12. přednáška : DETERMINANT A JORDANŮV KAN. TVAR

① DETERMINANT MATICE

V 1. semestru jsme definovali determinant jako zobrazení

$$\det : \mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K},$$

které splňuje několik vlastností.

Nyní si řekneme jeho abstraktní definici. K ní je potřeba vědět něco o grupě permutací a o znaménku permutace. Mnozí z vás to již znáte z přednášky Algebra I.

Stručná rekapitulace:

Grupa je neprázdná množina G s operací násobení $\cdot : G \times G \longrightarrow G$, která má tyto vlastnosti:

(1) $\forall a, b, c \in G \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ asociativita

(2) $\exists e \in G \ \forall a \in G : \quad a \cdot e = e \cdot a = a$ jedn. prvek

(3) $\forall a \in G \ \exists a^{-1} \in G : \quad a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$ inv. prvek

Příklady

① $G = \mathbb{K} \setminus \{0\}$ s operací násobení

② Vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ s operací sčítání vektorů

③ $G = \mathbb{Z}$ s operací sčítání

(4) $G = GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K}),\ \det A \neq 0\}$
s operací násobení matic

(5) $G = O(n) = \{A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R}),\ A\cdot A^T = E\}$
množina ortogonálních matic $n\times n$
s operací násobení.

(6) $G = U(n) = \{A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{C}),\ A\cdot A^* = E\}$
množina unitárních matic $n\times n$
s operací násobení matic

(7) $G = S_n$ množina permutací množiny
$\{1, 2, \dots n\}$ s operací skládání permutací.

Permutace n-prvkové množiny je bijektivní (prosté a na) zobrazení množiny $\{1, 2, \dots n\}$ na sebe samou.

$$\pi : \{1, 2, 3, \dots n\} \longrightarrow \{1, 2, 3, \dots, n\}$$

Zadat lze permutaci tabulkou

i	1	2	3	4	5	6
$\pi(i)$	2	4	6	1	3	5

Skládání permutací je skládání zobrazení:

i	1	2	3	4
π	2	3	1	4

j	1	2	3	4
σ	3	4	1	2

i	1	2	3	4
$\sigma \circ \pi$	4	1	3	2

Homomorfismus grup: Zobrazení $f: G \to H$ mezi dvěma grupami G a H se nazývá homomorfismus grup, jestliže platí

$$\forall a, b \in G \qquad f(a \circ b) = f(a) \cdot f(b)$$

Z této vlastnosti již plyne, že

$$f(e_G) = f(e_H)$$

a

$$f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$$

tj.
f zobrazuje jednotkový prvek na jednotkový a inverzní na inverzi obrazu.

Příklady

① $\det : GL(n, \mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K} \setminus \{0\}$
je homomorfismus grup, neboť platí

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

② Každé lineární zobrazení $f: U \to V$ vektorových prostorů nad $\mathbb{K}$ je homomorfismus grup $(U, +)$ a $(V, +)$, neboť platí

$$\forall u, v \in U \qquad f(u + v) = f(u) + f(v).$$

Znaménko permutace: je zobrazení z množiny S_n všech permutací množiny $\{1,2,\dots n\}$ do množiny $\{1,-1\}$ definované takto

$$\operatorname{sign}(\pi) = \prod_{1\le i<j\le n} \frac{j-i}{\pi(j)-\pi(i)}$$

Nechť π:

i	1	2	3	4
$\pi(i)$	2	4	3	1

Pak

$$\operatorname{sign}\pi = \frac{(2-1)(3-1)(3-2)(4-1)(4-2)(4-3)}{(4-2)(3-2)(3-4)\underline{(1-2)}\,\underline{(1-4)}\,\underline{(1-3)}}$$

V čitateli jsou všechny činitele kladné, ve jmenovateli je opět všechny najdeme, ale někdy s opačným znaménkem!
V našem příkladu je počet takových členů 3, proto

$$\operatorname{sign}\pi = (-1)^3 = -1.$$

Dvojice čísel (i,j), kde $i<j$, ale $\pi(i)>\pi(j)$ se nazývá **transverze** permutace π.
Praktický výpočet znaménka permutace π je

$$\operatorname{sign}\pi = (-1)^{\text{počet transverzí}}$$

Lemma: Znaménko permutace $\operatorname{sign}: S^n \to \{1,-1\}$ je homomorfismus grup, neboť platí

$$\operatorname{sign}(\tau\circ\pi) = \operatorname{sign}(\tau)\cdot\operatorname{sign}(\pi).$$

Grupu $\{1,-1\}$ bereme s operací násobení.

Transpozice je permutace, která přehazuje dvě čísla i a j. Označujeme (i,j).

$\tau=(3,5)$:

i	1	2	3	4	5	6
$\tau(i)$	1	2	5	4	3	6

Platí, že znaménka transpozice je vždy -1. Počet inverzí u permutace (i,j) je totiž lichý:

$$(i-j)+(i-j-1) = 2(i-j)-1$$

Standardní definice determinantu

Nechť A je matice $n\times n$ nad $\mathbb{K}$. Definujeme

$$\det A = \sum_{\tau\in S_n} (\operatorname{sign}\tau)\, a_{1\tau(1)}\, a_{2\tau(2)} \cdots a_{n\tau(n)}$$

Součet je přes všechny permutace množiny $\{1,2,\dots n\}$, těch je $n!$ Dále

$$a_{i\tau(i)}$$

je prvek matice A v i-tém řádku a sloupci $\tau(i)$. V součinu jsou čísla ze všech řádků a ze všech sloupců.

Ukážeme si jednu z vlastností determinantu

<u>Lemma</u>: Nechť matice B vznikne z matice A výměnou r-tého a s-tého řádku. Pak

$$\det B = -\det A .$$

<u>Důkaz</u> provedeme pro $r=1$, $s=2$. $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$

$$\det B = \sum_{\tau \in S_n} \operatorname{sign}\tau \; b_{1\tau(1)} b_{2\tau(2)} b_{3\tau(3)} \cdots b_{n\tau(n)}$$

$$= \sum_{\tau\in S^n} \operatorname{sign}\tau \; a_{2\tau(1)} a_{1\tau(2)} a_{3\tau(3)} \cdots a_{n\tau(n)}$$

$$= \sum_{\tau\in S^n} \operatorname{sign}\tau \; a_{2\,\underbrace{\tau\circ(1,2)}(2)} a_{1\,\tau\circ(1,2)(1)} a_{3\,\tau\circ(1,2)(3)} \cdots$$

složení permutace τ a transpozice $(1,2)$

$$= \sum_{\tau\in S^n} \operatorname{sing}\tau \; a_{1\,\underbrace{\tau\circ(1,2)}(1)} a_{2\,\tau\circ(1,2)(2)} a_{3\,\tau\circ(1,2)(3)} \cdots$$

$\tau\circ(1,2)=\pi \qquad \tau=\pi\circ(1,2)$

jestliže τ probíhá S_n, pak $\pi=\tau\circ(1,2)$ probíhá S_n

$$= \sum_{\pi\in S^n} \underbrace{\operatorname{sign}(\pi\circ(1,2))}_{\operatorname{sign}\pi\,\cdot\,\operatorname{sign}(1,2)} a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \cdots a_{n\pi(n)}$$

$$= (-1) \sum_{\pi\in S^n} \operatorname{sign}\pi \; a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \cdots a_{n\pi(n)}$$

$$= (-1) \det A .$$

Důkaz dalších vlastností determinantu, které jsme si psali na základě definice v 1. semestru je podobný (a spíše jednodušší!).

APLIKACE JORDANOVA KANONICKÉHO TVARU

Připomeňme maticovou verzi: Je-li A matice $n \times n$ nad $\mathbb{K}$, která má n vlastních čísel včetně násobností, pak je podobná matici J v JKT, tj. existuje regulární matice P taková, že

$$J = P^{-1} A P .$$

Počítání vysokých mocnin matice A

Pro reálná i komplexní čísla platí binomická věta

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n$$

Tato věta obecně NEPLATÍ pro matice $n \times n$, $n \geq 2$. Důvodem je, že matice obecně nekomutují:

$$(A+B)^2 = (A+B)\cdot(A+B) = A \cdot A + A \cdot B + B \cdot A + B \cdot B$$
$$= A^2 + A \cdot B + B \cdot A + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2 .$$

Jestliže však $A \cdot B = B \cdot A$, pak binomická věta platí

$$(A+B) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} A^{n-i} B^i .$$

Nechť matice A má JKT J. Pišme

$$A = P J P^{-1}.$$

Potom

$$A^n = (PJ\underbrace{P^{-1})(P}_{E}J\underbrace{P^{-1})(P}_{E}JP^{-1}) \dots \underbrace{(P}_{E}JP^{-1})$$

$$= P J^n P^{-1}.$$

Známe-li matici P stačí k výpočtu A^n spočítat

$$J^n.$$

Udělejme to nejprve pro Jordanovu buňku

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & & 0 \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & \lambda \end{pmatrix} = \lambda E_k + D_k$$

kde E_k je jednotková matice $k \times k$

a $D_k = J_k(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & 0 \\ & & & & \\ & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$

Vidíme, že

① $(\lambda E_k)^n = \lambda^n E_k$

② $D_k^2, D_k^3, \dots D_k^{k-1}$ jsou matice, kde diagonála z jedniček se postupně posunuje vpravo, tj

$$D_k^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & 0 & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & & 1 \\ & & 0 & & & & 0 \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix} \qquad D_k^{k-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 \\ & & 0 & & \end{pmatrix}$$

a

$$D^k = D^{k+1} = \dots = D^n = \dots = 0 \quad \text{pro } n \geq k.$$

③ Protože $E_k \cdot D_k = D_k \cdot E_k$, můžeme použít binomickou větu:

$$J_k^n(\lambda) = (\lambda E_k + D_k)^n =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \lambda^{n-i} E_k \cdot D_k^i$$

$$= \sum_{i=1}^{k-1} \binom{n}{i} \lambda^{n-i} E_k D_k^i$$

$$= \lambda^n E + \binom{n}{1} \lambda^{n-1} D_k^2 + \binom{n}{2} \lambda^{n-3} D_k^3$$

$$+ \dots + \binom{n}{k-1} \lambda^{n-k+1} D_k^{k-1}$$

Pro každé n má součet pouze k členů!

Je-li matice J blokově diagonální s Jordanovými buňkami na diagonále, počítáme J^n „blokově diagonálně", tj

$$J^n = \begin{pmatrix} J_{k_1}^n(\lambda_1) & & & 0 \\ & J_{k_2}^n(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_{k_s}^n(\lambda_s) \end{pmatrix}$$

Tedy, známe-li matici J, známe všechny její n-té mocniny a rovněž víme, že

$$A^n = P\, J^n P^{-1} .$$

EXPONENCIÁLA z matice

Můžeme definovat, že pro čtvercovou matici A typu $n \times n$ je e^A rovněž čtvercová matice $n \times n$ taková, že

$$e^A = E + A + \frac{1}{2!} A^2 + \frac{1}{3!} A^3 + \dots$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A^i}{i!}$$

Lze ukázat, že pro každý prvek v r-tém řádku a s-tém sloupci $(e^A)_{r,s}$ příslušná řada absolutně konverguje.

Jestliže matice A a B komutují, pak

$$e^{(A+B)} = e^{A} \cdot e^{B},$$

obecně to neplatí. Je to důsledek binomické věty. Proto pro Jordanovu buňku $J_k(\lambda)$ platí

$$e^{J_k(\lambda)} = e^{(\lambda E_k + D_k)} = e^{\lambda E_k} \cdot e^{D_k}$$

Souvislost se soustavami lineárních diferenc. rovnic

Víme, že rovnice $x' = ax$, $x(0) = x_0$ pro funkci $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má řešení

$$x(t) = e^{at} x_0$$

Soustavu lin. dif. rovnic s konstantními koeficienty

$$\begin{aligned}
x_1' &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \\
x_2' &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n \\
&\dots \\
x_n' &= a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nn} x_n
\end{aligned}$$

pro neznámé funkce $x_1, x_2, \dots x_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ můžeme psát maticově

$$x'(t) = A \cdot x(t), \quad x(0) = x_0$$

s maticí $A \in Mat_{n \times n}(\mathbb{R})$ a neznámou funkcí

$$x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \ (\text{nebo } \mathbb{C}^n), \quad x_0 \in \mathbb{R}^n \ (\mathbb{C}^n)$$

Ukazuje se, že stejně jako v případě $n = 1$ je řešení této soustavy určeno exponenciálou

$$x(t) = e^{At} \cdot x_0 = \left(E + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \frac{A^3t^3}{3!} + \dots\right) x_0$$

Tato řada dokonce konverguje stejnoměrně a my ji můžeme derivovat člen po členu:

$$\begin{aligned}(e^{At})' &= E' + (At)' + \left(\frac{A^2t^2}{2!}\right)' + \left(\frac{A^3t^3}{3!}\right)' + \dots \\ &= 0 + A + A^2t + A^3\frac{t^2}{2!} + \dots \\ &= A\left(E + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \dots\right) = A\,e^{At}\end{aligned}$$

Pro Jordanovu buňku lze snadno spočítat:

$$\begin{aligned}e^{J_k(\lambda)t} &= e^{(\lambda t E_k + tD_k)} = e^{\lambda t E_k} \cdot e^{tD_k} \\ &= e^{\lambda t} E_k \cdot e^{tD_k} = \\ &= e^{\lambda t} \cdot \left(E_k + tD_k + \frac{t^2D_k^2}{2!} + \dots + \frac{t^{k-1}D_k^{k-1}}{(k-1)!}\right)\end{aligned}$$

což je KONEČNÁ ŘADA!

Totéž platí pro každou matici J v JKT!

Soustavu $y'(t) = Jy(t) \quad y(0) = y_0$

tedy umíme spočítat pomocí konečného součtu. Nechť

$$A = PJP^{-1}.$$

Pak soustava

$$x'(t) = Ax(t) \qquad x(0) = Py_0$$

má řešení

$$x(t) = Py(t)$$

neboť

$$x'(t) = Py'(t) = PJy(t) = PJP^{-1}x(t) = Ax(t)$$

Tedy soustavu
$$x'(t) = Ax(t)$$
$$x(0) = x_0$$
spočítáme opět pomocí konečného součtu

$$x(t) = Py(t),$$

kde y je řešení soustavy

$$y'(t) = Jy(t)$$
$$y(0) = P^{-1}x_0 .$$