13. CVIČENIE

① (P4 z ZÁPOČ. P. — LF)

X normový priestor, X' je duálny priestor

nech $\{x_l\}_{l=1}^{\infty} \subseteq X$ konverguje v X slabo s limitou $x \in X$

$(x_l \rightharpoonup x)$

nech $\{f_l\}_{l=1}^{\infty} \subseteq X'$ konverguje v X' v norme k $f \in X'$

Dokážte, že $\{f_l(x_l)\}_{l=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$ konverguje s limitou $f(x)$

R:

... máme dokázať: $\lim\limits_{l\to\infty} f_l(x_l) = f(x)$

$$\Longleftrightarrow \quad \lim_{l\to\infty} |f_l(x_l) - f(x)| = 0$$

⇝ vieme:

- $x_l \rightharpoonup x$ v X $\Longleftrightarrow$ pre $\forall g \in X'$ platí:

$$\lim_{l\to\infty} g(x_l) = g(x)$$

- $f_l \to f \in X'$ v norme $\Longleftrightarrow$ $\lim\limits_{l\to\infty} \|f_l - f\| = 0$

⇝ platí pre $\forall l \in \mathbb{N}$

$$|f_l(x_l) - f(x)| = |f_l(x_l) - f(x_l) + f(x_l) - f(x)|$$

$$\leq |f_l(x_l) - f(x_l)| + |f(x_l) - f(x)|$$

$$= |(f_\ell - f)(x_\ell)| + |f(x_\ell) - f(x)| \leq \|f_\ell - f\| \cdot \|x_\ell\| + |f(x_\ell) - f(x)|$$

$\leq$

je ohraničené!

$\rightsquigarrow$ platí :

$$0 \leq \lim_{\ell \to \infty} |f_\ell(x_\ell) - f(x)| \leq \lim_{\ell \to \infty} \|f_\ell - f\| \cdot \|x_\ell\| + \lim_{\ell \to \infty} |f(x_\ell) - f(x)|$$

$$= 0$$

$$\Rightarrow \lim_{\ell \to \infty} |f_\ell(x_\ell) - f(x)| = 0$$

---

② (P7 z ZÁPOČ. P. — LF)

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$; $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq (\ell^\infty)'$:

$$f_n(x) := a_n \cdot x_n \quad ; \quad x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^\infty$$

$\rightsquigarrow$ NAŠE ÚLOHY :

- 1 overiť, že pre $\forall n \in \mathbb{N}$ je $f_n \in (\ell^\infty)'$ a stanoviť $\|f_n\|$
- 2 ukázať, že platí :

$$f_n \xrightarrow{*} \text{v } (\ell^\infty)' \iff \{a_n\} \in c_0 \ (\lim_{n \to \infty} a_n = 0)$$

- 3 stanoviť $*$-slabú limitu postup. $\{f_n\}$
- 4 rozhodnúť, či $\{f_n\}$ konverguje aj v norme (za predpokladu $\{a_n\} \in c_0$)

R:

1. ⇝ zrejme f_n je lineárny f-ciál pre $\forall n \in \mathbb{N}$

... preto stačí ukázať ohraničenosť f_n pre $\forall$ dané $n \in \mathbb{N}$

pre postup. $x = \{x_\ell\} \in \ell^\infty$ a pre daný index $n \in \mathbb{N}$ platí:

$$|f_n(x)| = |a_n \cdot x_n| = |a_n| \cdot |x_n| \leq |a_n| \cdot \sup_{\ell \in \mathbb{N}} |x_\ell| = |a_n| \cdot \underbrace{\|x\|}_{\text{v } \ell^\infty}$$

$\Rightarrow$ f_n je ohraničený na ℓ^∞ $\Rightarrow$ $f_n \in (\ell^\infty)'$

... navyše: $\underline{\|f_n\| \leq |a_n|}$

... napr. $x = \{1\}_{\ell=1}^\infty = \{1, 1, \dots\} \in \ell^\infty$; platí:

$$|f_n(x)| = |a_n| \quad ; \quad \|x\| = 1 \quad \Rightarrow \quad \|f_n\| \geq |a_n|$$

$$\Rightarrow \boxed{\|f_n\| = |a_n| \quad \text{pre } \forall\, n \in \mathbb{N}}$$

2. podľa def. $*$-slabej konvergencie v $(\ell^\infty)'$:

$f_n \xrightarrow{*}$ v $(\ell^\infty)'$, ak $\lim_{n\to\infty} f_n(x) =$ existuje a je konečná pre $\forall x \in \ell^\infty$

... $\lim_{n\to\infty} a_n x_n =$ existuje a je konečná pre $\forall\, x = \{x_n\} \in \ell^\infty$

obzvlášť pre $\{1\}_{n=1}^\infty \in \ell^\infty$: $\lim_{n\to\infty} a_n =$ existuje a je konečná

... označme $L := \lim_{n\to\infty} a_n$

$\leadsto$ ukážeme, že $L=0$; ak by bolo $L \neq 0$, potom pre špeciálnu postup. $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^\infty$ platí:

$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot (-1)^n = \text{existuje a je konečná}$$

.... SPOR

$\Rightarrow$ $L=0$

... ukázali sme implikáciu:

$$f_n \xrightarrow{*} v\,(\ell^\infty)' \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

$\leadsto$ naopak, ak $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$; potom pre $\forall x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^\infty$ platí:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} a_n x_n = 0$$

$\Rightarrow$ platí $f_n \xrightarrow{*} v\,(\ell^\infty)'$

3° vyplýva ihneď z $\leadsto$ $f_n \xrightarrow{*} f \equiv 0$ na $(\ell^\infty)'$

4° pre $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\| f_n - \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{f} \| = \| f_n \| \underset{2^\circ 1}{=} |a_n| \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \| f_n - f \| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$$

$\Rightarrow$ $f_n \longrightarrow f \equiv 0$ aj v norme $v\,(\ell^\infty)'$