13. přednáška: Důkaz věty o JKT

K minulé přednášce:

Podobné matice $\underline{A} = P\underline{B}P^{-1}$

Mocniny jsou rovněž podobné

$$\underline{A}^n = (PBP^{-1})^n = PB\underbrace{P^{-1}P}BP^{-1}\dots$$
$$= P\underline{B}^nP^{-1}$$

Exponenciály e^A, e^B jsou opět podobné

$$e^A = Pe^BP^{-1}$$

Důvod: e^A definována pomocí mocninné řady

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = \sum \frac{(PBP^{-1})^n}{n!} =$$
$$= \sum \frac{PB^nP^{-1}}{n!} = P\left(\sum \frac{B^n}{n!}\right)P^{-1}$$
$$= Pe^BP^{-1}.$$

$x'(t) = Ax(t) \qquad x(0) = x_0 \qquad A = P\underline{J}P^{-1}$

$$\boxed{x(t) = \underline{e^{At}x_0} = \underline{Pe^{Jt}P^{-1}x_0}}$$

K e^{Jt} stačí funkce $e^{\lambda_i t}$ a konečný součet matic.

Věta o JKT Nechť $\varphi : U \to U$ je lin. operátor, takový, že součet alg. násobností jako vlastních čísel se rovná $\dim U$. Pak v U existuje báze α taková, že

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = J$$

je matice v JKT. Tento tvar, až na seřazení buněk, nezávisí na výběru báze α.

Odkaz – studijní materiály v ISu

Slesář, LA, kap. 5

Ivana Bácnová: LA pro pokročilé

Nové pojmy

① Kořenový podprostor vl. čísla λ operátoru $\varphi : U \to U$ (kořen – root)

$$R_\lambda = \{ u \in U, \exists k \in N, (\varphi - \lambda id)^k (u) = \vec{o} \}$$

speciálně $\mathrm{Ker}(\varphi - \lambda id) \subseteq R_\lambda$.

② Nilpotentní operátor $\psi : V \to V$ takový, že existuje k

$$\psi^k = 0.$$

Příklad kořenových podprostorů

$\varphi : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^7 \qquad \varphi(x) = Jx, \qquad \lambda_1 \neq \lambda_2$

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & & & & \\ 0 & \lambda_1 & 1 & & & & \\ 0 & 0 & \lambda_1 & & & & \\ & & & \boxed{\lambda_1} & & & \\ & & & & \lambda_2 & 1 & \\ & & & & 0 & \lambda_2 & \\ & & & & & & \boxed{\lambda_2} \end{pmatrix}$$

$R_{\lambda_1} = [e_1, e_4, e_2, e_3]$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}^3 = \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$J - \lambda_1 E = \begin{matrix} 0 & 1 & & & & & \\ & 0 & 1 & & & & \\ & & 0 & & & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & & \lambda_2-\lambda_1 & 1 & \\ & & & & 0 & \lambda_2-\lambda_1 & \\ & & & & & & \lambda_2-\lambda_1 \end{matrix}$$

$(J - \lambda_1 E)^2 e_2 = \vec{o}$

$$(J - \lambda_1 E)^2 = \begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$(J - \lambda_1 E)^3 = \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \qquad (J - \lambda_1 E)^3 e_3 = 0$$

$R_{\lambda_2} = [e_5, e_6, e_7]$

$\mathbb{R}^7 = R_{\lambda_1} \oplus R_{\lambda_2}$

Vlastnosti kořenových podprostorů

① R_λ je vekt. podprostor, $\ker(\varphi - \lambda\, id) \subseteq R_\lambda$

② R_λ je invariantní vůči každému lin. operátoru, který komutuje s φ.
speciálně je invariantní vůči
$$\varphi - \mu\, id$$

③ Je-li $\lambda \neq \mu$, pak
$$\varphi - \mu\, id / _{R_\lambda} : R_\lambda \to R_\lambda$$
je izomorfismus.

④ $\varphi - \lambda\, id / R_\lambda : R_\lambda \to R_\lambda$ je nilpotentní, tj. existuje k
$$(\varphi - \lambda\, id)^k / R_\lambda = 0.$$

② $v \in R_\lambda$, $\psi \circ \varphi = \varphi \circ \psi$

$\exists k \quad (\varphi - \lambda\, id)^k (v) = 0$

Ukážeme, že $\psi(v) \in R_\lambda$.

$$(\varphi - \lambda\, id)^k \underline{\psi(v)} = (\varphi - \lambda\, id) \circ (\varphi - \lambda\, id) \cdots \circ \psi(v)$$
$$= \psi\, (\varphi - \lambda\, id)^k (v) = \psi(\vec{o}) = \vec{o}$$

(3) Trochu technická $\varphi - \lambda id/_{R_\lambda} \; R_\lambda \to R_\lambda$ je izo

(4) R_λ je konečně dim., je generován

$v_1, v_2, \dots v_s$

$$(\varphi - \lambda id)^{k_i}(v_i) = \vec{o}$$

$$k = \max(k_1, k_2, \dots k_s)$$

$$(\varphi - \lambda id)^{k}(v_i) = \vec{o}$$

$$v \in R_\lambda \qquad v = \sum a_i v_i$$

$$(\varphi - \lambda id)^{k}(v) = (\varphi - \lambda id)^{k}\left(\sum a_i v_i\right)$$

$$= \sum a_i ((\varphi - \lambda id)^{k} v_i = \sum a_i \cdot \vec{o} = \vec{o}$$

$$(\varphi - \lambda id)^{k} / R_\lambda = 0.$$

Důkaz věty o JKT: má 2 kroky

$\boxed{\text{1. krok}}$

Věta: Za předpokladů Jordanovy věty platí

$$U = R_{\lambda_1} \oplus R_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus R_{\lambda_k}$$

a $\dim R_{\lambda_i} =$ alg. násob. λ_i

Součet více podprostorů $\quad V_i \subseteq U$

$$V_1 + V_2 + \dots + V_s = \{ v_1 + v_2 + \dots + v_s \in U, \; v_i \in V_i \}$$

Součet je direktní, jestliže platí $\forall v_i \in V_i$

$$[\, v_1 + v_2 + \dots + v_s = \vec{0} \Rightarrow v_1 = v_2 = \dots = v_s = \vec{0}$$

(není to ekvivalentní s tím, že
$V_i \cap V_j = 0$ pro různá i a j)

Je to ekvivalentní s tím, že

$$V_1 \cap (V_2 + V_3 + \dots + V_s) = 0$$
$$V_2 \cap (V_1 + V_3 + \dots V_s) = 0$$
$$\vdots$$

Definice znamená, že platí

$$\forall v \in V_1 + V_2 \dots + V_s \;\; \exists!\, v_1, v_2, \dots v_s \in V_1 + V_2 \dots$$
$$v = v_1 + v_2 + \dots + v_s$$

Důkaz věty (A) součet je direktní indukcí podle počtu k = počet konečn. podprostorů

$k = 1$ $\quad$ zřejmé $\quad$ R_{r_1}

Nechť součet $R_{\lambda_1} + R_{\lambda_2} + \dots + R_{\lambda_{k-1}}$ je direktní. A nazveme $v_i \in R_{\lambda_i}$ $1 \le i \le k$

$$(*) \quad v_1 + v_2 + \dots + v_k = \vec{0}$$

Na tuto rovnici aplikujeme operátor $(\varphi - \lambda_k id)^r$

kde r je takové, že $(\varphi - \lambda_k id)^r (v_k) = \vec{0}$

$$\underbrace{(\varphi - \lambda_k id)^r v_1}_{u_1 \in R_{\lambda_1}} + \underbrace{(\varphi - \lambda_k id)^r v_2}_{u_2 \in R_{\lambda_2}} + \dots + \underbrace{(\varphi - \lambda_k id)^r (v_{k-1})}_{u_{k-1} \in R_{\lambda_{k-1}}} + \vec{0} = \vec{0}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ R_{\lambda_1}}}{u_1} + u_2 + \dots + \underset{\substack{\uparrow \\ R_{\lambda_{k-1}}}}{u_{k-1}} = \vec{0}$$

Podle ind. předpokladu

$$u_1 = u_2 = \dots = u_{k-1} = \vec{0}$$

$\varphi - \lambda_k id$ na R_{λ_1}, na R_{λ_2}, ..., na $R_{\lambda_{k-1}}$ je izomorfismus

$$(\varphi - \lambda_k id)^r v_i = u_i = \vec{0}$$

$$\Rightarrow v_i = \vec{0}$$

$v_1 = v_2 = \dots = v_{k-1} = \vec{0}$ Dosazením do $(*)$ dostaneme $v_k = \vec{0}$.

(B) Dokažeme, že součet $R_{\lambda_1}+R_{\lambda_2}+\dots+R_{\lambda_k}=U$

Pomocná věta

Za předpokladů Jordanovy věty existuje v U báze B taková, že

$$(\varphi)_{B,B} = \begin{pmatrix} \lambda_{i_1} & & & & * \\ & \lambda_{i_1} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_{i_k} & \\ 0 & & & & \lambda_{i_k} \end{pmatrix}$$

Důkaz je založen na pojmu faktorového prostoru

Algebra

G grupa, H normální podgrupa

G/H fakt. grupa

3. semestr.

U vekt. prostor $\quad V \subseteq U$ podprostor

$$U/V = \{ u+V \,,\ u \in U \}$$

$u+V = \{ u+v \in U,\ v \in V,\ u$ je pevné $\}$

U/V je vekt. prostor $\qquad u_1+V = v_1+V$

$$(u_1+V)+(u_2+V) \underset{def}{=} (u_1+u_2)+V$$

$$a(u+V) \underset{def}{=} au+V$$

$\varphi : U \to U$, $V \subseteq U$ je invariantní podprostor

$$\varphi(V) \subseteq V$$

$$\tilde{\varphi} : U/V \to U/V$$

$$\tilde{\varphi}(u+V) = \varphi(u) + V$$

je lin. operátor.

Pomocí těchto dvou pojmů se udělá důkaz zmíněné věty.

12:57

Dokažme, že $R_{\lambda_1} + R_{\lambda_2} + \dots + R_{\lambda_k} = U$.

$$B = (v_1, v_2, \dots, v_n)$$

$$(\varphi)_{B,B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & * \\ & \lambda_1 & & & & \\ & & \ddots \lambda_1 & & & \\ & & & \lambda_2 & & \\ & 0 & & & \lambda_2 & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

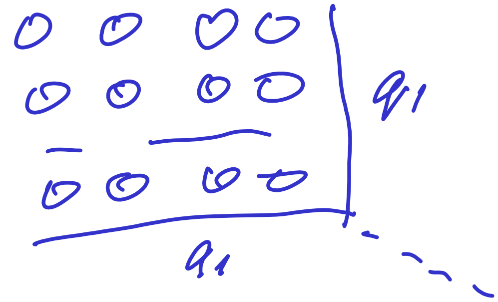
Počet λ_1 je q_1

alg. nás. λ_1 je q_1

$R_{\lambda_1} = [v_1, v_2, \dots, v_{q_1}]$ $\quad$ $\underline{\dim R_{\lambda_1} = \text{alg. nás. } \lambda_1}$

$$(\varphi)_{B,B} - \lambda_1 E \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & & * \\ & 0 & \\ & & \ddots \\ & & & 0 \end{pmatrix}}_{q_1} \, q_1$$

$$\left((\varphi)_{B,B} - \lambda_1 E\right)^{q_1}$$

$=$ 

$$\dim\left(R_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus R_{\lambda_k}\right) = \sum_{i=1}^{k} \dim R_{\lambda_i} =$$

$=$ součet alg. nás. λ_i $= n$

$R_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus R_{\lambda_k} \subseteq U$ je podprostor v U stejné dimenze jako U, proto

$$\underline{R}_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus \underline{R}_{\lambda_k} = U.$$

$\boxed{\text{2. krok}}$ Označíme si $(\varphi - \lambda_i \mathrm{id})/_{R_{\lambda_i}} = \psi$

$$R_{\lambda_i} = V$$

$\varphi - \lambda_i \mathrm{id}$ je na V nilpotentní.

Cyklický operátor je takový operátor
$\psi : V \to V$,
ke kterému existuje báze
$\underline{B} = (v_1, v_2, \dots v_s)$ prostoru V
taková, že $\psi(v_1) = \vec{0}$ $\psi(v_2) = v_1, \dots$ $\psi(v_s) = v_{s-1}$

Vektory $v_1, v_2 \dots v_s$ tvoří řetězec pro vlastní číslo 0!

$$(\psi)_{B,B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & & \\ & & \vdots & & 1 \\ 0 & & \vdots & & 0 \end{pmatrix} = J_s(0)$$

Každý cyklický operátor je nilpotentní

$$\psi(v_1) = 0 \quad \psi^2(v_2) = \psi(v_1) = 0, \dots$$
$$\psi^s(v_s) = 0.$$
$$\psi^s = 0$$

Opačné tvrzení neplatí, ale lze ukázat

Věta: Nechť $\psi : V \to V$ je nilpotentní. Pak existuje rozklad prostoru V na direktní součet invariantních podprostorů

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_p$$

takový, že $\psi / V_i : V_i \to V_i$ je cyklický operátor.

V každém V_i vezmeme cyklickou bázi B_i.

Dohromady tyto báze dávají bázi

B celého prostoru V a platí

$$(\varphi)_{B,B} = \begin{pmatrix} \boxed{J_{k_1}(0)} & & & \\ & \boxed{J_{k_2}(0)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{J_{k_p}(0)} \end{pmatrix}$$

Z této věty a předchozího lemmatu plyne důkaz věty o JKT.

v R_{λ_i} najdeme bázi γ_i

$$(\varphi - \lambda_i \, id)_{\gamma_i,\gamma_i} = \begin{pmatrix} J_{k_1}(0) & & \\ & J_{k_2}(0) & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$(\varphi)_{\gamma_i,\gamma_i} = (\varphi - \lambda_i \, id)_{\gamma_i,\gamma_i} + (\lambda_i \, id)_{\gamma_i,\gamma_i}$$

$$= \begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_i) & & & \\ & J_{k_2}(\lambda_i) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{k}(\lambda_i) \end{pmatrix}$$

$\alpha = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k)$ $\quad (\varphi)_{\alpha,\alpha} = J$ JKT.

Důkaz věty o nilpotentním operátoru.

Nechť $s \in \mathbb{N}$ $\quad \varphi^s = 0$ na V.

$$0 = \operatorname{im}\psi^{s} \subseteq \underset{\substack{P_{s-1}\\ \neq \\ 0}}{\operatorname{im}\psi^{s-1}} \subseteq \underset{P_{s-2}}{\operatorname{im}\psi^{s-2}} \quad \subseteq \operatorname{im}\psi \subseteq \operatorname{im}\psi^{0} = \operatorname{im} id = V = P_0$$

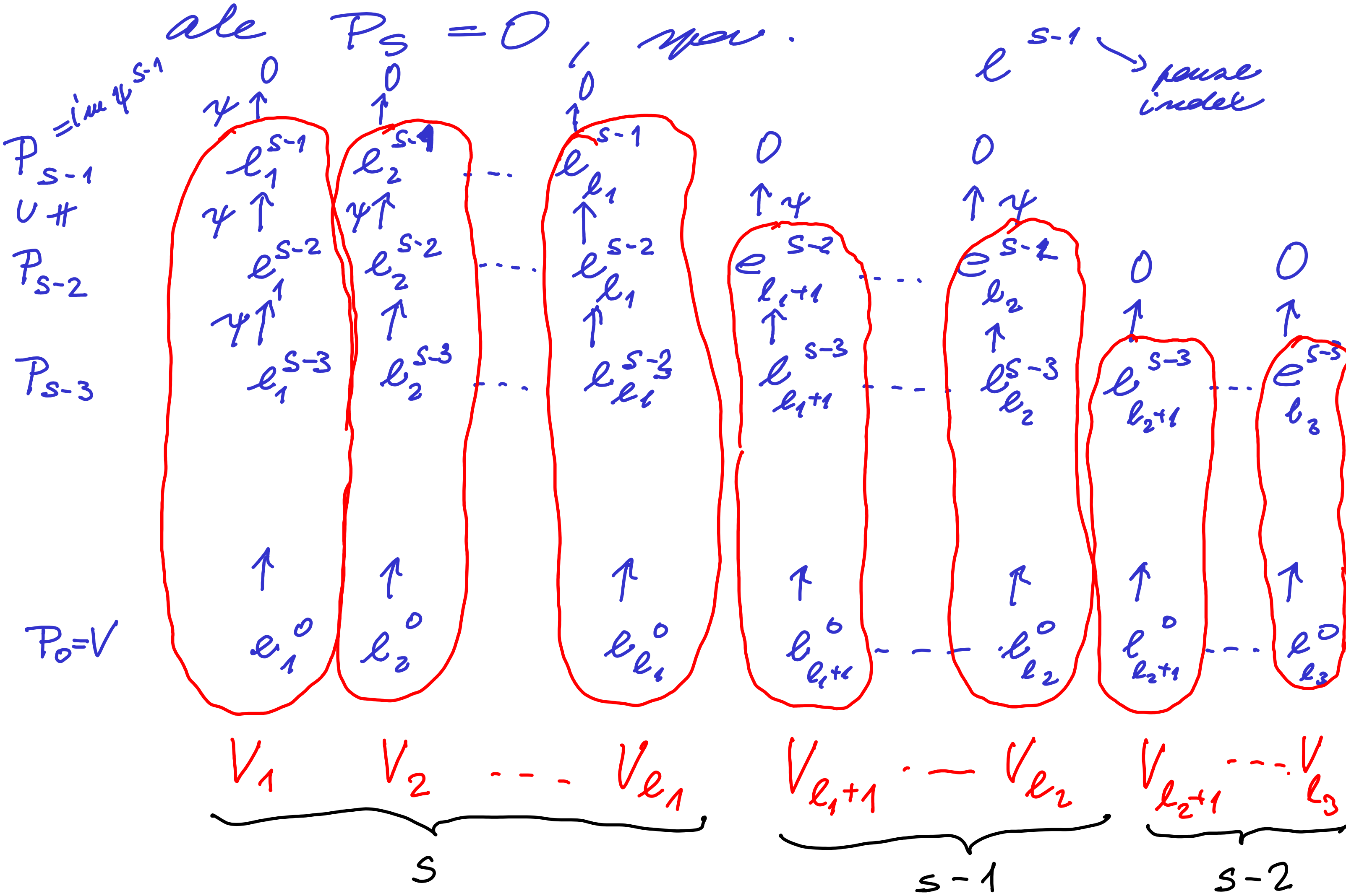
Platí $\quad P_{s-1} \subsetneq P_{s-2} \subsetneq P_{s-3} \cdots P_1 \subsetneq V$

Kdyby $\quad P_i = P_{i-1}$

$$P_{i+1} = \psi(P_i) = \psi(P_{i-1}) = P_i$$

Pak by $\quad P_{i-1} = P_i = P_{i+1} = \dots = P_s$

ale $P_s = 0$, spor.



- (1) vektory $e_1^{s-1}, \dots, e_{l_1}^{s-1}, e_1^{s-2}, \dots, e_{l_2}^{s-2}$ jsou LN
- (2) $e_1^{s-1}, \dots, e_{l_1}^{s-1}, e_1^{s-2}, \dots, e_{l_1}^{s-2}, e_{l_1+1}^{s-2}, \dots, e_{l_2}^{s-2}$

báze P_{s-2}.

- (3) $e_{l_1+1}^{s-2}, \dots, e_{l_2}^{s-2}$ lze zvolit tak, že jsou φ zobrazují do $\vec{o}$.

(4) všechny vektory v tabulce vytváří bázi $P_0 = V$.

(5) $V_1 = [e_1^0, e_1^1, e_1^2 \dots e_1^{s-1}]$

φ / V_1 je cyklický operátor s cyklickou bází $e_1^0, e_1^1, e_1^2, \dots e_1^{s-1}$.

φ / V_i je cyklický operátor

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_p.$$

jednoznačnost JKT

znamená počet buněk pro dané vlastní číslo nezávisí na volbě báze.

Ukážeme si pro φ nilpotentní

Vlastní čísla 0

Kolik má JKT buněk velikosti s

$$l_1 = \dim P_{s-1} = \dim \operatorname{Im} \varphi^{s-1}$$

Kolik má JKT buněk velikosti $s-1$

$$l_2 - l_1 = \dim P_{s-2} - 2 \dim P_{s-1}$$
$$\qquad l_2 + l_1 - 2 l_1$$

Kolik má JKT buněk velikosti $s-2$

$$l_3 - l_2 = \dim P_{s-3} - 2 \dim P_{s-2} + \dim P_{s-1}$$
$$\underbrace{\underbrace{l_3 + l_2 + l_1 - 2(l_2 + l_1)}_{l_3 - l_2 - l_1} + l_1}_{l_3 - l_2}$$

$(\varphi)_{\alpha,\alpha}$