11. přednáška : JORDANŮV KANONICKÝ TVAR

Dodatek : Lesliho matice

$$L = \begin{pmatrix} >0 & >0 & >0 & >0 & >0 \\ >0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & >0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & >0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & >0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pak je L primitivní a má právě jedno vlastní číslo >0.

$$L = \begin{pmatrix} & & & & \boxed{0} \\ >0 & & & & \\ & >0 & & & \\ & & >0 & & \\ & & & >0 & \end{pmatrix}$$

I pak má L právě jedno vl. číslo kladné.

Motivace: Existují lin. operátory $\varphi : U \to U$ které nelze diagonalizovat. Neexistuje v U báze α složená vl. vektory

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \; \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Příklad $\varphi(x) = Ax \ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

má vl. čísla 2 alg. nás. 2, ale geom. nás. 1

Vlastní vektory jsou $c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Nemohou tvořit bázi.

Chceme najít po volbě bázi operátoru na diagonální tvar nějakou náhradu – ta bude Jordanův kanonický tvar JKT

$\exists \alpha \quad (\varphi)_{\alpha,\alpha}$ je matice v JKT

Jordanova buňka pro vlastní číslo λ_0 velikosti k

$$J_k(\lambda_0) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

matice $k \times k$

Čtvercová matice J je v Jord. kan. tvaru, jestliže je blokově diagonální s Jord. buňkami na diagonále.

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{J_{k_1}(\lambda_1)} & & & & O \\ & \boxed{J_{k_2}(\lambda_2)} & & & \\ & & \boxed{J_{k_3}(\lambda_3)} & & \\ & O & & \ddots & \\ & & & & \boxed{J_{k_s}(\lambda_s)} \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{matrix}} & & & \\ & \boxed{\begin{matrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{matrix}} & & \\ & & \boxed{2} & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{matrix}} \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \boxed{1} & & & \\ & \boxed{2} & & \\ & & \boxed{3} & \\ & & & \boxed{1} \end{matrix}$$

S Jord. buňkami souvisí pojem <u>řetězce operátoru φ</u> na vlastní číslo λ_0

Nechť λ_0 je vl. číslo $\varphi : U \longrightarrow U$.

Řetězec délky k je posloupnost

k nenulových vektorů

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \dots,\ u_{k-1},\ u_k$$

takových, že

$$\varphi(u_1) - \lambda_0 u_1 = \vec{o} \iff \varphi(u_1) = \lambda_0 u_1$$

$$\varphi(u_2) - \lambda_0 u_2 = u_1$$

$$\varphi(u_3) - \lambda_0 u_3 = u_2$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\varphi(u_k) - \lambda_0 u_k = u_{k-1}$$

Schématicky

$$\vec{o} \xleftarrow{\varphi-\lambda_0 id} u_1 \xleftarrow{\varphi-\lambda_0 id} u_2 \xleftarrow{\varphi-\lambda_0 id} u_3 \leftarrow \qquad \xleftarrow{\varphi-\lambda_0 id} u_k$$

Lemma: Vektory řetězce $u_1, u_2, \dots, u_k$ jsou lineárně nezávislé!

Důkaz indukcí podle k – později.

Souvislost s Jord. buňkami

$$\varphi : U \to U \qquad V \subseteq U$$

$V = [u_1 \dots u_k]$ $\quad u_1, u_2, \dots u_k$ je řetězec pro vlastní číslo λ_0.

V je inv. podprostor $\qquad \varphi(u_1) = \lambda_0 u_1 \in V$

$$\varphi(u_2) = \lambda_0 u_2 + u_1 \in V$$
$$\varphi(u_3) = \lambda_0 u_3 + u_2 \in V$$
$$\cdots$$

$$\varphi/V : V \longrightarrow V$$

$\alpha = (u_1, u_2, \ldots u_k)$ je báze V!

$$(\varphi/V)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & & \lambda_0 \end{pmatrix} = J_k(\lambda_0)$$

Věta o Jord. kan. tvaru

Nechť U je vekt. prostor dimenze n nad $\mathbb{K}$. Nechť $\varphi : U \to U$ je lin. operátor takový, že součet alg. násobností jeho vl. čísel je n. Potom v U existuje báze α taková, že

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = J$$

je matice v JKT. Tento JKT je určen jednoznačně až na pořadí buněk.

Poznámka 1: Báze α NENÍ určena jednoznačně.

Poznámka 2 Báze α je tvořena posloupností různých řetězců operátoru φ.

Pro které operátory věta neplatí?

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \varphi(x) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$\alpha \in (0, \pi)$ φ nemá v $\mathbb{R}$ vlastní čísla. Součet alg. násob. je $0 < 2$.

Tedy pro toto zobrazení závěr věty neplatí.

Dodatek ke větě: Nad $\mathbb{C}$ má každý polynom stupně $n \geq 1$ právě n kořenů (včetně násobností).

Proto Jordanova věta platí pro všechny operátory na komplexních prostorech.

Věta o JKT – maticová verze

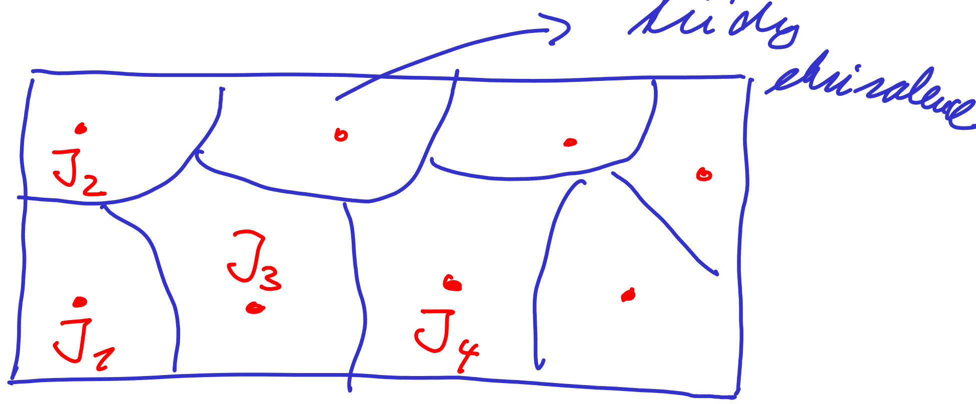
Nechť $A \in Mat_{n \times n}(\mathbb{K})$, jejíž char. polynom má n kořenů včetně násobnosti. Pak je matice A podobná matici J v JKT, tj. existuje regulární matice P taková, že

$$J = P^{-1} A P.$$

Matice J je určena jednoznačně až na pořadí buněk.

$Mat_{n \times n}(\mathbb{C})$

relace podobnosti matic je ekvivalence



Kritérium ekvivalence: Dvě komplexní matice A, B typu $n \times n$ jsou podobné, právě když mají stejný Jord. kan. tvar (až na pořadí buněk).

Obě verze Jord. věty jsou ekvivalentní.

Dokážeme: verze pro operátor

$\Rightarrow$ maticová verze

Nechť $A \in Mat_{n \times n}(\mathbb{K})$. Uvažujme operátor $\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, $\varphi(x) = AX$.

A splňuje předp. maticové verze
$\Rightarrow$ φ splňuje předp. verze pro operátory.

Podle verze pro operátory existuje báze α taková, že

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = J \quad \text{matice v JKT.}$$

$$J = (\varphi)_{\alpha,\alpha} = (id)_{\alpha,\varepsilon_n} (\varphi)_{\varepsilon_n,\varepsilon_n} \cdot (id)_{\varepsilon_n,\alpha}$$

$$= P^{-1} \quad A \cdot \quad P$$

$P = (id)_{\varepsilon_n, \alpha}$

PŘÍKLADY

Příklad 1a

$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \ \varphi(x) = Ax$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 \\ -4 & -9 & -6 \\ 6 & 15 & 10 \end{pmatrix}$$

Najděte JKT matice A a matici P tak, že $J = P^{-1}AP$.

Char. polynom je

$$\det(A - \lambda E) = (2-\lambda)(1-\lambda)^2$$

Vl. čísla $\lambda_1 = 2$ vl. vektor $v_1 = (1,-2,3)^T$

$\lambda_2 = 1$ alg. nás. 2

geom. nás. 2

$\to v_2 = (3,6,-8)^T$

$v_3 = (1,-1,1)^T$

Vektory v_1, v_2, v_3 tvoří bázi α

$\varphi(v_1) = 2v_1$

$\varphi(v_2) = v_2$

$\varphi(v_3) = v_3$

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = J$$

$$J = (\varphi)_{\alpha,\alpha} = (id)_{\alpha, \varepsilon_3} (\varphi)_{\varepsilon_3, \varepsilon_3} \cdot (id)_{\varepsilon_3, \alpha}$$

$$= P^{-1} \quad A \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 6 & -1 \\ 3 & -8 & 1 \end{pmatrix}$$

Příklad 1b

$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \varphi(x) = Ax$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det(A - \lambda E) = (2-\lambda)(\lambda-1)^2$$

Vl. čísla $\lambda_1 = 2$ vl. vektor $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 1$ alg. násob. 2
geom. nás 1
vl. vektor při $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Hledáme řetězec k vl. číslu 1 délky 2

$$\vec{o} \xleftarrow{A-E} \underset{\displaystyle\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\overset{v_2}{\parallel}} \xleftarrow{A-E} v_3$$

Řešíme rovnici

$$(A-E)\, v_3 = v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Má více řešení. Vezmeme jedno

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

$$(A-E)\begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$x_3 = -\frac{1}{2}$$
$$x_2 = \frac{1}{2}$$
$$x_1 = 0$$

$$x_1 + x_2 + \frac{1}{2} = 1$$
$$0 \quad \frac{1}{2}$$

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \qquad \alpha = (\underbrace{v_1}_{\text{řetězec pro 2 délky 1}}, \underbrace{v_2, v_3}_{\text{řetězec pro 1 délky 2}})$$

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = J$$

$$\varphi(v_1) = 2v_1 \qquad \varphi(v_2) = v_2$$

$$\varphi(v_3) = 1\cdot v_3 + v_2$$

$$J = (\varphi)_{\alpha,\alpha} = P^{-1} A \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}}_{= P}$$

13:12 2. část

PRAVIDLO 1

JKT matice A má diagonále vlastní čísla matice, každé tolikrát kolikrát činí jeho alg. násobnost.

$$\det(J - \lambda E) = \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda & & \\ & \lambda_1 - \lambda & \\ & O & \ddots \end{pmatrix} = \det(A - \lambda E)$$

$$(\lambda_1 - \lambda)^k \qquad (\lambda_1 - \lambda)^k$$

PRAVIDLO 2

V JKT matice A je počet Jordanových buněk pro vlastní číslo λ_0 roven geom. násob. vl. čísla λ_0

Jord. buňky korespondují s řetězci na začátku každého řetězce stojí vl. vektor, a ty jsou lin. nezávislé.

Tyto dvě pravidla dávají klasifikaci JKT pro matice 2×2 a 3×3

Pro matice 3×3

(1) Matice má 3 různá vl. čísla

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

(2A) Matice má 2 různé vl. vektory

λ_1 alg. nás. 1

λ_2 alg. nás 2 geom. nás 2

$$J = \left(\begin{array}{c|c|c} \lambda_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \lambda_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \lambda_2 \end{array}\right)$$

(2B) Matice má 2 různá vl. čísla

λ_1 alg. nás 1

λ_2 alg. nás 2, geom. nás 1

$$J = \left(\begin{array}{c|cc} \lambda_1 & & \\ \hline & \lambda_2 & 1 \\ & 0 & \lambda_2 \end{array}\right)$$

(3A) Matice má jediné vl. číslo
alg. nás. 3
geom. nás. 3

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_1 & \\ & & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

(3B) geom. nás. 2

$$J = \left(\begin{array}{c|cc} \lambda_1 & & \\ \hline & \lambda_1 & 1 \\ & 0 & \lambda_1 \end{array}\right)$$

(3C) geom. nás. 1

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

Ještě je potřeba najít matici P

$$J = P^{-1}AP.$$

<u>Příklad 2</u> $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad \varphi(x) = Ax$

$$A = \begin{pmatrix} 13 & -28 & 3 \\ 4 & -8 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det(A-\lambda E) = (2-\lambda)^3$$

$\lambda_1 = 2$ alg. násl. 3, geom. násl. 1

Vlastní vektor $u_1 = (2,1,2)^T$.

Musíme najít řetězec délky 3.

$$(A-2E)u_2 = u_1 \qquad \boxed{(A-2E)u_1 = 0}$$

$$(A-2E)u_3 = u_2$$

Jedno z možných řešení je

$$u_2 = (5,2,1)^T, \quad u_3 = (3,1,0)^T$$

$$\alpha = (u_1, u_2, u_3) \qquad (id)_{\varepsilon_3, \alpha} = P$$

$$J = (\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = P^{-1} A \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>Příklad 3</u> $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad \varphi(x) = Ax$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \qquad \det(A-\lambda E) = (2-\lambda)^3$$

$\lambda_1 = 2$ alg. nás. 3 geom. nás. 2

$$u = (2,-1,0)^T \qquad v = (0,0,1)^T$$

Víme, že JKT $=$ $J = \left(\begin{array}{c|cc} 2 & & \\ \hline & 2 & 1 \\ & 0 & 2 \end{array}\right)$

Chceme bázi α $(\varphi)_{\alpha,\alpha} = J$.

α se skládá ze dvou řetězců, jeden délky 1 a druhý délky 2.

Řetězec délky 2 začíná vl. vektorem

$$au + bv$$

Kterým a místo ? Řešíme soustavu

$$(A-2E)\,w = au+bv\,.$$

Matice soustavy je

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 0 & 2a \\ -1 & -2 & 0 & -a \\ -2 & -4 & 0 & b \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & a \\ -1 & -2 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 & b+2a \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{array}{c} au+bv \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b+2a \end{array}\right) \end{array}$$

má řešení pouze pro $b+2a=0$

Proto zvolme $a = 1$, $b = -2$
a spočítáme soustavu

$$(A - 2E)\, w = u - 2v$$

Matice $\quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$

Možné řešení je

$$w = (-1, 1, 0)^T$$

$$\vec{o} \xleftarrow{A-2E} u - 2v \xleftarrow{A-2E} w$$

řetězec délky 2

$$\vec{o} \xleftarrow{A-2E} u$$

řetězec délky 1

takový, že u a $u - 2v$ jsou LN vlastní vektory.

$$\alpha = (u,\ u - 2v,\ w)$$

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = J = (id)_{\alpha,\varepsilon_3}\, A\, (id)_{\varepsilon_3,\alpha}$$

$$(id)_{\varepsilon_3,\alpha} = P = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} u & u-2v & w \end{array} \end{array}$$

Matice 4×4 JKT již nelze najít jenom pomocí alg. a geom. násobností vl. čísel (v některých případech)

Pro vl. číslo λ_1 alg. nás. 4
a geom. nás. 2

máme 2 možnosti:

$$J = \left(\begin{array}{cc|cc} \lambda_1 & 1 & & \\ 0 & \lambda_1 & & \\ \hline & & \lambda_1 & 1 \\ & & 0 & \lambda_1 \end{array}\right) \text{ nebo } \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & 1 & 0 & \\ 0 & \lambda_1 & 1 & \\ 0 & 0 & \lambda_1 & \\ \hline & & & \lambda_1 \end{array}\right)$$

<u>Příklad 4</u> $\varphi: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 \quad \varphi(x) = AX$

$$A = \begin{pmatrix} -13 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -30 & 12 & 9 & 5 \\ -12 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \det(A - \lambda E) = (1+\lambda)^4$$

$\lambda_1 = -1$ alg. nás. 4, geom. nás. 2

Vlastní vektory $au + bv$

$$u = (1,0,3,0)^T \qquad v = (0,0,1,-2)^T$$

Hledáme řetězce

1. pár dva délky 2 (lin. nez.)
2. Je řetězec délky 3.

$$A + E = au + bv$$

$$\left(\begin{array}{c|c} A+E & \begin{matrix} a \\ 0 \\ 3a+b \\ -2b \end{matrix} \end{array}\right) \sim \text{schod. tvar}$$

a zjistíme, že soustava má řešení pro všechna a, b.

Řetězec délky 2 může začínat od jakéhokoliv vlastního vektoru

$$(A+E)u_1 = u \qquad (A+E)v_1 = v$$

$$0 \leftarrow u \xleftarrow{A+E} u_1 \qquad 0 \leftarrow v \xleftarrow{A+E} v_1$$

$$u_1 = (0,-1,0,3)^T \qquad v_1 = (0,-2,0,5)^T$$

$$\alpha = (\underbrace{u, u_1}, \underbrace{v, v_1})$$

$$(\varphi)_{\alpha\alpha} = \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) = J$$

$$= P^{-1} A \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}}_{= P}$$

Kontrola správnosti bez počítání matice P:

$$J = P^{-1} A P \quad / \, P \cdot$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{P \cdot J} = \underline{A \cdot P}$$

Příklad 5

$\varphi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4 \quad \varphi(x) = Ax$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & -3 \\ 6 & 9 & 4 & -8 \\ -3 & -4 & -1 & 4 \\ 9 & 9 & 6 & -8 \end{pmatrix} \qquad \det(A - \lambda E) = (1-\lambda)^4$$

Vl. číslo $\lambda_1 = 1$ alg. násob. 4 geom. násob. 2

Vl. vektory $au + bv$

$$u = (0,1,0,1)^T \qquad v = (-2,0,3,0)^T$$

Řešíme rovnici

$$(A - E)w = au + bv$$

Matice soustavy je

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & -3 & -2b \\ 6 & 8 & 4 & -8 & a \\ -3 & -4 & -2 & 4 & 3b \\ 9 & 9 & 6 & -9 & a \end{array}\right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & -3 & -2b \\ 0 & 1 & 0 & -1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+6b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+6b \end{array}\right)$$

Soustava má řešení pouze pro $a+6b=0$

$\Rightarrow$ zjistil, že nebudou 2 řetězce délky 2 (lin. nezávislé), ale že bude jeden řetězec délky 3.

$b = 1, \quad a = -6$

$$-6u + v = (-2,-6,3,-6)^T$$

je začátek řetězce délky 3.

$$(A-E)w = -6u + v$$

Nyní musíme najít VŠECHNA řešení, protože chceme v řetězci pokračovat.

$$w = \left(\frac{1}{3}, -1, 0, 0\right) + a_1 u + b_1 v$$

Řešíme $(A-E)z = w$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & -3 & \frac{1}{3} - 2b_1 \\ 6 & 8 & 4 & -8 & -1 + a_1 \\ -3 & -4 & -2 & 4 & 3b_1 \\ 9 & 9 & 6 & -9 & a_1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} & & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1+a_1+6b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1+a_1+6b_1 \end{array}\right)$$

Má řešení právě když

$$-1 + a_1 + 6b_1 = 0$$

např. $a_1 = 1, \ b_1 = 0$

$$w = \left(\frac{1}{3}, 0, 0, 1\right)^T$$

$$z = \left(0, 0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)^T$$

Řetězec délky 3

$$\vec{o} \xleftarrow{A-E} -6u+v \longleftarrow w = \left(\tfrac{1}{3}, 0, 0, 1\right)^T$$

$$\uparrow$$

$$z = \left(0, 0, \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}\right)^T$$

Řetězec délky 1

$\vec{o} \xleftarrow{A-E} u$ (lin. nez. s $-6u+v$)

$$\alpha = (-6u+v, w, z, u)$$

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 & \\ \hline & & & 1 \end{array}\right) = J$$

$$= P^{-1} A \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 1/3 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}}_{=P}.$$