

10. přednáška: Aplikace pseudoinverze, další rozklady matic, lineární procesy

Minule jsme definovali pseudoinverzi matice A se sing. rozkladem $A = P S Q^*$ jako

$$A^{(-1)} = Q S^{(-1)} P^*$$

a uvedli jsme větu o Martvalech pseudoinverze matice. Některé z těchto Martvalů dokažeme:

(4) $A^{(-1)} A$ je matice kolmé projekce K^m na $(\ker \varphi)^\perp$ z důvodu sing. rozkladu níže, kde

$Q = (\text{id})_{E_m, \alpha}$, kde $\alpha = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r, \mu_{r+1}, \dots, \mu_m)$ je ortonormalní báze K^m a $\mu_{r+1}, \dots, \mu_m \in \ker \varphi$,

$$\varphi: K^n \rightarrow K^k, \quad \varphi(x) = Ax.$$

$$\text{Platí } (\varphi^{(-1)} \varphi)_{E_m, E_m} = A^{(-1)} A$$

a také

$$(\varphi^{(-1)} \varphi)_{\alpha, \alpha} = (\text{id})_{\alpha, E_m} A^{(-1)} A (\text{id})_{E_m, \alpha}$$

$$= Q^* (Q S^{(-1)} P^* P S Q^*) Q$$

$$= S^{(-1)} S = \left(\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \} r \\ \} m-r \end{array}$$

$$\text{Pro } i \quad (\varphi^{(-1)} \varphi)(\mu_i) = \mu_i \quad \text{pro } 1 \leq i \leq r$$

$$(\varphi^{(-1)} \varphi)(\mu_j) = 0 \quad \text{pro } r+1 \leq j \leq m$$

Tedy $\varphi^{(-1)} \varphi$ je kolmá projekce na $(\ker \varphi)^\perp$.

(5) $A A^{(-1)}$ je matice kolmé projekce K^n na $\text{im } \varphi$.

Připomeňme, že $P = (\text{id})_{\mathcal{E}_k, \mathcal{B}}$ kde $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n, v_{n+1}, \dots, v_k)$
 je ortonormální báze, kde
 $[v_1, v_2, \dots, v_n] = \text{im } \varphi$, $\varphi(x) = Ax$.

Plati

$$(\varphi \varphi^{-1})_{\mathcal{E}_k, \mathcal{E}_k} = A A^{-1}$$

$$\begin{aligned} (\varphi \varphi^{-1})_{\mathcal{B}, \mathcal{B}} &= (\text{id})_{\mathcal{B}, \mathcal{E}_k} A A^{-1} (\text{id})_{\mathcal{E}_k, \mathcal{B}} = \\ &= P^* (P S Q^*) (Q S^{-1} P^*) P = \\ &= S S^{-1} = \begin{pmatrix} E & O \\ \underbrace{O}_{n} & \underbrace{O}_{k-n} \end{pmatrix} \begin{matrix} \} n \\ \} k-n \end{matrix} \end{aligned}$$

Proto $\varphi \varphi^{-1}(v_i) = v_i$ pro $1 \leq i \leq n$
 a

$\varphi \varphi^{-1}(v_j) = 0$ pro $n+1 \leq j \leq k$.

Tedy $\varphi \varphi^{-1}$ je kolmá projekce na $\text{im } \varphi$.

(6) Plati $A A^{-1} A = A$.

$$\begin{aligned} A A^{-1} A &= P S Q^* Q S^{-1} P^* P S Q^* \stackrel{S}{=} \\ &= P S S^{-1} S Q^* = P \begin{pmatrix} E & O \\ \underbrace{O}_{k \times k} & \underbrace{O}_{k \times n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & O \\ \underbrace{O}_{k \times n} & \underbrace{O}_{k \times n} \end{pmatrix} Q^* \\ &= P \begin{pmatrix} D & O \\ \underbrace{O}_{k \times n} & \underbrace{O}_{k \times n} \end{pmatrix} Q^* = P S Q^* = A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (7) \quad A^{(-1)} &= (A^* A)^{(-1)} A^* \\
 (A^* A)^{(-1)} A^* &= \left((P S Q^*)^* (P S Q^*) \right)^{(-1)} (P S Q^*)^* \\
 &= \left(Q S^* P^* P S Q^* \right)^{-1} (Q S^* P^*) = \\
 &= \left(Q \underbrace{\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{n \times k} \underbrace{\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{k \times n} Q^* \right)^{(-1)} \cdot Q \underbrace{\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{n \times k} P^* = \\
 &= \left(Q \begin{pmatrix} D^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^* \right)^{(-1)} \cdot Q \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^* = \\
 &= Q \begin{pmatrix} D^{-2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{Q^* Q}_{= E}_{n \times n} \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^* = \\
 &= Q \begin{pmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^* = Q S^{(-1)} P^* = A^{(-1)}
 \end{aligned}$$

Plati rovnice $A^* (A A^*)^{(-1)} = A^{(-1)}$. Důkaz je domácí úloha.

Aproximace řešení soustav lineárních rovnic

Necht' A je matice $k \times n$. Uvažujme soustavu

$$Ax = b, \quad x \in \mathbb{K}^n, \quad b \in \mathbb{K}^k.$$

Tato soustava má řešení, má-li ady

$$(*) \quad \text{rk}(A) = \text{rk}(A|b)$$

Podmínka (*) je ekvivalentní tomu, že

$$b \in \text{im } \varphi, \quad \varphi: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^k, \quad \varphi(x) = Ax$$

V případě, že podmínka (*) není splněna, chceme najít $x \in \mathbb{K}^n$ takové, že

$$\|Ax - b\| \text{ je minimální.}$$

Věta: Funkce $f: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \|Ax - b\|$$

má v'ra' svéka minima v bodech

$$x = A^{(-)}b + y,$$

kde $Ay = 0$.

Důkaz: Již víme, že $AA^{(-)} = P$ je matice

kolme' projekce K^2 na $\text{im } \varphi$ ($\varphi(x) = Ax$).
Proto

$$\min_{x \in K^2} \|Ax - b\| = \min_{v \in \text{im } \varphi} \|v - b\| = \|Pb - b\| = \|AA^{(-)}b - b\|$$

Tedy v $x = A^{(-)}b$ naly'ra' funkce f sveho minima. Stejne' hodnoty ale naly'ra' i ve v'ci $A^{(-)}b + y$, kde $Ay = 0$.

Pu'klad: Ma'me (p'ir'ic'nou) soustavu rovnice

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 3 \\ x_1 &= 7 \\ x_2 &= 5 \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} \notin \text{im } \varphi$$

Hleda'me (x_1, x_2) tak, aby

$$\|Ax - b\|^2 = (x_1 + 2x_2 - 3)^2 + (x_1 - 7)^2 + (x_2 - 5)^2$$

byla minima'lnu'. Podle p'edcho'i ve'by,

$$x = A^{(-)}b = \begin{pmatrix} 1/6 & 5/6 & -1/3 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

$A^{(-)}$ j'me m'ci'kali minule!

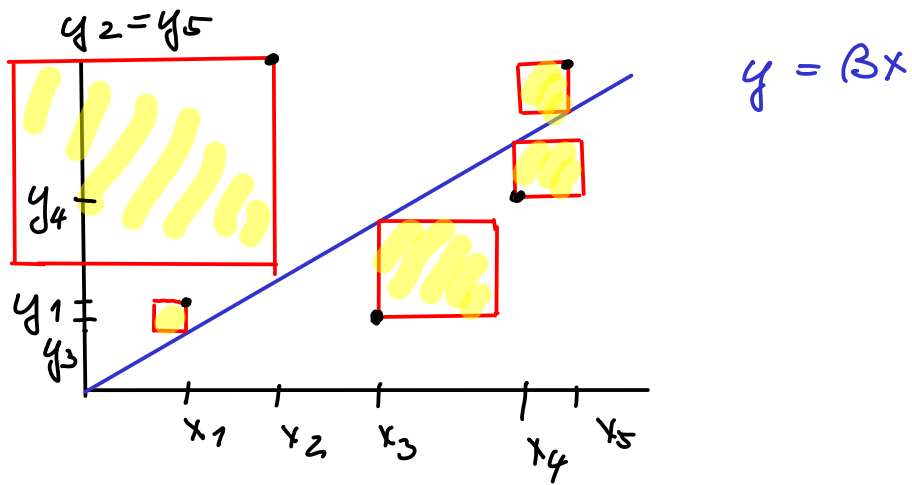
Lineární regrese:

Očekáváme, že navzájem veličiny x, y je lineární:

$$y = \beta x$$

Naměříme n bodů $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ a chceme najít β tak, se přímla $y = \beta x$ je "blíže" naměřených bodů (x_i, y_i) . Slovo "blíže" znamená obvykle, že suma

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \beta x_i)^2 \text{ je minimální.}$$



Máme soubor

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \beta = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

a chceme $\beta \in \mathbb{R}$.

Nechť $\sum_{i=1}^n x_i^2 \neq 0$.

$$A = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\|Ax - b\|^2 = (\beta x_1 - y_1)^2 + (\beta x_2 - y_2)^2 + \dots + (\beta x_n - y_n)^2.$$

Najlepší aproximace je

$$\begin{aligned} \beta &= A^{(-1)} b = (A^* A)^{(-1)} (A^* \cdot b) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{-1} (x_1 x_2 \dots x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}. \end{aligned}$$

Další příklad na lineární regresi

Předpokládejme pářičlask $y = \alpha + \beta x$,
naměřili jsme $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$.

Hledáme α, β tak, aby počet čverců

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \alpha - \beta x_i)^2 \text{ byl minima'ni'}$$

Ta vede k rovnaně

$$\begin{aligned} \alpha + \beta x_1 &= y_1 \\ \alpha + \beta x_2 &= y_2 \\ &\dots \\ \alpha + \beta x_n &= y_n \end{aligned}$$

A matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \dots & \dots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, normální
 α a β .

Vieme, že
$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = A^{(-1)} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$A^* A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{pmatrix}$$

$$\det A^* A = n \sum_{i=1}^n x_i - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)^2$$

Nechť $x_i \neq x_j$ pre nejaké $i \neq j$. Pak
 $\det A^* A \neq 0$ a podľa je

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = (A^* A)^{-1} (A^* b) = \frac{1}{\sum_{i < j} (x_i - x_j)^2} \begin{pmatrix} \sum x_i^2 & \sum x_i \\ \sum x_i & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sum_{i < j} (x_i - x_j)^2} \begin{pmatrix} \left(\sum_i x_i^2 \right) \left(\sum_j y_j \right) + \left(\sum_i x_i \right) \left(\sum_j x_j y_j \right) \\ \left(\sum_i x_i \right) \left(\sum_j y_j \right) + n \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{pmatrix}$$

Polárni rozklad matice

Motivace: Každé komplexní číslo $a+ib \in \mathbb{C}$
 lze psát ve tvaru
 $a+ib = r (\cos \alpha + i \sin \alpha)$,

kde $r \geq 0$. Tepla možad je jednodušejší,
je-li $a+ib \neq 0$.

Uvažme lineární zobrazení

$$\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad \varphi(z) = (a+ib) \cdot z$$

Toto zobrazení je složením dvou zobrazení

$$\varphi = \varphi_2 \circ \varphi_1,$$

kde

$$\varphi_1: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad \varphi_1(z) = (\cos \alpha + i \sin \alpha) z$$

je unitární a

$$\varphi_2: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad \varphi_2(z) = r z, \quad r \geq 0$$

je samoadjungované a pozitivně semi-definitní.

Samoadjungovanost $(r)^* = \bar{r} = r$.

Pozitivně semi-definitnost

$$\langle r z, z \rangle = r |z|^2 \geq 0.$$

Věta o polárním rozkladu

Je-li A čtvercová matice $n \times n$ nad \mathbb{R} nebo \mathbb{C} ,
pak ji lze rozložit na součin

$$A = R \cdot U,$$

kde R je samoadjungovaná ($R = R^*$)

a pozitivně semi-definitní ($\langle R x, x \rangle \geq 0$)

a U je unitární nebo ortogonální.

Manic platí, že $R^2 = A A^*$ (přičemž $R = \sqrt{A A^*}$).

Je-li A invertibilní, pak R a U určeny jedinečně.

Diškas pomoci sing. razkladu: Nechť $A = PSQ^*$ je sing. razklad matice A . Pak

$$A = PSP^* \underbrace{PQ^*}_E = \underbrace{(PSP^*)}_R \underbrace{(PQ^*)}_U$$

R je samoadjungovaná a pozitivně semidefinitivní:

$$R^* = (PSP^*)^* = PS^*P^* = PSP^*$$

$$\langle Rx, x \rangle = \langle PSP^*x, x \rangle = \langle SP^*x, P^*x \rangle = \langle Sy, y \rangle \geq 0.$$

U je unitární nebo ortogonální:

$$UU^* = (PQ^*)(PQ^*)^* = (PQ^*)(QP^*) = P \underbrace{Q^*Q}_E P = E$$

Dále:

$$AA^* = (RU)(RU)^* = R \underbrace{UU^*}_E R^* = R \cdot R^* = R^2.$$

Jednoznačně je A invertibilní neludeme dohromady.

Příklad: Najděte vlastní rozklad matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

A není regulární. $A = PSQ^* = P \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^*$

$$A = (PSP^*)(PQ^*) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{10}}{2} & \frac{\sqrt{10}}{2} \\ \frac{\sqrt{10}}{2} & \frac{\sqrt{10}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$$

Lineární procesy

prvními myslí nějakého myšlenku, který si v čase n popíše vektorem

$$x(n) = \begin{pmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ \vdots \\ x_m(n) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

a jeho předchůzci v čase n do času $n+1$ pomocí matice A tvaru $m \times m$:

$$x(n+1) = A x(n).$$

Důležitou roli při "myslích" tohoto myšlenku mají vlastní čísla a vlastní vektory matice A .

① Dravec a kořist

Uvažujme dva úrovně dravce D a kořist K . Označme $x(n) = \begin{pmatrix} D_n \\ K_n \end{pmatrix}$ jejich

počty po n letech. Změna počtu poliká takto:

$$D_{n+1} = 0,6 D_n + 0,5 K_n$$

$$K_{n+1} = -p D_n + 1,2 K_n$$

kde $p > 0$ je parametr. Matice

$$X(n+1) = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,5 \\ -p & 1,2 \end{pmatrix} X(n) = A X(n)$$

Raji má na's my'roj le'ko dvoch druhov populace
v sa'rislosti na parametre p.

Vlastni' čísla a vektoru matice A v sa'rislosti
na parametre p

$$(A) \quad p = 0,16, \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 0,8, \quad u_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(B) \quad p = 0,175, \quad \lambda_1 = 0,95, \quad \lambda_2 = 0,85, \quad u_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(C) \quad p = 0,135, \quad \lambda_1 = 1,05, \quad \lambda_2 = 0,75, \quad u_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Počítacím' stav obou druhu můžeme napravit
jako lineární kombinaci vlastních vektorů

$$X(0) = \begin{pmatrix} D_0 \\ K_0 \end{pmatrix} = a u_1 + b u_2$$

V čase n je stav dvou populací

$$\begin{aligned} X(n) &= A^n X(0) = A^n \begin{pmatrix} D_0 \\ K_0 \end{pmatrix} = A^n (a u_1 + b u_2) = \\ &= a A^n u_1 + b A^n u_2 = a \lambda_1^n u_1 + b \lambda_2^n u_2 \end{aligned}$$

Pro jednotlivé parametry to znamená

$$(A) \quad p = 0,16, \quad \lambda_1^n = 1^n = 1, \quad \lambda_2^n = 0,8^n \rightarrow 0,$$

tedy $X_n \rightarrow a u_1 = a \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$. Populace

se stabilizujú.

(B) $p = 0,175$ $\lambda_1^n = 0,95^n \rightarrow 0$, $\lambda_2^n = 0,85^n \rightarrow 0$
 teda $x(n) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Populace mizí.

(C) $p = 0,135$ $\lambda_1^n = 1,05^n \rightarrow \infty$, $\lambda_2^n = 0,75^n \rightarrow 0$
 tedy me $a \neq 0$ populace roste
 a pomer $D_m : K_m$

se blíží poměru dravů a kořisti ve
 vlastním vektoru w_1 tj. 10:9.

(2) Leslieho populační model

Máme pohlaví drak s m věkovými skupinami.
 $x_i(n)$ je počet jedinců ve věkové skupině
 i v čase n . Model

$$x(n+1) = A x(n)$$

je daná matricí (tzv. Leslieho matricí)

$$A = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & \dots & f_{m-1} & f_m \\ \tau_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \tau_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \tau_{m-1} & 0 \end{pmatrix}$$

- čísla $f_i \geq 0$ určují podíl v i -té větvě

$$X_1(n+1) = f_1 X_1(n) + f_2 X_2(n) + \dots + f_m X_m(n)$$

- τ_i je koeficient přechodu z větvě i do větvě $i+1$. $\tau_i \in [0, 1]$, $\tau_i = 1$ - u'utvářeno

$$X_{i+1}(n+1) = \tau_i X_i(n)$$

(3) Markovův proces

Systém se měří nezávisle v čase n v m různých stavech:

$p_i(n)$
je pravděpodobnost, že se nachází v čase n ve stavu i . Vektor

$$P(n) = \begin{pmatrix} p_1(n) \\ p_2(n) \\ \vdots \\ p_m(n) \end{pmatrix}$$

má vlastnost $\sum_{i=1}^m p_i(n) = 1$ a nazývá se pravděpodobnostní vektor.

V matici $A = (a_{ij})$ čísla $a_{ij} \in [0, 1]$ udávají pravděpodobnost, že se systém z stavu j dostane do stavu i .

$$p_i(n+1) = a_{i1} p_1(n) + a_{i2} p_2(n) + \dots + a_{im} p_m(n)$$

To nám dáva' lineárny' proces

$$P(n+1) = A P(n),$$

ktorý nazývame Markovov proces.

Matice A má' vlastnosť, že sačítá prvky v každom riadku je 1 a nazývajú sa stochastická alebo Markovova.

Perronova - Frobeniova teorie

Matice $A = (a_{ij})$ se nazývajú pozitívny, keďže $a_{ij} > 0$ pre, keďže $1 \leq i, j \leq n$. Matice A se nazývajú primitívny, keďže nejaká jej mocnina A^k je pozitívny.

Věta Perronova - Frobeniova

Nechť A je primitívny matice. Ze všech komplexních vlastních čísel má právě jedno největší absolutní hodnotu, nazýváme jej dominantní. Toto vlastní číslo λ_1 má tyto vlastnosti:

- (1) λ_1 je kladné reálné číslo
- (2) geometrická násobná vlastního čísla λ_1 je 1.
- (3) K λ_1 existuje vlastní vektor se všemi souřadnicemi kladnými
- (4) Pokud je $\lambda_1 = 1$, systém určený modelem
$$X(n+1) = A X(n)$$

se stabilizuje a konverguje k nárůstku
matrice reálnu k λ_1 .

(5) Pokud je $\lambda_1 < 1$, systém se v čase
stěhává konverguje exponenciálně k 0.

(6) Pokud je A Leslieho matice a $\lambda_1 > 1$, pak
populace expanduje a poměry mezi jedno-
letými populacemi se blíží k poměru
střední matrice reálnu k vlastnímu
číslu λ_1 .

Lemma: Markovova matice má dominantní
vlastní číslo rovné řádky jedné. Z každého
počátečního stavu konverguje systém k vlastní-
mu předpokladovému reálnu k vlastní
číslu 1.

S příkladem na Leslieho populační proces
a na Markovův proces se můžete
seznámit.