$$\forall u \in U, \forall v \in V: \langle \varphi(u), v \rangle_V = \langle u, \varphi^*(v) \rangle_U$$

se nazývá adjungované zobrazení k zobrazení φ.

Příklad: $\varphi: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^k$, $\varphi(x) = Ax$

$A \in Mat_{k \times n}(\mathbb{C})$. $B \in Mat_{n \times k}(\mathbb{C})$

Ekvivalentní tvrzení: Předp. že $\varphi^*(y) = By$.

$$\forall x \in \mathbb{C}^n, \forall y \in \mathbb{C}^k \quad \langle \varphi(x), y \rangle_{\mathbb{C}^k} = \langle x, \varphi^*(y) \rangle_{\mathbb{C}^n}$$

$$\langle Ax, y \rangle_{\mathbb{C}^k} = \langle x, By \rangle_{\mathbb{C}^n}$$

$$(Ax)^T \cdot \overline{y} = x^T \cdot \overline{(By)}$$

$$\forall x \in \mathbb{C}^n, \forall y \in \mathbb{C}^k \quad x^T \underline{A^T} \, \overline{y} = x^T \cdot \underline{\overline{B}} \cdot \overline{y}$$

$$A^T = \overline{B} \qquad | \; \overline{}$$

$$\overline{A}^T = B$$

$\varphi(x) = Ax$ má jako adj. zobrazení podle teoretické definice $\varphi^*(y) = \overline{A}^T y$

Nad $\mathbb{R}$ je k $\varphi(x) = Ax$, $\varphi^*(y) = A^T y$.

Definice: $\varphi: U \to U$ je samoadjungovaný operátor, právě když

$$\varphi = \varphi^*$$

tj. platí $\forall u, v \in U$:

$$\langle \varphi(u), v \rangle = \langle u, \varphi(v) \rangle$$

Příklad 1 $\quad \varphi(x) = Ax \quad \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

je samoadj. operátor právě když

$$\varphi = \varphi^* \iff A = A^T.$$

A je symetrická matice

Příklad 2 $\quad \varphi(x) = Ax : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ je samoadj. právě když

$$\varphi = \varphi^* \iff A = \bar{A}^T$$

Takové matici říkáme hermitovská matice:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2-3i & 1+2i \\ 2+3i & 4 & 4i \\ 1-2i & -4i & 8/5 \end{pmatrix} = \bar{A}^T$$

Budeme psát

$$A^* = \bar{A}^T \quad \text{nad } \mathbb{C}$$
$$A^* = A^T \quad \text{nad } \mathbb{R}$$

Příklad 3: kolmá projekce

V je podprostor prostoru U a nechť

$$P : U \to U$$

je kolmá projekce na podprostor V.

P je samoadjungovaný operátor.

$u, v \in U \qquad u = \underset{\in V}{Pu} + \underset{\in V^\perp}{(u - Pu)}, \quad v = \underset{\in V}{Pv} + \underset{\in V^\perp}{(v - Pv)}$

$$\underline{\langle Pu, v\rangle} = \langle Pu, Pv + (v - Pv)\rangle =$$

$$= \langle \underset{\in V}{Pu}, Pv\rangle + \underbrace{\langle Pu, \underset{\in V^\perp}{v - Pv}\rangle}_{0} = \underline{\langle Pu, Pv\rangle}$$

$$\underline{\langle u, Pv\rangle} = \langle Pu + (u - Pu), Pv\rangle = \langle Pu, Pv\rangle + \underbrace{\langle u - Pu, Pv\rangle}_{0}$$

$$= \underline{\langle Pu, Pv\rangle}$$

$\Rightarrow \quad \langle Pu, v\rangle = \langle u, Pv\rangle \implies P$ je samoadjung.

$\operatorname{im} P = V \subseteq U \qquad P$ bereme jako zobrazení z U do U!

<u>Lemma:</u> Je-li $\varphi : U \to U$ samoadj. operátor a α je ortonormální báze, pak $(\varphi)_{\alpha,\alpha}$ je symetrická (U nad $\mathbb{R}$) / hermitovská (U nad $\mathbb{C}$).

Poznámka: platí i obrácené tvrzení.

$\Rightarrow$ $\varphi: U \to U$ samoadj. α ortonormální báze

$$\forall u, v \in U \qquad \langle \varphi(u), v\rangle = \langle u, \varphi(v)\rangle$$

$$\Updownarrow$$

$$(\varphi(u))_\alpha^T \cdot \overline{(v)_\alpha} = (u)_\alpha^T \cdot \overline{(\varphi(v))_\alpha}$$

$$\Updownarrow$$

$$\left((\varphi)_{\alpha,\alpha} \cdot (u)_\alpha\right)^T \cdot \overline{(v)_\alpha} = (u)_\alpha^T \cdot \overline{((\varphi)_{\alpha,\alpha} \cdot (v)_\alpha)}$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall u, v \in U \qquad (u)_\alpha^T \cdot \underline{(\varphi)_{\alpha,\alpha}^T} \cdot \overline{(v)_\alpha} = (u)_\alpha^T \cdot \underline{\overline{(\varphi)_{\alpha,\alpha}}} \cdot \overline{(v)_\alpha}$$

$$\Updownarrow$$

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha}^T = \overline{(\varphi)_{\alpha,\alpha}} \quad \Big|\ ^T$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \overline{(\varphi)_{\alpha,\alpha}}^T}$$

Bylo podstatné, že α je ortonormální báze!

Lemma: (vlastní čísla a vektory samoadj. oper.)

(1) Vlastní čísla jsou vždy reálná (i když jsme v prostoru nad $\mathbb{C}$!)

(2) Vlastní vektory k různým vlastním číslům jsou na sebe kolmé.

(1) u vlastní vektor s vl. číslem λ, $u \neq \vec{o}$

$$\lambda\langle u,u\rangle = \langle \lambda u,u\rangle = \langle \varphi(u),u\rangle = \langle u,\varphi(u)\rangle = \langle u,\lambda u\rangle = \bar{\lambda}\langle u,u\rangle$$

$$(\lambda-\bar{\lambda})\underbrace{\langle u,u\rangle}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow \lambda = \bar{\lambda}$$

$\Rightarrow \lambda$ je reálné číslo

(2) $\lambda \neq \mu$ dvě různá vl. čísla s vl. vektory u a v $\quad \varphi(u) = \lambda u,\ \varphi(v) = \mu v.$

$$\lambda\langle u,v\rangle = \langle \lambda u,v\rangle = \langle \varphi(u),v\rangle = \langle u,\varphi(v)\rangle = \langle u,\mu v\rangle = \bar{\mu}\langle u,v\rangle$$

$\mu \in \mathbb{R}$

$$= \mu\langle u,v\rangle$$

$$(\underbrace{\lambda-\mu}_{\neq 0})\langle u,v\rangle = 0 \Rightarrow \langle u,v\rangle = 0$$

$u \perp v.$

HLAVNÍ VĚTA O SAMOADJ. OPERÁTORECH

Nechť $\varphi: U \to U$ je samoadjungované (U je nad $\mathbb{C}$ nebo nad $\mathbb{R}$). Pak v U existuje ortonormální báze α tvořená vlastními vektory.

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix},\ \text{kde}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ jsou vlastní čísla.

Důkaz je skoro stejný jako v případě unitárních operátorů.

Indukcí podle $n = \dim U$.

$n = 1$ $\qquad \varphi(u) = \lambda u \qquad \forall u$

Protože φ je samoadj. $\lambda = \bar{\lambda}$.

Ortonormální báze je $\frac{u}{\|u\|} \qquad u \neq \vec{o}$.

Ind. předpoklad věta platí v dimenzi $n-1 \geq 1$ a dokážeme pro dim n

$\dim U = n \qquad U$ nad $\mathbb{C}$

char. polynom má kořen λ_1 v $\mathbb{C}$

Protože je to vl. číslo samoadj. operátoru, je $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, vl. vektor u_1 $\quad \|u_1\| = 1$

a ukážeme, že $[u_1]^\perp$ je invariantní vůči φ (příprava nebo důkaz pro φ unitární).

Apl. ind. předp. na $\varphi|[u_1]^\perp \quad [u_1]^\perp \to [u_1]^\perp$
$\dim = n-1$.

$\exists$ ortonormální báze $u_2, \dots u_n \in [u_1]^\perp$
tvořená vl. vektory $\varphi(u_i) = \lambda_i u_i$

$u_1, u_2, \dots, u_n$ je ortonormální báze U tvořená vlastními vektory:

U je vekt. prostor nad $\mathbb{R}$

$(\varphi)_{B,B}$ B ortonorm. báze je symetrická matice.

$\underline{\psi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n}$ $\psi(x) = (\varphi)_{B,B}\, x$

$(\varphi)_{B,B} = (\varphi)_{B,B}^T$ a $(\varphi)_{B,B}$ je reálná

je rovněž $(\varphi)_{B,B} = \overline{(\varphi)_{B,B}}^T$

hermitovská. Tedy ψ je samoadj. má vlastní číslo $\lambda_1 \in \mathbb{C}$. To ale musí být reálné.

$$\underset{\text{reálná matice}}{(\varphi)_{B,B}}(x) = \underset{\in\mathbb{R}}{\lambda_1} x$$

pak x je reálný vektor z $\mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{C}^n$.

Tedy existuje vektor $u_1 \in U$

$$(u_1)_B = x$$

a pro které platí

$$(\varphi)_{B,B}\, x = \lambda_1 x$$
$$\varphi(u_1) = \lambda_1 u_1$$

Tedy v U má φ vl. vektor u_1 a můžeme postupovat stejně jako v komplexním případě.

Důsledek 1 (Věta o spektrálním rozkladu)

(Spektrum je množina všech vlastních čísel operátoru.)

Každý samoadj. operátor $\varphi : U \to U$ lze psát ve tvaru

$$\varphi = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \dots + \lambda_k P_k ,$$

kde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ jsou všechna vlastní čísla operátoru φ, P_i je kolmá projekce U na $\ker(\varphi - \lambda_i \, id)$

přitom vlastní podprostory jsou navzájem kolmé.

$$\ker(\varphi - \lambda_i \, id) \perp \ker(\varphi - \lambda_j \, id) \qquad i \neq j.$$

$\forall u \in U : \ \varphi(u) = \lambda_1 P_1 u + \lambda P_2 u + \dots + \lambda_k P_k u$

Důkaz:

$u_i \in \ker(\varphi - \lambda_i \, id)$ $\qquad P_1(u_i) \perp \ker(\varphi - \lambda_i \, id)$

$$\varphi(u_i) = \lambda_i u_i$$

$$(\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_k P_k)(u_i) = \underbrace{\lambda_1 P_1(u_i)}_{\lambda_1 \cdot 0} + \underbrace{\dots}_{0} \ \underbrace{\lambda_i P_i(u_i)}_{\lambda_i u_i} + \dots \underbrace{\lambda_k P(u_k)}_{\lambda_k \cdot 0}$$

$$= \lambda_i u_i$$

$\varphi(u_i) = \left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j P_j\right)(u_i)$ pro všechny vlastní vektory u_i, tj. ale tvoří bázi

Tedy vzorec $\varphi(u) = \left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j P_j\right)(u)$

platí pro všechny vektory z U.

Důsledek 2

Každou symetrickou reálnou matici A můžeme psát ve tvaru

$$\boxed{A = P^T D P}$$

kde $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \; \lambda_n \end{pmatrix}$ s λ_i vl. čísly

matice A a P je ortogonální.

Důkaz $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $\varphi(x) = Ax$

φ je samoadj. operátor s vl. čísly $\lambda_1 \ldots \lambda_n$

a v $\mathbb{R}^n$ existuje ortonormální báze

α tvořená vlastními vektory.

$$(\varphi)_{\varepsilon,\varepsilon} = A \qquad (\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \; \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$(\varphi)_{\varepsilon,\varepsilon} = (id)_{\varepsilon,\alpha} (\varphi)_{\alpha,\alpha} \underset{\parallel}{(id)_{\alpha,\varepsilon}}$$

$$A = P^{-1} \cdot D \cdot P$$

$P = (id)_{\alpha,\varepsilon}$ α je orton. báze v $\mathbb{R}^n$, ε je orton. báze v $\mathbb{R}^n$

P je ortogonální matice v $\mathbb{R}^n$

$P^{-1} = (id)_{\varepsilon,\alpha} = \left((u_1)_\alpha \; \ldots \; (u_n)_\alpha\right)$ je ortogonální

$(P^{-1})^{-1} = (P^{-1})^T \quad \Big/^{-1}$

$P^{-1} = \left((P^{-1})^{-1}\right)^T \Leftrightarrow P^{-1} = P^T$

P je ortogonální matice.

$$\boxed{A = P^{-1} D P} \quad P \text{ ortogonální}$$
$$\Updownarrow$$
$$\boxed{A = P^T D P}$$

Důsledek 3: pro kvadr. formy

Pro každou kvadr. formu
$$g : U \to \mathbb{R}$$
(kde U je vekt. prostor nad $\mathbb{R}$ se skal. součinem) existuje v U ortonormální báze

a taková, že v jejích souřadnicích je

$$q(u) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_n x_n^2$$

kde $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ jsou vlastní čísla matice kvadr. formy q v nějaké ortonormální bázi B.

Dříve $\exists$ báze (neortogonální, že)

ani libovolné až na znaménko

$$q(u) = a_{11} x_1^2 + \dots + a_{nn} x_n^2$$

Nyní $\exists$ ORTONORMÁLNÍ báze, že

$$q(u) = \underline{\lambda_1} x_1^2 + \dots + \underline{\lambda_n} x_n^2$$

vlastní čísla

První verze

$$\begin{array}{c|c} B & B^T \\ \hline B & \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{c|c} \begin{matrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{matrix} & \alpha^T \\ \hline \alpha & \end{array}$$

Tento postup NEDÁVÁ ortonormální bázi (ANI ortogonální).

Důkaz důsledku 3

$f: U \times U \to \mathbb{R}$ je libovolná sym. bilin. forma

$$q(u) = f(u,u)$$

$\mathcal{B}$ orton. báze, B matice f, symetrická

$$f(u,v) = (u)_{\mathcal{B}}^T \, B \, (v)_{\mathcal{B}} =$$

$$= (u)^T_{\mathcal{B}} \, B^T \, (v)_{\mathcal{B}} =$$

$$= \left(B \cdot (u)_{\mathcal{B}}\right)^T \cdot (v)_{\mathcal{B}} =$$

$\exists \varphi: U \to U$
$(\varphi)_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = B$

$$= \underline{\left((\varphi)_{\mathcal{B},\mathcal{B}} (u)_{\mathcal{B}}\right)^T \cdot (v)_{\mathcal{B}}}$$

$$= \underline{\langle \varphi(u), v \rangle}$$

Rovnost platí díky tomu, že $\mathcal{B}$ je orton. báze

$f: U \times U \to \mathbb{R}$ určuje $\varphi: U \to U$

$$\langle \varphi(u), v \rangle = f(u,v) = f(v,u) = \langle \varphi(v), u \rangle$$

$$= \langle u, \varphi(v) \rangle$$

φ je samoadj. operátor na U.

V U existuje ortonormální báze $\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ tvořená vlastními vektory.

Spočítáme matici f v bázi α

$$A_{i,j} = f(u_i, u_j) = \langle \varphi(u_i), u_j \rangle = \langle \lambda_i u_i, u_j \rangle = \begin{cases} \lambda_i & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

f má v bázi α matici

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Tedy $\quad q(u) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2$.

Typický příklad

Daná kvadr. forma

$$q(u) = \sum a_{ij} y_i y_j$$

Hledáme ortonorm. bázi α takovou, že v jejích souřadnicích

$$q(u) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2$$

Najdeme vl. čísla matice

$$A = (a_{ij})$$

$\lambda_1 \dots \lambda_n$, vlastní vektory $u_1, u_2, \dots u_n$, které tvoří ortonorm. bázi.

$$\alpha = (u_1, \dots u_n)$$

$$g(u) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2$$

Žádné stejné řádk. a sloupc. úpravy, ale hledání vlastních čísel a vektorů.

$$\begin{array}{ccc|c} \bullet & 0 & 0 & u_1 \\ 0 & \bullet & 0 & u_2 \\ 0 & 0 & \bullet & u_3 \\ \hline u_1 & u_2 & u_3 & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc|c} \multicolumn{2}{c}{\boxed{\begin{array}{cc} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{array}}} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 - a u_1 \end{array} \\ 0 & 0 & \bullet & u_3 \\ \hline u_1 & u_2 - a u_1 & u_3 & \end{array}$$

Konzultace k písemce v pátek 23/1

ve 12^{30}.