

M6150 Funkcionálna analýza I

Lineárne priestory

Peter Šepitka

leto 2017

Obsah

- 1 Základné pojmy a vlastnosti
- 2 Normované lineárne priestory
- 3 Unitárne priestory
- 4 Hilbertove priestory

Obsah

- 1 **Základné pojmy a vlastnosti**
- 2 Normované lineárne priestory
- 3 Unitárne priestory
- 4 Hilbertove priestory

Lineárna závislosť a algebraická báza

V nasledujúcom výklade budeme pracovať s **lineárnymi** (alebo tiež **vektorovými**) **priestormi** nad **telesom reálnych čísiel** \mathbb{R} . Prvky daného lineárneho priestoru budeme často nazývať **vektormi** a reálne čísla **skalármi**.

Definícia 1 (Lineárna závislosť vektorov)

Nech X je lineárny priestor a $x_1, \dots, x_m \in X$, $m \in \mathbb{N}$, sú nejaké jeho prvky. Hovoríme, že vektory x_1, \dots, x_m sú **lineárne závislé**, ak existujú nenulová m -tica skalárov $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ s vlastnosťou

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m = 0.$$

V opačom prípade sa vektory x_1, \dots, x_m nazývajú **lineárne nezávislé**. Všeobecne, množina $A \subseteq X$ sa označuje ako **lineárne nezávislá**, ak každý konečný systém vektorov z A je lineárne nezávislý.

Definícia 2 (Algebraická báza lineárneho priestoru)

Nech X je lineárny priestor. Množina $A \subseteq X$ sa nazýva **algebraická** alebo tiež **Hamelova báza** priestoru X , ak A je lineárne nezávislá a jej **lineárny obal** splyva s X , t.j., platí $\text{Lin } A := \{\text{konečné lineárne kombinácie prvkov z } A\} = X$.

Poznámka 1

V každom lineárnom priestore existuje algebraická báza. Obzvlášť, ak A je nejaká Hamelova báza lineárneho priestoru X , potom každý vektor $x \in X$ sa dá jediným spôsobom vyjadriť v tvare konečnej lineárnej kombinácie niektorých prvkov množiny A . Každé dve Hamelove bázy priestoru X majú rovnakú mohutnosť, ktorá sa nazýva **(algebraická) dimenzia (rozmer)** priestoru X a označuje sa $\dim X$. Platí, že dva lineárne priestory sú (algebraicky) izomorfné, ak majú rovnakú (algebraickú) dimenziu. Špeciálne, každý konečnorozmerný priestor s $\dim X = n \in \mathbb{N}$ je izomorfný s lineárnym priestorom \mathbb{R}^n .

Definícia 3 (Faktorový priestor a kodimenzia lineárneho podpriestoru)

Nech X je lineárny priestor a $A \subseteq X$ jeho lineárny podpriestor. Definujme, že dva prvky $x, y \in X$ sú v relácii, ak $x - y \in A$. Je zrejmé, že sa jedná o reláciu ekvivalencie na množine X , pričom skutočnosť, že prvky $x, y \in X$ sú v danej relácii, budeme zapisovať výrazom $x \equiv y \pmod{A}$. Príslušnú množinu tried rozkladu budeme označovať X/A a nazývať **faktorový priestor** priestoru X **podľa modulu** A . Nie je ťažké overiť, že množina X/A vytvára lineárny priestor nad \mathbb{R} . Jeho algebraická dimenzia sa štandardne označuje ako **kodimenzia podpriestoru** A v priestore X . Obzvlášť, ak $\dim X = n$ a $\dim A = m$, potom zrejme kodimenzia podpriestoru A je rovná $n - m$.

Veta 1

Nech X je lineárny priestor a $A \subseteq X$ jeho lineárny podpriestor konečnej kodi-
menzie $m \in \mathbb{N}$. Potom existujú prvky $x_1, \dots, x_m \in X$ s vlastnosťou, že každý
vektor $x \in X$ sa dá jednoznačne vyjadriť v tvare

$$x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m + y, \quad (1)$$

kde $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ sú skaláry a vektor $y \in A$.

Dôkaz Vety 1.

Nech $\{A_1, \dots, A_m\} \subseteq X/A$ je algebraická báza faktorového priestoru X/A .
Zvoľme nejaké reprezentanty tried A_i , $i \in \{1, \dots, m\}$, t.j.,

$$\text{nech } x_i \in X \text{ sú také, že } A_i = [x_i], \text{ pre každé } i \in \{1, \dots, m\}. \quad (2)$$

Nech $x \in X$ je ľubovoľný prvok a $[x] \in X/A$ je trieda rozkladu X/A , ktorá ho
obsahuje. Potom zrejme existuje jediná m -tica skalárov $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ taká, že

$$[x] = \lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_m A_m \stackrel{(2)}{=} \lambda_1 [x_1] + \dots + \lambda_m [x_m] = [\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m].$$

To znamená, že vektory x a $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m$ patria do rovnakej triedy
rozkladu X/A . Podľa Definície 3 preto existuje (jediný) vektor $y \in A$ tak, že
platí rovnosť v (1). Dôkaz je hotový. ■

Obsah

- 1 Základné pojmy a vlastnosti
- 2 Normované lineárne priestory**
- 3 Unitárne priestory
- 4 Hilbertove priestory

Norma na lineárnom priestore

Definícia 4 (Normovaný lineárny priestor)

Nech X je lineárny priestor nad \mathbb{R} a $\|\cdot\| : X \rightarrow [0, \infty)$ zobrazenie, ktoré pre každú dvojicu prvkov $x, y \in X$ a každý skalár $\lambda \in \mathbb{R}$ spĺňa podmienky

N1 $\|x\| = 0$ práve vtedy, keď $x = 0$,

N2 $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$,

N3 $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Zobrazenie $\|\cdot\|$ sa nazýva **norma** na priestore X a dvojicu $(X, \|\cdot\|)$ označujeme ako **normovaný lineárny priestor** nad \mathbb{R} .

Poznámka 2

Ľahko sa overí, že pre každý normovaný priestor X s normou $\|\cdot\|$ je zobrazenie

$$\rho(x, y) := \|x - y\|, \quad x, y \in X, \quad (3)$$

metrikou na množine X , a tak dvojica (X, ρ) je **metrický priestor**. Toto pozorovanie preto umožňuje preniesť a aplikovať na normovaný lineárny priestor X všetky pojmy a výsledky z teórie metrických priestorov.

Poznámka 3 (Ohraničenosť podmnožín normovaného lineárneho priestoru)

Nech X je normovaný lineárny priestor s normou $\|\cdot\|$. Podmnožinu $A \subseteq X$ budeme považovať za **ohraničenú** v normovanom priestore X , ak existuje taká nezáporná reálna konštanta K , že $\|x\| \leq K$ pre každé $x \in A$. Je nutné zdôrazniť, že takto chápaný pojem ohraničenosti korešponduje s pojmom ohraničenosti zavedeným v kontexte metrických priestorov. Konkrétne, množina $A \subseteq X$ je ohraničená v normovanom priestore X práve vtedy, keď je ohraničená v metrickom priestore (X, ρ) s metrikou ρ predstavenou v Poznámke 2. Skutočne, ak existuje $K \geq 0$ také, že $\|x\| \leq K$ pre každý vektor $x \in A$, potom

$$\rho(x, y) = \|x - y\| \leq \|x\| + \|y\| \leq 2K \quad \text{pre každé } x, y \in A,$$

a tak priemer $d(A) \leq 2K$. Naopak, ak množina A má (v metrickom priestore (X, ρ)) konečný priemer $d(A)$ a zvolíme nejaký prvok $x_0 \in A$, potom

$$\|x\| = \|x - x_0 + x_0\| \leq \|x - x_0\| + \|x_0\| = \rho(x, x_0) + \|x_0\| \leq d(A) + \|x_0\|$$

pre každý vektor $x \in A$. Množina A je teda ohraničená i v normovanom priestore X , kde napríklad môžeme položiť $K := d(A) + \|x_0\|$.

Definícia 5 (Banachov priestor)

Normovaný lineárny priestor X nad \mathbb{R} , ktorý je **úplný** vzhľadom na metriku v (3) indukovanú danou normou na X , sa označuje ako (reálny) **Banachov priestor**.

Príklad 1

Pre dané $n \in \mathbb{N}$ položme $X := \mathbb{R}^n$ a nech $p \in [1, \infty)$. Potom zobrazenia

$$\|x\|_p := \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p}, \quad \|x\|_\infty := \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|, \quad (4)$$

kde $x := (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, sú normy na lineárnom priestore X , ktoré v kontexte Poznámky 2 indukujú metriky ρ_p a ρ_∞ . Navyiac, v súlade s Definíciou 5 z teórie metrických priestorov vyplýva, že každý z normovaných priestorov $(X, \|\cdot\|_p)$, $(X, \|\cdot\|_\infty)$ je n -rozmerným Banachovým priestorom.

Príklad 2

Pre pevne zvolené $p \in [1, \infty)$ je priestor postupností l^p predstavený v teórii metrických priestorov zároveň normovaným lineárnym priestorom s normou

$$\|x\| := \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p}, \quad x := \{x_k\} \in l^p. \quad (5)$$

Podobne i priestory l^∞ , c a c_0 sú normované lineárne priestory s normou

Príklad 2

$$\|x\| := \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k|, \quad x := \{x_k\} \text{ ohraničená postupnosť.} \quad (6)$$

Každý z priestorov l^p , l^∞ , c a c_0 je nekonečnorozmerný Banachov priestor.

Príklad 3

Nech a, b , $a < b$, sú dané reálne čísla. Množina $\mathcal{B}[a, b]$ všetkých reálnych funkcií ohraničených na $[a, b]$ zrejme tvorí lineárny priestor nad \mathbb{R} . Obzvlášť, zobrazenie

$$\|f\|_B := \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|, \quad f \in \mathcal{B}[a, b], \quad (7)$$

je normou na priestore $\mathcal{B}[a, b]$, ako možno ľahko overiť. Špeciálne, množina $\mathcal{C}[a, b]$ všetkých funkcií spojitých na $[a, b]$ predstavuje (algebraický) lineárny podpriestor priestoru $\mathcal{B}[a, b]$. Navyiac, každé zo zobrazení

$$\|f\|_C := \max_{x \in [a, b]} |f(x)|, \quad \|f\|_I := \int_a^b |f(x)| dx, \quad f \in \mathcal{C}[a, b], \quad (8)$$

je normou na priestore $\mathcal{C}[a, b]$. Z prednášok o metrických priestoroch vyplýva, že normovaný priestor $(\mathcal{C}[a, b], \|\cdot\|_C)$ je nekonečnorozmerný Banachov priestor, kým $(\mathcal{C}[a, b], \|\cdot\|_I)$ nie je Banachov priestor. Dá sa ďalej ukázať, že i samotný priestor $(\mathcal{B}[a, b], \|\cdot\|_B)$ je Banachov, t.j., je úplný vzhľadom na metriku ρ_B .

Definícia 6 (Podpriestor normovaného lineárneho priestoru)

Nech X je normovaný lineárny priestor s normou $\| \cdot \|$ a $A \subseteq X$ je podmnožina. Budeme hovoriť, že A je **podpriestor normovaného priestoru** X , ak A je algebraický lineárny podpriestor v X , ktorý je **uzavretý** v X vzhľadom na metriku indukovanú normou $\| \cdot \|$ v Poznámke 2.

Príklad 4

V Príklade 3 sme poznamenali, že množina $\mathcal{C}[a, b]$ je algebraický lineárny podpriestor priestoru $\mathcal{B}[a, b]$. Vďaka úplnosti metrického priestoru $(\mathcal{C}[a, b], \rho_{\mathcal{C}})$ je množina $\mathcal{C}[a, b]$ uzavretá v metrickom priestore $(\mathcal{B}[a, b], \rho_{\mathcal{B}})$, a tak $\mathcal{C}[a, b]$ je i podpriestor normovaného priestoru $(\mathcal{B}[a, b], \| \cdot \|_{\mathcal{B}})$ v zmysle Definície 6.

Príklad 5

Je potrebné zdôrazniť, že algebraický lineárny podpriestor všeobecného normovaného priestoru X **nemusí byť uzavretý** v X . Napríklad pre $X := l^1$ je množina $A := \{x \in l^1, x \text{ má len konečne veľa nenulových členov}\}$ evidentným vlastným algebraickým lineárnym podpriestorom v X , ktorý však nie je uzavretý v X , nakoľko $\overline{A} = l^1$. Obzvlášť, A nie je podpriestor normovaného priestoru X .

Lema 1 (Rieszova)

Nech X je normovaný lineárny priestor s normou $\|\cdot\|$ a $A \subseteq X$ jeho vlastný (uzavretý) podpriestor. Potom pre každé $\eta \in [0, 1)$ existuje vektor $x_\eta \in X$ s $\|x_\eta\| = 1$ taký, že $\rho(x_\eta, A) \geq \eta$, kde ρ metrika na X indukovaná normou $\|\cdot\|$.

Dôkaz Lemy 1.

Uvažovaný podpriestor A je rôzny jednak od nulového priestoru, a jednak od celého priestoru X . Množina $X \setminus A$ je preto neprázdna. Zvoľme ľubovoľné $z \in X \setminus A$. Z uzavretosti množiny A v X vyplýva, že vzdialenosť bodu z od A je kladná, t.j., $d := \rho(z, A) > 0$. Obzvlášť, platí

$$d = \inf\{\rho(z, y), y \in A\}, \quad \text{a tak } \rho(z, y) \geq d \text{ pre každé } y \in A. \quad (9)$$

Zafixujem teraz nejaké $\eta \in (0, 1)$. Keďže $\frac{d}{\eta} > d$, podľa (9) z vlastností infima

$$\text{existuje } \tilde{y} \in A \text{ také, že } 0 < d \leq \rho(z, \tilde{y}) < \frac{d}{\eta}. \quad (10)$$

Položme $x_\eta := \frac{z - \tilde{y}}{\|z - \tilde{y}\|}$. Potom zrejme $\|x_\eta\| = 1$ a pre každé $y \in A$ platí

$$\rho(x_\eta, y) = \|x_\eta - y\| = \left\| \frac{z - \tilde{y}}{\|z - \tilde{y}\|} - y \right\| = \left\| \frac{z - \tilde{y} - \|z - \tilde{y}\| y}{\|z - \tilde{y}\|} \right\|$$

Dôkaze Lemy 1.

$$= \frac{\|z - \overbrace{(\tilde{y} + \|z - \tilde{y}\| y)}^{\in A}\|}{\|z - \tilde{y}\|} \stackrel{(9),(10)}{>} \frac{d}{\frac{d}{\eta}} = \eta,$$

z čoho následne vyplýva, že $\rho(x_\eta, A) \geq \eta$. Napokon prípad $\eta = 0$ je triviálny, nakoľko metrika ρ je nezáporná. Dôkaz je teda kompletný. ■

Poznámka 4

Poznamenajme, že pre každý vektor $x \in X$ s normou $\|x\| = 1$ platí nerovnosť $\rho(x, A) \leq 1$. Vyplýva to z odhadu

$$\rho(x, A) = \inf\{\rho(x, y), y \in A\} \leq \rho(x, 0) = \|x\| = 1 \quad \text{pre každé } x \in S(0, 1),$$

kde symbol $S(0, 1)$ označuje **jednotkovú sféru** v normovanom priestore X , t.j.,

$$S(0, 1) = \{x \in X, \|x\| = 1\}. \quad (11)$$

Ďalej je nutné zdôrazniť, že v Rieszovej leme 1 vo všeobecnosti (t.j., v prípade všeobecného normovaného lineárneho priestoru X a jeho všeobecného podpriestoru A) nemožno uvažovať hodnotu $\eta = 1$. Túto skutočnosť ilustrujeme v nasledujúcom príklade.

Príklad 6

Uvažujme normovaný lineárny priestor $(X, \|\cdot\|)$ tvaru

$$X := \{f \in C[0, 1], \quad f(0) = 0\}, \quad \|f\| := \max_{x \in [0, 1]} |f(x)| \quad (12)$$

(jedná sa teda o podpriestor normovaného priestoru $(C[0, 1], \rho_C)$ predstaveného v Príklade 4). Uvažujme jeho podmnožinu

$$A := \left\{ f \in X, \quad \int_0^1 f(x) dx = 0 \right\}.$$

Nie je ťažké ukázať, že A je vlastný podpriestor X v zmysle Definície 6, t.j., A je lineárny priestor, ktorý je uzavretý v X vzhľadom na metriku ρ indukovanú normou v (12). Nech funkcia $g \in X$ je ľubovoľný prvok uzavretej jednotkovej gule $B[0, 1]$ v X , t.j., $\|g\| \leq 1$. Dokážeme, že $\rho(g, A) < 1$. Označme

$$c_g := \int_0^1 g(x) dx. \quad (13)$$

Pre konštantu c_g ľahko odvodíme odhad

$$|c_g| = \left| \int_0^1 g(x) dx \right| \leq \int_0^1 |g(x)| dx \stackrel{(12)}{\leq} \int_0^1 \|g\| dx \leq \int_0^1 1 dx = 1,$$

Príklad 6

pričom vďaka podmienke $g(0) = 0$ platí ostrá nerovnosť $|c_g| < 1$. Definujme

$$f(x) := \begin{cases} g(x) - \frac{2c_g}{1+|c_g|} \cdot \frac{x}{1-|c_g|}, & x \in [0, 1 - |c_g|], \\ g(x) - \frac{2c_g}{1+|c_g|}, & x \in [1 - |c_g|, 1]. \end{cases} \quad (14)$$

Funkcia f v (14) je prvkom množiny A , ako sa možno ľahko presvedčiť výpočtom integrálu $\int_0^1 f(x) dx$ a pomocou (13). Navyše, pre každé $x \in [0, 1]$ platí

$$|g(x) - f(x)| \stackrel{(14)}{=} \begin{cases} \frac{2|c_g|}{1+|c_g|} \cdot \frac{x}{1-|c_g|}, & x \in [0, 1 - |c_g|], \\ \frac{2|c_g|}{1+|c_g|}, & x \in [1 - |c_g|, 1]. \end{cases} \leq \frac{2|c_g|}{1+|c_g|} < 1,$$

a tak $\rho(g, f) = \max_{x \in [0, 1]} |g(x) - f(x)| < 1$. To však potom znamená, že

$$\rho(g, A) = \inf\{\rho(g, h), h \in A\} \leq \rho(g, f) < 1.$$

Výsledok Rieszovej lemy 1 preto v tomto prípade nemožno rozšíriť i pre hodnotu $\eta = 1$, napriek tomu, že sú splnené všetky jej predpoklady.

Veta 2

Nech $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný lineárny priestor. Potom $\|\cdot\|$ je spojité zobrazenie priestoru X do euklidovského priestoru \mathbb{E} .

Dôkaz Vety 2.

Pri dôkaze využijeme ekvivalentné vyjadrenie trojuholníkovej nerovnosti N3 v Definícii 4. Konkrétne, každá norma $\|\cdot\|$ spĺňa nerovnosť

$$\left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\| \quad \text{pre každé } x, y \in X. \quad (15)$$

Skutočne, pre ľubovoľné vektory $x, y \in X$ platí

$$\|x\| = \|(x - y) + y\| \leq \|x - y\| + \|y\| \quad \Rightarrow \quad \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|,$$

$$\|y\| = \|(y - x) + x\| \leq \|y - x\| + \|x\| \quad \Rightarrow \quad \|y\| - \|x\| \leq \|x - y\|,$$

z čoho ihneď vyplýva nerovnosť (15). Nech teraz $x \in X$ je ľubovoľný vektor a $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X$ nejaká postupnosť, ktorá má v danej norme limitu x , t.j., platí $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - x\| = 0$. Z (15) potom dostávame, že $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k\| = \|x\|$, čo dokazuje spojitosť zobrazenia $\|\cdot\|$ v bode x . A keďže prvok $x \in X$ bol vybraný ľubovoľne, platí tento výsledok na celom priestore X . Dôkaz je hotový. ■

Definícia 7 (Ekvivalencia noriem)

Nech X je lineárny priestor a $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ jeho dve normy. Povieme, že normy $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ sú **ekvivalentné**, ak pre každú postupnosť $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ prvkov v X a každý bod $x \in X$ platí relácia

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x \text{ v norme } \|\cdot\|_1 \iff \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x \text{ v norme } \|\cdot\|_2. \quad (16)$$

Veta 3

Nech X je lineárny priestor a $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ jeho dve normy. Potom tieto normy sú ekvivalentné práve vtedy, keď existujú kladné reálne čísla m a M s vlastnosťou

$$m \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq M \|x\|_1 \quad \text{pre každý vektor } x \in X. \quad (17)$$

Dôkaz Vety 3.

Označme ρ_1, ρ_2 metriky indukované normami $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ podľa Poznámky 2. Predpokladajme, že normy $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ sú ekvivalentné a nech $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X$ je postupnosť spĺňajúca $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0$ v norme $\|\cdot\|_1$. V súlade s (16) potom $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0$ i v norme $\|\cdot\|_2$, čo znamená, že identické zobrazenie z metrického priestoru (X, ρ_1) do metrického priestoru (X, ρ_2) je spojité v bode $x = 0$. Teda

Dôkaz Vety 3 (pokračovanie).

pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pre každé $x \in X$ s $\|x\|_1 < \delta$ je $\|x\|_2 < \varepsilon$. (18)

Položme v (18) $\varepsilon = 1$. To znamená, že existuje $\delta > 0$ s vlastnosťou, že pre každé $x \in X$ spĺňajúce $\|x\|_1 < \delta$ platí $\|x\|_2 < 1$. Nech x je ľubovoľný nenulový vektor a označme $\tilde{x} := \frac{\delta}{2\|x\|_1} x$. Zrejme $\tilde{x} \in X$ a pre normu $\|\tilde{x}\|_1$ máme

$$\|\tilde{x}\|_1 = \left\| \frac{\delta}{2\|x\|_1} x \right\|_1 = \frac{|\delta|}{2\|x\|_1} \|x\|_1 = \frac{\delta}{2} < \delta.$$

V zhode s vyššie uvedeným potom $\|\tilde{x}\|_2 < 1$, čo následne dáva

$$1 > \|\tilde{x}\|_2 = \left\| \frac{\delta}{2\|x\|_1} x \right\|_2 = \frac{|\delta|}{2\|x\|_1} \|x\|_2 = \frac{\delta}{2} \frac{\|x\|_2}{\|x\|_1}, \quad \text{a tak } \|x\|_2 < \frac{2}{\delta} \|x\|_1.$$

Tým sme dokázali druhú nerovnosť v (17) s voľbou $M := \frac{2}{\delta} > 0$. Analogicky sa dokáže i platnosť prvej nerovnosti v (17) (v predchádzajúcich úvahách zameníme úlohu noriem $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$). Naopak, ak normy $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ spĺňajú (17) pre nejaké $m, M > 0$, potom pre každú postupnosť $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X$ a bod $x \in X$ máme

$$m \|x_k - x\|_1 \leq \|x_k - x\|_2 \leq M \|x_k - x\|_1 \quad \text{pre každý index } k \in \mathbb{N}.$$

Tieto nerovnosti ihneď implikujú ekvivalenciu noriem $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ v súlade s Definíciou 7. Dôkaz je preto kompletný. ■

Poznámka 5

Poznamenajme, že normy $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ na X spĺňajúce reláciu (17) sú skutočne v ekvivalentnom vzťahu, nakoľko nie je ťažké overiť, že platí

$$\frac{1}{M} \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \frac{1}{m} \|x\|_2 \quad \text{pre každý vektor } x \in X. \quad (19)$$

Príklad 7

Pre dané $n \in \mathbb{N}$ nech $X := \mathbb{R}^n$. Potom normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ na X predstavené v Prípade 1 pre $p = 1$ a $p = 2$ sú podľa Vety 3 ekvivalentné. Skutočne, ak

$$\|x\|_1 \stackrel{(4)}{=} \sum_{k=1}^n |x_k|, \quad \|x\|_2 \stackrel{(4)}{=} \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2}, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in X, \quad (20)$$

potom platia nerovnosti

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \quad \text{pre každý vektor } x \in X. \quad (21)$$

Prvá nerovnosť v (21) je dôsledkom klasickej nerovnosti medzi aritmetickým a kvadratickým priemerom reálnych čísel $|x_1|, \dots, |x_n|$, kým druhá nerovnosť v (21) vyplýva triviálne z vyjadrení daných noriem v (20).

Príklad 8

Nech X je lineárny priestor tvaru

$$X := \{f \in \mathcal{C}^1[0, \pi], f(0) = 0 = f(\pi)\}, \quad (22)$$

t.j., priestor všetkých reálnych funkcií so spojitou deriváciou na intervale $[0, \pi]$ a nulovými hodnotami v krajných bodoch. Uvažujme na X dvojicu noriem

$$\|f\|_1 := \max_{x \in [0, \pi]} |f(x)|, \quad \|f\|_2 := \max_{x \in [0, \pi]} |f(x)| + \max_{x \in [0, \pi]} |f'(x)|, \quad f \in X. \quad (23)$$

Jedná sa o neekvivalentné normy. Totiž, pre postupnosť funkcií $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X$ s predpismi $f_k(x) := \frac{\sin k^2 x}{k}$, $k \in \mathbb{N}$, platí

$$\|f_k\|_1 \stackrel{(23)}{=} \max_{x \in [0, \pi]} \left| \frac{\sin k^2 x}{k} \right| = \frac{1}{k},$$

$$\|f_k\|_2 \stackrel{(23)}{=} \max_{x \in [0, \pi]} \left| \frac{\sin k^2 x}{k} \right| + \max_{x \in [0, \pi]} |k \cos k^2 x| = \frac{1}{k} + k$$

pre každé $k \in \mathbb{N}$. V prvej norme teda postupnosť $\{f_k\}$ konverguje k funkcii identicky nulovej na $[0, \pi]$, kým vzhľadom na druhú normu je táto postupnosť s ohľadom na Poznámku 3 neohraničená, a teda nemá limitu v priestore X .

Príklad 8

Uvažujme teraz na priestore X nasledujúcu dvojicu noriem

$$\left. \begin{aligned} \|f\|_1 &:= \left(\int_0^\pi |f'(x)|^2 dx \right)^{1/2}, \\ \|f\|_2 &:= \left(\int_0^\pi |f'(x)|^2 dx \right)^{1/2} + \left(\int_0^\pi |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}, \end{aligned} \right\} f \in X. \quad (24)$$

Nie je ťažké overiť, že sa skutočne jedná o normy na priestore X v zmysle Definície 4. V tomto prípade sú normy $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ ekvivalentné. Z (24) triviálne vyplýva, že $\|f\|_1 \leq \|f\|_2$ pre každú funkciu $f \in X$. Na druhej strane, pomocou teórie lineárnych diferenciálnych rovníc druhého rádu sa dá dokázať nerovnosť

$$\int_0^\pi (|f'(x)|^2 - |f(x)|^2) dx \geq 0 \quad \text{pre každé } f \in X \quad (25)$$

(konkrétne sa jedná o dôsledok tzv. diskonjugovanosti rovnice $y'' + y = 0$ na intervale $(0, \pi)$). Využitím výsledku (25) a formúl v (24) potom ihneď dostávame nerovnosť $\|f\|_2 \leq 2\|f\|_1$ pre každú funkciu $f \in X$, ako sa možno ľahko presvedčiť. Celkovo teda máme odhady

$$\|f\|_1 \leq \|f\|_2 \leq 2\|f\|_1 \quad \text{pre všetky } f \in X,$$

ktoré podľa Vety 3 zaručujú ekvivalenciu noriem $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ v (24).

Definícia 8 (Izometria normovaných lineárnych priestorov)

Nech X a Y sú dva normované lineárne priestory s normami $\|\cdot\|_X$ a $\|\cdot\|_Y$. Hovoríme, že priestory $(X, \|\cdot\|_X)$ a $(Y, \|\cdot\|_Y)$ sú **izometrické (lineárne izometrické, izometricky izomorfné)**, ak existuje bijektívne lineárne zobrazenie $F : X \rightarrow Y$ zachovávajúce normy, t.j., platí $\|F(x)\|_Y = \|x\|_X$ pre každý vektor $x \in X$.

Definícia 9 (Homeomorfizmus normovaných lineárnych priestorov)

Nech X a Y sú dva normované lineárne priestory s normami $\|\cdot\|_X$ a $\|\cdot\|_Y$. Hovoríme, že priestory $(X, \|\cdot\|_X)$ a $(Y, \|\cdot\|_Y)$ sú **homeomorfné (lineárne homeomorfné)**, ak existuje bijektívne lineárne zobrazenie $F : X \rightarrow Y$ a kladné reálne konštanty m, M s vlastnosťou $m\|x\|_X \leq \|F(x)\|_Y \leq M\|x\|_X$ pre každé $x \in X$.

Poznámka 6

Existencia lineárneho homeomorfizmu medzi dvomi normovanými lineárnymi priestormi zaručuje, že dané priestory sú tak z algebraického hľadiska ako aj z hľadiska funkcionálnej analýzy „identické“. Obzvlášť to umožňuje medzi týmito priestormi prenášať pojem otvorenosti, uzavretosti, úplnosti a kompaktnosti. Poznamenajme, že izometria normovaných priestorov je zrejme špeciálnym prípadom lineárneho homeomorfizmu s $m = 1 = M$, ako vidno z Definícií 8 a 9.

Nekonečné rady v Banachových priestoroch

Definícia 10 (Konvergencia nekonečného radu)

Nech X je normovaný lineárny priestor s normou $\|\cdot\|$ a $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X$ je postupnosť. Definujme

$$y_n := \sum_{k=1}^n x_k, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (26)$$

Hovoríme, že nekonečný rad $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ **konverguje**, resp. **je konvergentný**, v priestore X , ak postupnosť $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ má v X limitu vzhľadom na $\|\cdot\|$, t.j., $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x$ pre isté $x \in X$. V tomto prípade kladieme $\sum_{k=1}^{\infty} x_k = x$.

Veta 4

Nech $(X, \|\cdot\|)$ je Banachov priestor a $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X$ postupnosť s vlastnosťou

$$\text{číslný rad } \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| \text{ konverguje v } \mathbb{R}. \quad (27)$$

Potom nekonečný rad $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ konverguje v X .

Dôkaz Vety 4.

V súlade s Definíciami 5 a 10 stačí ukázať, že postupnosť $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ v (26) je cauchyovská v X . Zvoľme $\varepsilon > 0$. Predpoklad (27) na základe Cauchyho–Bolzanovho kritéria konvergencie číselného radu potom zaručuje existenciu indexu $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s vlastnosťou, že

$$\text{pre každé dva indexy } m, n \geq n_\varepsilon, n > m, \text{ platí } \|x_{m+1}\| + \cdots + \|x_n\| < \varepsilon. \quad (28)$$

Využitím trojuholníkovej nerovnosti následne dostávame

$$\|y_n - y_m\| \stackrel{(27)}{=} \|x_{m+1} + \cdots + x_n\| \leq \|x_{m+1}\| + \cdots + \|x_n\| \stackrel{(28)}{=} < \varepsilon$$

pre každé $m, n \geq n_\varepsilon, n > m$, čo dokazuje cauchyovskosť, a teda i konvergenciu postupnosti $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ v X . Dôkaz je hotový. ■

Poznámka 7

Tvrdenie Vety 4 je zovšeobecnením klasického výsledku o absolútnej konvergencii číselných radov v \mathbb{R} , resp. v \mathbb{C} . Konkrétne, ukazuje, že v ľubovoľnom Banachovom priestore je každý **absolútne konvergentný** nekonečný rad, t.j., spĺňajúci podmienku (27), zároveň i konvergentný (v zmysle Definície 10).

Normované priestory konečnej dimenzie

Poznámka 8

Klasickým výsledkom funkcionálnej analýzy je pozorovanie, že každý reálny normovaný lineárny priestor X konečnej dimenzie $n \in \mathbb{N}$ je lineárne izometrický s priestorom \mathbb{R}^n , na ktorom je zavedená vhodná norma. Konkrétne, nech $\|\cdot\|$ je norma na X a $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq X$ nejaká (algebraická) báza lineárneho priestoru X . Potom zobrazenie $F: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ dané

$$F(x) := (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \quad x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n \in X, \quad (29)$$

je zrejme izomorfizmus lineárnych priestorov X a \mathbb{R}^n . Navyiac, zobrazenie $\|\cdot\|_*: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ definované pre každú n -ticu $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ predpisom

$$\|(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\|_* := \|x\|, \quad x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n \in X, \quad (30)$$

je norma na priestore \mathbb{R}^n , ako možno ľahko overiť podľa Definície 4. A keďže podľa (29) a (30) platí $\|F(x)\|_* = \|x\|$ pre každé $x \in X$, normované priestory $(X, \|\cdot\|)$ a $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_*)$ sú v súlade s Definíciou 8 izometrické. Vo svetle Poznámky 6 sa teda pri skúmaní normovaných priestorov s dimenziou n stačí sústrediť na priestor \mathbb{R}^n . Všetky získané výsledky tak budú platné pre každý konečnorozmerný normovaný priestor nad telesom \mathbb{R} .

Veta 5

Pre dané $n \in \mathbb{N}$ sú každé dve normy na priestore \mathbb{R}^n ekvivalentné.

Dôkaz Vety 5.

Uvažujme tzv. kanonickú bázu $\{e_1, \dots, e_n\}$ priestoru \mathbb{R}^n , t.j.,

$$e_k := (0, \dots, 1, \dots, 0), \quad \text{kde } 1 \text{ je na } k\text{-tej pozícii pre každé } k \in \{1, \dots, n\}. \quad (31)$$

Potom každý vektor $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ sa dá zrejme vyjadriť v tvare

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n. \quad (32)$$

Nech $\|\cdot\|$ je ľubovoľná, ale pevne zvolená norma na priestore \mathbb{R}^n . Dokážeme, že je ekvivalentná so súčtovou normou

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k| \quad (33)$$

predstavenou v Príklade 1 pre $p = 1$. Položme $M := \max_{1 \leq k \leq n} \|e_k\|$. Potom

$$\|x\| \stackrel{(32)}{=} \left\| \sum_{k=1}^n x_k e_k \right\| \leq \sum_{k=1}^n |x_k| \|e_k\| \leq M \sum_{k=1}^n |x_k| \stackrel{(33)}{=} M \|x\|_1, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (34)$$

Dôkaz Vety 5 (pokračovanie).

Z Príkladu 7 ďalej vieme, že daná súčtová norma je ekvivalentná s euklidovskou normou, a tak normované priestory $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$ a \mathbb{E}^n sú podľa Vety 3 a Definície 9 lineárne homeomorfné prostredníctvom identického zobrazenia F . Každá podmnožina v \mathbb{R}^n , ktorá je ohraničená a uzavretá vzhľadom na súčtovú normu, je teda v tejto norme i kompaktná. Obzvlášť, jednotková sféra $S(0, 1)$ v \mathbb{R}^n vzhľadom na normu $\|\cdot\|_1$, zavedená v (11), je kompaktná v tejto norme, nakoľko je vzhľadom na ňu očividne ohraničená a uzavretá v \mathbb{R}^n . Uvažujme funkciu $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom $f(x) := \|x\|$ pre každý vektor $x \in \mathbb{R}^n$. V súlade s Vetou 2 a s ohľadom na nerovnosť (34) je f spojité zobrazenie na \mathbb{R}^n vzhľadom na normu $\|\cdot\|_1$. Podľa Weierstrassovej vety je potom f ohraničená na $S(0, 1)$, pričom svoje odpovedajúce globálne extrémum na $S(0, 1)$ i nadobúda. Konkrétne, ak $m := \min_{x \in S(0,1)} f(x)$, potom existuje vektor $y \in S(0, 1)$ taký, že $m = f(y) = \|y\|$. Zrejme $m \geq 0$. Ak by $m = 0$, potom nutne vektor $y = 0$, a tak i $\|y\|_1 = 0$, čo však odporuje relácii $y \in S(0, 1)$. Preto konštanta m je kladná. Nech teraz $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ je ľubovoľné. Potom vektor $\tilde{x} := \frac{x}{\|x\|_1}$ je prvkom jednotkovej sféry $S(0, 1)$, a následne platí

$$m \leq f(\tilde{x}) = \left\| \frac{x}{\|x\|_1} \right\| = \frac{\|x\|}{\|x\|_1}, \quad \text{a teda} \quad m \|x\|_1 \leq \|x\|. \quad (35)$$

Kombináciou výsledkov v (34) a (35) vo svetle Vety 2 napokon dostávame ekvivalenciu noriem $\|\cdot\|$ a $\|\cdot\|_1$. A keďže norma $\|\cdot\|$ bola zvolená ľubovoľne, môžeme uzavrieť, že každé dve normy na \mathbb{R}^n sú vzájomne ekvivalentné. ■

Dôsledok 1

Pre dané $n \in \mathbb{N}$ uvažujme normovaný lineárny priestor \mathbb{R}^n s normou $\|\cdot\|$ a nech $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ je nejaká jeho (algebraická) báza. Potom v priestore \mathbb{R}^n konvergencia v norme $\|\cdot\|$ splýva so **súradnicovou** konvergenciou vzhľadom na bázu $\{x_1, \dots, x_n\}$. Presnejšie, ak $\{x^{[k]}\}_{k=1}^\infty \subseteq \mathbb{R}^n$ je postupnosť a $x \in \mathbb{R}^n$ a

$$x^{[k]} = \lambda_1^{[k]} x_1 + \dots + \lambda_n^{[k]} x_n, \quad (\lambda_1^{[k]}, \dots, \lambda_n^{[k]}) \in \mathbb{R}^n \quad \text{pre každé } k \in \mathbb{N}, \quad (36)$$

$$x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n, \quad (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \quad (37)$$

potom $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{[k]} = x$ v norme $\|\cdot\|$ práve vtedy, keď $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_i^{[k]} = \lambda_i$ pre každé $i \in \{1, \dots, n\}$.

Dôkaz Dôsledku 1.

Ľahko sa ukáže, že pre každú zvolenú bázu $\{x_1, \dots, x_n\}$ priestoru \mathbb{R}^n je funkcia

$$\|x\|_* := \sum_{i=1}^n |\lambda_i|, \quad x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n \in \mathbb{R}^n, \quad (38)$$

normou na \mathbb{R}^n . Obzvlášť, je očividné, že konvergencia v tejto norme je ekvivalentná so súradnicovou konvergenciou vzhľadom na bázu $\{x_1, \dots, x_n\}$. A keďže podľa Vety 5 sú normy $\|\cdot\|$ a $\|\cdot\|_*$ ekvivalentné, platí výsledok v dôsledku. ■

Dôsledok 2

Pre dané $n \in \mathbb{N}$ je každý normovaný lineárny priestor $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ úplný, t.j., Banachov priestor. Okrem toho každá podmnožina v \mathbb{R}^n , ktorá je ohraničená a uzavretá vzhľadom na normu $\|\cdot\|$, je v tejto norme i kompaktná.

Veta 6

Každý reálny normovaný lineárny priestor konečnej dimenzie je Banachov priestor a konvergencia v ľubovoľnej norme je ekvivalentná so súradnicovou konvergenciou vzhľadom na akúkoľvek (algebraickú) bázu priestoru.

Veta 7

Nech X je reálny normovaný lineárny priestor s normou $\|\cdot\|$. Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné.

- (i) Priestor X má konečnú dimenziu.
- (ii) Každá množina $A \subseteq X$, ktorá je ohraničená a uzavretá vzhľadom na normu $\|\cdot\|$, je v tejto norme i kompaktná.

Dôkaz Vety 7.

Smer (i) \Rightarrow (ii) vyplýva z Poznámky 8 a Dôsledku 2. Nech platí výrok (ii), t.j., každá ohraničená a uzavretá podmnožina v X je kompaktná. Obzvlášť, jednotková sféra $S(0, 1)$ v (11) je teda množina kompaktná v priestore X . Predpokladajme sporom, že priestor X nemá konečnú dimenziu. Zvoľme ľubovoľný vektor $x_1 \in S(0, 1)$. Potom množina $A_1 := \text{Lin}\{x_1\}$ je zrejme vlastný algebraický podpriestor lineárneho priestoru X s dimenziou 1. V súlade s Vetou 6 je A_1 úplný normovaný priestor. Množina A_1 je preto uzavretá v X vzhľadom na normu $\|\cdot\|$, čo následne podľa Definície 6 znamená, že A_1 je vlastný podpriestor normovaného priestoru X . Z Rieszovej lemy 1 pre $\eta := \frac{1}{2}$ potom vyplýva, že existuje vektor $x_2 \in S(0, 1)$ taký, že

$$\rho(x_2, A_1) \geq \frac{1}{2}, \quad \text{a tak i} \quad \|x_2 - x_1\| \geq \frac{1}{2}.$$

Vektory x_1 a x_2 sú zrejme lineárne nezávislé. Položme $A_2 := \text{Lin}\{x_1, x_2\}$. Využívajúc analogické argumenty ako vyššie platí, že A_2 je vlastný podpriestor normovaného priestoru X s dimenziou 2. Podľa Rieszovej lemy 1 pre $\eta := \frac{1}{2}$ teda existuje prvok $x_3 \in S(0, 1)$ s vlastnosťou

$$\rho(x_3, A_2) \geq \frac{1}{2}, \quad \text{a tak i} \quad \|x_3 - x_1\| \geq \frac{1}{2} \quad \text{a} \quad \|x_3 - x_2\| \geq \frac{1}{2}.$$

Podobne, množina $A_3 := \text{Lin}\{x_1, x_2, x_3\}$ je vlastný podpriestor normovaného priestoru X s dimenziou 3, pričom existuje vektor $x_4 \in S(0, 1)$ spĺňajúci

Dôkaz Vety 7 (pokračovanie).

$$\rho(x_4, A_3) \geq \frac{1}{2}, \quad \text{a tak i} \quad \|x_4 - x_1\| \geq \frac{1}{2}, \quad \|x_4 - x_2\| \geq \frac{1}{2}, \quad \text{a} \quad \|x_4 - x_3\| \geq \frac{1}{2}.$$

Nakoľko priestor X je podľa predpokladu nekonečnorozmerný, môžeme v tomto procese pokračovať ďalej. Získame tak postupnosť $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq S(0, 1)$ s vlastnosťou $\|x_k - x_l\| \geq \frac{1}{2}$ pre každé dva rôzne indexy $k, l \in \mathbb{N}$. Daná postupnosť teda nemá žiadny hromadný bod, čo je však v rozpore s kompaktnosťou množiny $S(0, 1)$. Preto priestor X musí mať konečnú dimenziu, t.j., platí tvrdenie (i). ■

Poznámka 9

Všimnime si, že v predloženom dôkaze sme vlastne ukázali ekvivalenciu

priestor X má konečnú dimenziu práve vtedy, keď jednotková sféra je kompaktná.

Ďalej poznamenajme, že ďalšie významné kritérium týkajúce sa dimenzie normovaného priestoru je nasledujúce. Nech $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný lineárny priestor. Potom X má konečnú dimenziu práve vtedy, keď každá norma $\|\cdot\|_*$ na X je ekvivalentná s $\|\cdot\|$. Implikácia „ \Rightarrow ” je vo svetle Poznámky 8 obsahom Vety 5. Dôkaz opačnej implikácie je založený na pozorovaní, že v každom nekonečnorozmernom normovanom priestore X vieme k danej zvolenej norme $\|\cdot\|$ vždy zostrojiť novú normu $\|\cdot\|_*$ na X , ktorá nie je ekvivalentná s $\|\cdot\|$.

Obsah

- 1 Základné pojmy a vlastnosti
- 2 Normované lineárne priestory
- 3 Unitárne priestory**
- 4 Hilbertove priestory

Pojem skalárneho súčinu na lineárnom priestore

Definícia 11 (Unitárny priestor)

Nech X je lineárny priestor nad \mathbb{R} a $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ zobrazenie, ktoré pre každú trojicu prvkov $x, y, z \in X$ a každú dvojicu skalárov $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ spĺňa

P1 $\langle x, x \rangle \geq 0$ a $\langle x, x \rangle = 0$ práve vtedy, keď $x = 0$,

P2 $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$,

P3 $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$.

Zobrazenie $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sa nazýva **skalárny súčin** na X a dvojicu $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ označujeme ako **lineárny priestor so skalárnym súčinom**, resp. **unitárny priestor** nad \mathbb{R} .

Poznámka 10

V prípade lineárneho priestoru X nad telesom komplexných čísel \mathbb{C} je skalárny súčin $\langle \cdot, \cdot \rangle$ na X zobrazenie s hodnotami v \mathbb{C} , pričom číslo $\langle x, x \rangle$ je pre každý vektor $x \in X$ reálne. Komplexný skalárny súčin je definovaný pomocou rovnakých axiém ako v Definícii 11, až na P2, ktorá je nahradená podmienkou

P2* $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ pre každé $x, y \in X$.

Poznámka 11

Poznamenajme, že z axióm P2 a P3 reálneho skalárneho súčinu v Definícii 11 vyplýva jeho linearita i vzhľadom na druhú zložku, t.j., platí

$$\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle x, z \rangle \quad \text{pre každé } x, y, z \in X \text{ a } \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad (39)$$

ako možno ľahko overiť. Navyiac, z (39) s $\alpha = \beta = 0$ vyplýva $\langle x, 0 \rangle = 0$. Naproti tomu, komplexný skalárny súčin je antilineárny v druhej zložke, konkrétne

$$\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle + \overline{\beta} \langle x, z \rangle \quad \text{pre každé } x, y, z \in X \text{ a } \alpha, \beta \in \mathbb{C}. \quad (40)$$

Zdôraznime, že počas celej prednášky sa budeme zaoberať výhradne iba reálnym skalárnym súčinom.

Príklad 9

Pre dané $n \in \mathbb{N}$ nech $X := \mathbb{R}^n$. Potom zobrazenie

$$\langle x, y \rangle := \sum_{k=1}^n x_k y_k, \quad x = (x_1, \dots, x_n), \quad y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n, \quad (41)$$

je (reálny) skalárny súčin na lineárnom priestore X , ako sa môžeme ľahko presvedčiť. Dvojica $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ je teda n -rozmerný (reálny) unitárny priestor.

Príklad 10

Klasickým príkladom (reálneho) unitárneho priestoru s nekonečnou dimenziou je priestor l^2 , na ktorom je skalárny súčin definovaný predpisom

$$\langle x, y \rangle := \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k, \quad x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}, \quad y = \{y_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^2. \quad (42)$$

Poznamenajme, že konvergencia nekonečného radu v (42) je zaručená na základe Hölderovej (resp. Cauchyho) nerovnosti

$$\sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^2 \right)^{1/2}, \quad (43)$$

platiacej pre každé $n \in \mathbb{N}$. Limitovaním nerovnosti (43) pre $n \rightarrow \infty$ a využitím konvergencie nekonečných radov $\sum |x_k|^2$ a $\sum |y_k|^2$ dostávame absolútnu konvergenciu, a následne i konvergenciu radu v (42) pre každú dvojicu $x, y \in l^2$.

Veta 8 (Cauchy–Schwarzova–Buňakovského nerovnosť)

Nech X je unitárny priestor so skalárnym súčinom $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Potom platí nerovnosť

$$|\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle} \quad \text{pre každú dvojicu vektorov } x, y \in X. \quad (44)$$

Dôkaz Vety 8.

Nech x, y sú ľubovoľné vektory v X . Zrejme pre každé $t \in \mathbb{R}$ je vektor $tx + y$ prvkom priestoru X a podľa axiómy P1 v Definícii 11 platí

$$\langle tx + y, tx + y \rangle \geq 0 \quad (45)$$

Roznásobením súčinu v (45) v súlade s P2 a P3 v Definícii 11 a (39) dostávame

$$0 \leq \langle tx + y, tx + y \rangle = t^2 \langle x, x \rangle + 2t \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle. \quad (46)$$

Podľa (46) teda reálna kvadratická funkcia $f(t) := t^2 \langle x, x \rangle + 2t \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle$ nadobúda na \mathbb{R} iba nezáporné hodnoty. To znamená, že jej diskriminant

$$D = 4 \langle x, y \rangle^2 - 4 \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \leq 0, \quad (47)$$

z čoho ihneď vyplýva Cauchyho–Schwarzova–Buňakovského nerovnosť (44). ■

Poznámka 12

Využitím nerovnosti (44) je možné pomerne ľahko ukázať, že pre každý unitárny priestor X so skalárnym súčinom $\langle \cdot, \cdot \rangle$ je zobrazenie

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}, \quad x \in X, \quad (48)$$

normou na lineárnom priestore X . Kým platnosť prvých dvoch axiém v Definícii 4

Poznámka 12

je pre $\|\cdot\|$ v (48) zrejماً, trojuholníková nerovnosť N3 vyplýva z výpočtu

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &\stackrel{(48)}{=} \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + 2 \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \stackrel{(48)}{=} \|x\|^2 + 2 \langle x, y \rangle + \|y\|^2 \\ &\stackrel{(44), (48)}{\leq} \|x\|^2 + 2 \|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 \quad \text{pre každé } x, y \in X. \end{aligned}$$

Každý **unitárny priestor** X je teda zároveň i **normovaný lineárny priestor** s normou $\|\cdot\|$ v (48), ktorá je indukovaná príslušným skalárnym súčinom $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Poznamajme, že v tomto prípade sa daný skalárny súčin dá reprezentovať v tvare

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2), \quad x, y \in X, \quad (49)$$

ako sa môžeme ľahko presvedčiť aplikáciou formuly (48). Obzvlášť, indukovaná norma $\|\cdot\|$ spĺňa pre každé $x, y \in X$ tzv. **rovnoobežníkové pravidlo**

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2 (\|x\|^2 + \|y\|^2). \quad (50)$$

Definícia 12 (Hilbertov priestor)

Unitárny priestor X nad \mathbb{R} , ktorý je **úplný** vzhľadom na normu v (48) indukovanú daným skalárnym súčinom na X , sa nazýva (reálny) **Hilbertov priestor**.

Príklad 11

Je ľahko vidieť, že skalárny súčin $\langle \cdot, \cdot \rangle$ na \mathbb{R}^n zavedený v Príklade 9, indukuje v súlade s Poznámou 12 euklidovskú normu na \mathbb{R}^n predstavenú v Príklade 1 (pre $p = 2$). Obzvlášť, euklidovský priestor \mathbb{E}^n je úplný, a tak $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ je podľa Definície 12 n -rozmerný Hilbertov priestor. Na druhej strane, priestor l^2 v Príklade 10 je Hilbertov priestor s nekonečnou dimenziou. Odpovedajúci skalárny súčin v (42) v tomto prípade vytvára p -normu zavedenú v Príklade 2 pre $p = 2$.

Poznámka 13

Pomocou normy $\| \cdot \|$ na lineárnom priestore X zavedenej v Poznámke 12 je možné Cauchyho–Schwarzovu–Buňakovského nerovnosť (44) zapísať v tvare

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad \text{pre každé } x, y \in X. \quad (51)$$

Veta 9

Nech $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ je unitárny priestor. Potom $\langle \cdot, \cdot \rangle$ je spojité zobrazenie priestoru $X \times X$ do euklidovského priestoru \mathbb{E} .

Dôkaz Vety 9.

Nech $\{x_k\}, \{y_k\} \subseteq X$ sú dve postupnosti konvergentné v X vzhľadom na normu $\|\cdot\|$ v (48), t.j., existujú $x, y \in X$ tak, že $\|x_k - x\| \rightarrow 0$ a $\|y_k - y\| \rightarrow 0$ pre $k \rightarrow \infty$. Pomocou axióm skalárneho súčinu v Definícii 11 a Cauchyho–Schwarzovej–Buňakovského nerovnosti (51) odvodíme

$$\begin{aligned} |\langle x_k, y_k \rangle - \langle x, y \rangle| &= |\langle x_k, y_k \rangle - \langle x, y_k \rangle + \langle x, y_k \rangle - \langle x, y \rangle| \\ &= |\langle x_k - x, y_k \rangle + \langle x, y_k - y \rangle| \leq |\langle x_k - x, y_k \rangle| + |\langle x, y_k - y \rangle| \\ &\stackrel{(51)}{\leq} \|x_k - x\| \|y_k\| + \|x\| \|y_k - y\| \rightarrow 0 \quad \text{pre } k \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

pretože postupnosť $\{\|y_k\|\}$ je ohraničená. Preto $\lim_{k \rightarrow \infty} \langle x_k, y_k \rangle = \langle x, y \rangle$. ■

Veta 10 (Jordanova–von Neumannova)

Nech X je normovaný lineárny priestor s normou $\|\cdot\|$. Potom je táto norma vytvorená nejakým skalárnym súčinom $\langle \cdot, \cdot \rangle$ v zmysle (48) práve vtedy, keď platí rovnobežníkové pravidlo (50). V tomto prípade daný skalárny súčin spĺňa (49).

Definícia 13 (Izometria unitárnych priestorov)

Nech X a Y sú dva unitárne priestory so skalárnymi súčini $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$ a $\langle \cdot, \cdot \rangle_Y$. Hovoríme, že priestory $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle_X)$ a $(Y, \langle \cdot, \cdot \rangle_Y)$ sú **izometrické (lineárne izometrické, izometricky izomorfné)**, ak existuje bijektívne lineárne zobrazenie $F : X \rightarrow Y$ zachovávajúce skalárne súčiny, t.j., platí $\langle F(x), F(y) \rangle_Y = \langle x, y \rangle_X$ pre každé dva vektory $x, y \in X$.

Poznámka 14

Na základe výsledkov predchádzajúcej sekcie o normovaných priestoroch konečnej dimenzie a z Poznámky 11 ľahko odvodíme, že každý konečnorozmerný Hilbertov priestor s dimenziou n , $n \in \mathbb{N}$, je izometricky izomorfný s euklidovským priestorom \mathbb{E}^n , v ktorom je skalárny súčin definovaný podľa (41). Neskôr v prednáške ukážeme, že podobná klasifikácia funguje i v prípade **separabilných** Hilbertových priestorov s nekonečnou dimenziou. Konkrétne, dokážeme, že každý nekonečnorozmerný separabilný Hilbertov priestor je izometricky izomorfný s priestorom l^2 diskutovaným v Príkladoch 10 a 11.

Ortogonalita a ortonormalita

Definícia 14 (Ortogonalné a ortonormálne systémy vektorov)

Nech X je unitárny priestor so skalárnym súčinom $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Hovoríme, že vektory $x, y \in X$ sú **ortogonalné**, ak $\langle x, y \rangle = 0$. Neprázdny systém nenulových vektorov $S \subseteq X$ sa označuje ako **ortogonalný**, ak platí $\langle x, y \rangle = 0$ pre každé dva rôzne prvky $x, y \in S$. Ak navyše $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = 1$ pre každé $x \in S$, systém S sa nazýva **ortonormálny**.

Veta 11

Nech X je unitárny priestor so skalárnym súčinom $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a $S \subseteq X$ je ľubovoľný ortogonalný systém. Potom S je lineárne nezávislý vo vektorovom priestore X .

Dôkaz Vety 11.

Nech $\{x_1, \dots, x_m\} \subseteq S$, $m \in \mathbb{N}$, je nejaká konečná podmnožina vektorov a $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ m -tica skalárov spĺňajúca

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m = 0. \quad (52)$$

Využitím základných vlastností skalárneho súčinu potom dostávame

Dôkaz Vety 11 (pokračovanie).

$$\begin{aligned} 0 &= \langle x_i, 0 \rangle \stackrel{(52)}{=} \langle x_i, \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m \rangle = \lambda_1 \langle x_i, x_1 \rangle + \dots + \lambda_m \langle x_i, x_m \rangle \\ &= \lambda_i \langle x_i, x_i \rangle \quad \text{pre každé } i \in \{1, \dots, m\}, \end{aligned} \tag{53}$$

keďže v súlade s Definíciou 14 platí $\langle x_i, x_j \rangle = 0$ pre každé dva rôzne indexy $i, j \in \{1, \dots, m\}$. Nakoľko $\langle x_i, x_i \rangle \neq 0$ pre každé $i \in \{1, \dots, m\}$, z (53) máme rovnosť $\lambda_i = 0$ pre každý index $i \in \{1, \dots, m\}$. Podľa Definície 1 sú teda vektory x_1, \dots, x_m lineárne nezávislé v X . A keďže konečná podmnožina $\{x_1, \dots, x_m\} \subseteq S$ je ľubovoľná, i celý systém S je lineárne nezávislý v X . ■

Veta 12 (Ortonormalizácia lineárne nezávislej množiny)

Nech X je unitárny priestor so skalárnym súčynom $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a $A \subseteq X$ je nanajvyš spočítateľná podmnožina lineárne nezávislá v X . Potom existuje ortonormálny systém $S \subseteq X$ taký, že platí $\text{Lin } A = \text{Lin } S$.

Dôkaz Vety 12.

Tvrdenie sa dokáže pomocou štandardného **Gramovho–Schmidtovoho ortogonalizačného/ortonormalizačného procesu**, a preto ho vynechávame. ■

Veta 13

Nech X je separabilný unitárny priestor so skalárnym súčynom $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Potom každý ortogonálny systém $S \subseteq X$ je nanajvyš spočítateľný.

Dôkaz Vety 13.

Nech $\|\cdot\|$ je norma na X indukovaná príslušným skalárnym súčynom $\langle \cdot, \cdot \rangle$ podľa Poznámky 12 a nech $S \subseteq X$ je nejaký ortogonálny systém. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že systém S je ortonormálny, t.j., v zhode s Definíciou 14 platí $\|x\| = 1$ pre každé $x \in S$. Potom pre vzdialenosť každých dvoch rôznych prvkov $x, y \in S$ máme

$$\rho(x, y) = \|x - y\| \stackrel{(48)}{=} \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle} = \sqrt{\langle x, x \rangle - 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle} = \sqrt{2}. \quad (54)$$

Nech ďalej $N \subseteq X$ je spočítateľná podmnožina hustá v metrickom priestore (X, ρ) a označme $A := \{B(x, \frac{\sqrt{2}}{2}), x \in S\}$. Zrejme otvorené gule $B(x, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $x \in S$, sú v súlade s (54) vzájomne disjunktné, pričom každá z nich obsahuje aspoň jeden prvok množiny N . To znamená, že systém A je nutne nanajvyš spočítateľný, a tak i ortogonálny systém S je nanajvyš spočítateľný. ■

Definícia 15 (Úplné a uzavreté systémy vektorov)

Nech X je unitárny priestor so skalárnym súčinom $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a $A \subseteq X$ systém.

- (i) Systém A nazývame **úplným**, ak jediný prvok $x \in X$, ktorý spĺňa $\langle y, x \rangle = 0$ pre každé $y \in A$, je $x = 0$.
- (ii) Systém A sa označuje ako **uzavretý**, ak platí $\overline{\text{Lin } A} = X$, t.j., uzáver množiny všetkých konečných lineárnych kombinácií prvkov systému A je rovný celému priestoru X .

Definícia 16 (Ortogonalna/ortonormálna báza unitárneho priestoru)

Nech X je unitárny priestor. Každý uzavretý ortogonálny/ortonormálny systém $S \subseteq X$ sa nazýva **ortogonalna/ortonormálna báza** priestoru X .

Veta 14

Nech X je separabilný unitárny priestor so skalárnym súčinom $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Potom v priestore X existuje aspoň jedna ortonormálna báza.

Dôkaz Vety 14.

Nech $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X$ je podmnožina hustá v priestore X . Z tejto postupnosti vylúčime všetky jej členy x_l , $l \in \mathbb{N}$, ktoré sa dajú vyjadriť ako lineárna kombinácia prvkov x_i s indexami $i < l$. Získame tak nanajvyš spočítateľnú množinu $A \subseteq X$, ktorá je lineárne nezávislá X a zároveň $\overline{\text{Lin } A} = X$. Následne, v súlade s Vetou 12, jej ortonormalizáciou dostaneme nanajvyš spočítateľný ortonormálny systém $S \subseteq X$, ktorý spĺňa $\overline{\text{Lin } S} = X$. Podľa Definícií 15 a 16 je tak množina S ortonormálnou bázou priestoru X a dôkaz je hotový. ■

Príklad 12

Príkladom funkcionálneho unitárneho priestoru je množina $C[-\pi, \pi]$ reálnych funkcií spojitých na intervale $[-\pi, \pi]$, na ktorej je definovaný skalárny súčin tvaru

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) dx, \quad f, g \in C[-\pi, \pi]. \quad (55)$$

Ľahko vidíme, že odpovedajúca norma indukovaná týmto skalárnym súčinom je integrálna norma $\|\cdot\|_I$ zavedená v (8). Obzvlášť, v súlade s Príkladom 3 ($C[-\pi, \pi], \langle \cdot, \cdot \rangle$) nie je Hilbertov priestor. Jedná sa však o separabilný unitárny priestor a jednou z jeho ortonormálnych báz je tzv. **trigonometrický systém**

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (56)$$

Fourierove koeficienty a Fourierov rad

Definícia 17 (Fourierove koeficienty a Fourierov rad)

Nech X je unitárny priestor so skalárnym súčinom $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a $S = \{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X$ je spočítateľný ortonormálny systém. Pre dané $x \in X$ sa reálne čísla definované

$$c_k := \langle x, u_k \rangle, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (57)$$

nazývajú **Fourierove koeficienty** prvku x vzhľadom na systém S . Nekonečný rad $\sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k$ sa označuje ako **Fourierov rad** prvku x vzhľadom na systém S .

Poznámka 15

Pre daný spočítateľný ortonormálny systém $S = \{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X$ a dané $x \in X$ uvažujme postupnosť $\{s_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ čiastočných súčtov príslušného Fourierovho radu prvku x vzhľadom na S (tzv. **Fourierove polynómy** prvku x), t.j.,

$$s_n := \sum_{k=1}^n c_k u_k, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (58)$$

kde c_k , $k \in \mathbb{N}$, sú Fourierove koeficienty prvku x v (57). Budeme skúmať, kedy $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = x$ v norme $\|\cdot\|$ indukovanej daným skalárnym súčinom v (48).

Lema 2

Nech X je unitárny priestor so skalárnym súčynom $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $S = \{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X$ ortonormálny systém, $x \in X$ daný vektor, $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ odpovedajúca postupnosť jeho Fourierových koeficientov v (57) a $n \in \mathbb{N}$ pevný index. Potom pre každú n -tícu skalárov $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ platí nerovnosť

$$\|x - s_n\| \leq \left\| x - \sum_{k=1}^n \lambda_k u_k \right\|, \quad (59)$$

kde s_n je n -tý Fourierov polynóm prvku x definovaný v (58). Obzvlášť, rovnosť v (59) nastane práve vtedy keď $\lambda_k = c_k$ pre každé $k \in \{1, \dots, n\}$.

Dôkaz Lemy 2.

Položme $I := \|x - \sum_{k=1}^n \lambda_k u_k\|$. Využitím Definície 17 a základných vlastností skalárneho súčinu v Definícii 11 a Poznámke 11 postupne máme

$$\begin{aligned} I^2 &= \left\| x - \sum_{k=1}^n \lambda_k u_k \right\|^2 \stackrel{(48)}{=} \left\langle x - \sum_{k=1}^n \lambda_k u_k, x - \sum_{l=1}^n \lambda_l u_l \right\rangle \\ &= \langle x, x \rangle - \sum_{l=1}^n \lambda_l \underbrace{\langle x, u_l \rangle}_{c_l} - \sum_{k=1}^n \lambda_k \underbrace{\langle u_k, x \rangle}_{c_k} + \sum_{k,l=1}^n \lambda_k \lambda_l \underbrace{\langle u_k, u_l \rangle}_{\delta_{kl}} \end{aligned}$$

Dôkaz Lemy 2 (pokračovanie).

$$\begin{aligned}
 & \stackrel{(48)}{=} \|x\|^2 - \sum_{l=1}^n \lambda_l c_l - \sum_{k=1}^n \lambda_k c_k + \sum_{m=1}^n \lambda_m^2 \\
 & \stackrel{k=l=m}{=} \|x\|^2 + \sum_{k=1}^n \underbrace{(\lambda_k^2 - 2\lambda_k c_k + c_k^2)}_{|\lambda_k - c_k|^2} - \sum_{k=1}^n |c_k|^2 \\
 & = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |c_k|^2 + \sum_{k=1}^n |\lambda_k - c_k|^2.
 \end{aligned}$$

Z tejto analýzy vyplýva, že hodnota I , ako funkcia premenných $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, je minimálna práve pre voľbu $\lambda_k = c_k$ pre každé $k \in \{1, \dots, n\}$. Teda dostávame

$$I \geq I(c_1, \dots, c_n) = \left\| x - \sum_{k=1}^n c_k u_k \right\| \stackrel{(58)}{=} \|x - s_n\|,$$

čo dokazuje platnosť nerovnosti (59). Dôkaz je hotový. ■

Poznámka 16

Výsledok Lemy 2 ukazuje, že spomedzi všetkých lineárnych kombinácií vektorov $\{u_1, \dots, u_n\} \subseteq S$ **aproximuje prvok** x v norme $\|\cdot\|$ **najlepšie** práve **čiasťový súčet** s_n **Fourierovho radu** vektora x vzhľadom na systém S . Konkrétne, z dôkazu Lemy 2 pre každú n -tícu skalárov $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ vyplýva formula

$$\underbrace{\left\| x - \sum_{k=1}^n \lambda_k u_k \right\|^2}_{\text{chyba aproximácie}} = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |c_k|^2 + \sum_{k=1}^n |\lambda_k - c_k|^2. \quad (60)$$

Dôsledok 3 (Besselova nerovnosť)

S označením a predpokladmi Lemy 2 platí pre každé $x \in X$ a $n \in \mathbb{N}$ identita

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^n |c_k|^2 + \|x - s_n\|^2. \quad (61)$$

Obzvlášť, platí tzv. **Besselova nerovnosť**

$$\sum_{k=1}^n |c_k|^2 \leq \|x\|^2 \text{ pre každé } n \in \mathbb{N}, \quad \text{resp.} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leq \|x\|^2. \quad (62)$$

Dôkaz Dôsledku 3.

Formula (61) ihneď vyplýva z rovnosti (60) pre $\lambda_k := c_k$, $k \in \{0, \dots, n\}$. Keďže $\|x - s_n\|^2 \geq 0$ pre každé $n \in \mathbb{N}$, z (61) máme $\sum_{k=1}^n |c_k|^2 \leq \|x\|^2$, $n \in \mathbb{N}$, čo následne pre $n \rightarrow \infty$ implikuje Besselovu nerovnosť (62). ■

Poznámka 17

Významným dôsledkom Besselovej nerovnosti (62) je skutočnosť, že pre každý daný ortonormálny systém $S = \{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X$ je nekonečný rad $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$ pre každý vektor $x \in X$ **konvergentný**, t.j., postupnosť $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ Fourierových koeficientov vektora $x \in X$ vzhľadom na systém S je prvkom Hilbertovho priestoru l^2 z Príkladov 10 a 11. Obzvlášť, platí potom podmienka $\lim_{k \rightarrow \infty} c_k = 0$.

Dôsledok 4 (Parsevalova rovnosť)

S označením a predpokladmi Lemy 2 platí pre $x \in X$ tzv. **Parsevalova rovnosť**

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \|x\|^2 \quad (63)$$

práve vtedy, Fourierov rad $\sum_{k=0}^{\infty} c_k u_k = x$ v norme $\|\cdot\|$, t.j., $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = x$.

Dôkaz Dôsledku 4.

Uvedená ekvivalencia bezprostredne vyplýva z formuly (61) pre $n \rightarrow \infty$. ■

Veta 15

Nech X je unitárny priestor so skalárnym súčinom $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a $S = \{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X$ ortonormálny systém. Potom S je uzavretý vzhľadom na X v zmysle Definície 15(ii) práve vtedy, keď každý prvok $x \in X$ spĺňa Parsevalovu rovnosť (63) vzhľadom na systém S .

Dôkaz Vety 15.

Predpokladajme, že systém S je uzavretý vzhľadom na X a nech $x \in X$ je ľubovoľný vektor. V súlade s Definíciou 15(ii) potom pre každé $\varepsilon > 0$

existuje index $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a skaláry $\lambda_1, \dots, \lambda_{n_\varepsilon} \in \mathbb{R}$ tak, že

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n_\varepsilon} \lambda_k u_k \right\| \leq \varepsilon.$$

Nech $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ je postupnosť Fourierových koeficientov prvku x vzhľadom na systém S . Zvoľme nejaké $\varepsilon > 0$. Využitím formuly (60) postupne dostávame

Dôkaz Vety 15 (pokračovanie).

$$\|x\|^2 \stackrel{(60)}{=} \left\| x - \sum_{k=1}^{n_\varepsilon} \lambda_k u_k \right\|^2 + \sum_{k=1}^{n_\varepsilon} |c_k|^2 - \sum_{k=1}^{n_\varepsilon} |\lambda_k - c_k|^2 \leq \varepsilon^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2, \quad (64)$$

keďže podľa Poznámky 17 nekonečný rad $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$ konverguje. Nerovnosť (64) zrejme platí pre každé $\varepsilon > 0$, a tak nutne $\|x\|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$. Na druhej strane, z Dôsledku 3 vieme, že vektor x spĺňa Besselovu nerovnosť (62), t.j., $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leq \|x\|^2$. Prvok x teda spĺňa Parsevalovu rovnosť (63) vzhľadom na systém S . Naopak, nech každý vektor $x \in X$ vyhovuje Parsevalovej rovnosti vzhľadom na systém S , t.j., platí $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \|x\|^2$, kde $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ je odpovedajúca postupnosť Fourierových koeficientov prvku x vzhľadom na S . Potom podľa Dôsledku 4 pre každé $x \in X$ máme $x = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$, kde s_n , $n \in \mathbb{N}$, je n -tý Fourierov polynóm v (58). Obzvlášť, to znamená, že $\overline{\text{Lin } S} = X$, a tak v zhode s Definíciou 15(ii) je systém S uzavretý vzhľadom na priestor X . ■

Poznámka 18

Z Vety 14 vieme, že každý separabilný unitárny priestor X má ortonormálnu bázu, t.j., uzavretý ortonormálny systém. Podľa Vety 15 teda v takomto priestore X existuje ortonormálny systém, vzhľadom na ktorý každé $x \in X$ spĺňa (63).

Rieszova–Fischerova veta

Poznámka 19

Nech X je unitárny priestore so skalárnym súčinom $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a $S = \{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X$ je ortonormálny systém. V predchádzajúcej sekcii sme ukázali, že pre každý prvok $x \in X$ postupnosť $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ jeho Fourierových koeficientov v (57) patrí do priestoru l^2 (Poznámka 17). Okrem toho sme v Dôsledku 4 podali nutnú a postačujúcu podmienku na to, aby pre daný vektor $x \in X$ príslušný **Fourierov rad** $\sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k$ **konvergoval** k x v norme priestoru X . Konkrétne, platí ekvivalencia

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| x - \sum_{k=1}^n c_k u_k \right\| = 0 \quad \iff \quad \text{rad } \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \text{ konverguje so súčtom } \|x\|^2.$$

Tieto poznatky teraz rozšírime. Dokážeme, že pre daný ortonormálny systém S **jediné** rady typu $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k u_k$, ktoré **konvergujú** v X , sú **Fourierove rady**. Ďalej ukážeme, že v prípade **Hilbertovho priestoru**, t.j., úplného unitárneho priestoru,

- každá postupnosť $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ z priestoru l^2 je postupnosť Fourierových koeficientov nejakého prvku $x \in X$ vzhľadom na S ;
- každý **Fourierov rad** $\sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k$ **konverguje** v priestore X .

Tieto výsledky sú obsiahnuté vo Vete 17 v nasledujúcom výklade.

Lema 3

Nech X je unitárny priestor so skalárnym súčinom $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a $S = \{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X$ je ortonormálny systém. Nech $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ je postupnosť reálnych čísel s vlastnosťou, že rad $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k u_k$ je konvergentný v priestore X so súčtom x . Potom $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k u_k$ je Fourierov rad prvku x vzhľadom na systém S , t.j., čísla λ_k , $k \in \mathbb{N}$, sú Fourierove koeficienty vektora x definované v (57).

Dôkaz Lemy 3.

V zhode s predpokladmi platí $x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \lambda_k u_k$. Využijúc spojitosť skalárneho súčinu $\langle \cdot, \cdot \rangle$ podľa Vety 9, pre každý daný index $m \in \mathbb{N}$ potom máme

$$\begin{aligned} \langle x, u_m \rangle &= \left\langle \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k u_k \right), u_m \right\rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\langle \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k u_k \right), u_m \right\rangle \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \lambda_k \underbrace{\langle u_k, u_m \rangle}_{\delta_{km}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_m = \lambda_m, \end{aligned}$$

čo so zreteľom na (57) dokazuje tvrdenie. ■

Veta 16 (Rieszova–Fischerova)

Nech X je Hilbertov priestor so skalárnym súčinom $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a $S = \{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X$ je ortonormálny systém. Nech $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ je ľubovoľná postupnosť z priestoru l^2 , t.j., rad $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$ konverguje. Potom rad $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k u_k$ je konvergentný v priestore X , t.j., existuje vektor $x \in X$ taký, že $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k u_k = x$ v norme X . Navyiac, čísla λ_k , $k \in \mathbb{N}$, sú Fourierove koeficienty prvku x vzhľadom na systém S .

Dôkaz Vety 16.

Nech $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ je dané ako v predpokladoch vety a uvažujme postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ prvkov priestoru X definovanú $x_n := \sum_{k=1}^n \lambda_k u_k$, $n \in \mathbb{N}$. Ukážeme, že postupnosť $\{x_n\}$ je cauchyovská v norme $\|\cdot\|$ priestoru X . Pre $n > m$ máme

$$\begin{aligned} \|x_n - x_m\|^2 &= \left\| \sum_{k=1}^n \lambda_k u_k - \sum_{k=1}^m \lambda_k u_k \right\|^2 = \left\| \sum_{k=m+1}^n \lambda_k u_k \right\|^2 \\ &\stackrel{(48)}{=} \left\langle \left(\sum_{k=m+1}^n \lambda_k u_k \right), \left(\sum_{l=m+1}^n \lambda_l u_l \right) \right\rangle \\ &= \sum_{k,l=m+1}^n \lambda_k \lambda_l \underbrace{\langle u_k, u_l \rangle}_{\delta_{kl}} = \sum_{k=m+1}^n |\lambda_k|^2. \end{aligned} \tag{65}$$

Dôkaz Vety 16 (pokračovanie).

V zhode s predpokladmi nekonečný rad $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$ konverguje, a preto podľa Cauchyho–Bolzanovho kritéria platí

pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pre každé $n > m \geq n_0$ platí $\sum_{k=m+1}^n |\lambda_k|^2 < \varepsilon^2$

So zreteľom na identitu (65) je však tento výrok ekvivalentný s reláciou

pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pre každé $n > m \geq n_0$ platí $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$.

Teda skutočne postupnosť $\{x_n\}$ je cauchyovská v norme $\|\cdot\|$. A keďže priestor X je v súlade s Definíciou 12 úplný, postupnosť $\{x_n\}$ je následne i konvergentná v priestore X , t.j., existuje $x \in X$ tak, že $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. Inak povedané, rad $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k u_k = x$ v norme priestoru X . Skutočnosť, že sa jedná o Fourierov rad prvku x vzhľadom na systém S , vyplýva z Lemy 3. Dôkaz je kompletný. ■

Poznámka 20

Poznamenajme, že podľa Dôsledku 4 limitný vektor x spĺňa Parsevalovu rovnosť (63), t.j., platí $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 = \|x\|^2$.

Dôsledok 5

Nech X je Hilbertov priestor so skalárnym súčinom $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a $S = \{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X$ je ortonormálny systém. Nech $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ je nejaká postupnosť reálnych čísiel. Potom rad $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k u_k$ konverguje v priestore X práve vtedy, keď čísla λ_k , $k \in \mathbb{N}$, sú Fourierove koeficienty vhodného prvku $x \in X$ vzhľadom na systém S .

Dôkaz Dôsledku 5.

Smer " \Rightarrow " je obsahom Lemy 3. Platnosť implikácie " \Leftarrow " je dôsledkom Rieszovej-Fischerovej vety 16. Konkrétne, ak λ_k , $k \in \mathbb{N}$, sú Fourierove koeficienty prvku $x \in X$, potom podľa Poznámky 17 je číselný rad $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$ konvergentný, a teda postupnosť $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^2$. To následne podľa Rieszovej-Fischerovej vety 16 dokazuje konvergenciu radu $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k u_k$ v norme priestoru X . ■

Poznámka 21

Je nutné zdôrazniť, že v prípade všeobecného spočítateľného ortonormálneho systému S v Hilbertovom priestore X **nie je** vektor $x \in X$ v Dôsledku 5 pre danú postupnosť $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ **určený jednoznačne**. Na druhej strane, v súlade s Lemou 3 práve jeden z takýchto vektorov je súčtom radu $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k u_k$ v priestore X .

Veta 17 (Zhrnutie a doplnenie)

Nech X je Hilbertov priestor so skalárnym súčinom $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a $S = \{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X$ je ortonormálny systém. Nech $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ je nejaká postupnosť reálnych čísel. Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné.

- (i) Postupnosť $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ je prvkom priestoru l^2 .
- (ii) Rad $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k u_k$ konverguje v priestore X .
- (iii) Existuje vektor $x \in X$ s vlastnosťou, že čísla λ_k , $k \in \mathbb{N}$, sú jeho Fourierove koeficienty vzhľadom na systém S .

Naviac v prípade, ak systém S je **úplný** vzhľadom na X , je vektor x z časti (iii) určený **jednoznačne** a platí $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k u_k = x$ v norme priestoru X .

Dôkaz Vety 17.

Implikácia "(i) \Rightarrow (ii)" vyplýva z Rieszovej–Fischerovej vety 16, ekvivalencia tvrdení (ii) a (iii) je obsahom Dôsledku 5, a napokon platnosť implikácie "(iii) \Rightarrow (i)" je komentovaná v Poznámke 17. Stačí teda dokázať jednoznačnosť vektora x z časti (iii) v prípade úplného systému ortonormálneho S . Nech $y \in X$ je ďalší prvok, ktorý má za svoje Fourierove koeficienty čísla λ_k , $k \in \mathbb{N}$, t.j., podľa (57)

$$\langle x, u_k \rangle = \lambda_k = \langle y, u_k \rangle \quad \text{pre každé } k \in \mathbb{N}.$$

Dôkaz Vety 17 (pokračovanie).

Potom $\langle x - y, u_k \rangle = 0$ pre každé $k \in \mathbb{N}$ a vďaka úplnosti systému $S = \{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ podľa Definície 15(i) dostávame rovnosť $x = y$. Napokon, v súlade s Poznámkou 21 daný jediný vektor x nutne spĺňa $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k u_k = x$. ■

Definícia 18 (Ortogonálny doplnok uzavretého podpriestoru)

Nech X je unitárny priestor so skalárnym súčinom $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a $A \subseteq X$ (uzavretý) podpriestor. Množinu A^{\perp} definovanú

$$A^{\perp} := \{x \in X, \langle x, y \rangle = 0 \text{ pre každé } y \in A\} \quad (66)$$

nazývame **ortogonálny doplnok** podpriestoru A v unitárnom priestore X .

Poznámka 22

Zrejme pre každý podpriestor $A \subseteq X$ je ortogonálny doplnok A^{\perp} z Definície 18 (uzavretým) podpriestorom v X a platí $A \subseteq (A^{\perp})^{\perp}$. Je nutné zdôrazniť, že v prípade všeobecného unitárneho priestoru nemusí posledná inklúzia nutne prechádzať na rovnosť. Ak však X je Hilbertov priestor, potom vždy $A = (A^{\perp})^{\perp}$, ako dokážeme v Dôsledku 6. Dodajme, že pre každý unitárny priestor X platia rovnosti $X^{\perp} = \{0\}$ a $\{0\}^{\perp} = X$.

Veta 18

Nech X je Hilbertov priestor so skalárnym súčinom $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Potom ľubovoľný ortonormálny systém $S \subseteq X$ je uzavretý v X práve vtedy, keď je úplný v X .

Dôkaz Vety 18.

Nech ortonormálny systém S je uzavretý vzhľadom na X a nech vektor $x \in X$ spĺňa $\langle u, x \rangle = 0$ pre každé $u \in S$. V súlade s Definíciou 15(ii) existuje postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \text{Lin } S$ taká, že $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ v norme $\|\cdot\|$. Potom ale nutne platí $\langle x_n, x \rangle = 0$ pre každé $n \in \mathbb{N}$, a následne

$$\|x\|^2 \stackrel{(48)}{=} \langle x, x \rangle = \left\langle \lim_{n \rightarrow \infty} x_n, x \right\rangle \stackrel{\text{Veta 9}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, x \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0,$$

t.j., vektor $x = 0$. Podľa Definície 15(i) je teda systém S úplný. Naopak, nech systém S je úplný vzhľadom na X a zvolme ľubovoľný vektor $x \in (\overline{\text{Lin } S})^{\perp}$. Nakoľko $S \subseteq \overline{\text{Lin } S}$, podľa Definície 18 platí $\langle x, u \rangle = 0$ pre každé $u \in S$. Vďaka úplnosti systému S je potom $x = 0$, v súlade s Definíciou 15(i). Takže podpriestor $(\overline{\text{Lin } S})^{\perp} = \{0\}$, a následne podľa Poznámky 22 máme

$$\overline{\text{Lin } S} = \left((\overline{\text{Lin } S})^{\perp} \right)^{\perp} = \{0\}^{\perp} = X.$$

V zhode s Definíciou 15(ii) je teda systém S uzavretý a dôkaz je hotový. ■

Poznámka 23

Tvrdenie Vety 18 je s ohľadom na Definíciu 16 ekvivalentné s výrokom, že v Hilbertovom priestore X je nejaký ortonormálny systém S úplný práve vtedy, keď je ortonormálnou bázou priestoru X . Obzvlášť, nie je ťažké si premyslieť, že ak S je nanajvyš spočítateľný, je priestor X v tomto prípade nutne separabilný. Na druhej strane, každý separabilný Hilbertov priestor má nanajvyš spočítateľnú ortonormálnu bázu (kombinácia Viet 13 a 14). Vo svetle výsledkov Vety 17 potom dostávame nasledujúce pozorovanie. Nech X je separabilný Hilbertov priestor so skalárnym súčinom $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a $S = \{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X$ je nejaká jeho ortonormálna báza. Potom každý vektor $x \in X$ možno jednoznačne vyjadriť v tvare

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k, \quad \text{kde } c_k = \langle x, u_k \rangle \text{ pre každé } k \in \mathbb{N}. \quad (67)$$

Naviac, postupnosť $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ je prvkom priestoru l^2 a platí $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$.

Poznámka 24

Doplňme, že všetky prezentované výsledky týkajúce sa Fourierových radov platia pre ľubovoľné, t.j., i pre nespočítateľné ortonormálne systémy S .

Obsah

- 1 Základné pojmy a vlastnosti
- 2 Normované lineárne priestory
- 3 Unitárne priestory
- 4 Hilbertove priestory**

Separabilný Hilbertov priestor

Veta 19 (O izomorfizme)

Každé dva separabilné Hilbertove priestory s nekonečnou dimenziou sú izometricky izomorfné. Navyiac, každý nekonečnorozmerný separabilný Hilbertov priestor je izometricky izomorfný s priestorom l^2 .

Dôkaz Vety 19.

Je zrejmé, že stačí dokázať druhú časť tvrdenia. Nech H je ľubovoľný nekonečnorozmerný separabilný Hilbertov priestor so skalárnym súčinom $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a $S = \{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ je v zhode s Poznámkou 23 nejaká jeho ortonormálna báza. Využitím Vety 17 môžeme ľahko overiť, že priradenie Ψ definované

$$\text{pre každé } x \in H \text{ je } \Psi(x) = \{c_k\}_{k=1}^{\infty}, \text{ kde } c_k = \langle x, u_k \rangle \text{ pre každé } k \in \mathbb{N}, \quad (68)$$

je bijektívne zobrazenie medzi prvkami priestorov H a l^2 . Okrem toho, pre každú dvojicu vektorov $x, y \in H$ a každý skalár $\lambda \in \mathbb{R}$ platí

$$\Psi(x + y) \stackrel{(68)}{=} \{\langle x + y, u_k \rangle\}_{k=1}^{\infty} = \{\langle x, u_k \rangle + \langle y, u_k \rangle\}_{k=1}^{\infty} \stackrel{(68)}{=} \Psi(x) + \Psi(y),$$

$$\Psi(\lambda x) \stackrel{(68)}{=} \{\langle \lambda x, u_k \rangle\}_{k=1}^{\infty} = \{\lambda \langle x, u_k \rangle\}_{k=1}^{\infty} \stackrel{(68)}{=} \lambda \Psi(x),$$

Dôkaz Vety 19 (pokračovanie).

a tak zobrazenie Ψ je lineárne. Napokon ukážeme, že Ψ zachováva skalárny súčin. Nech $x, y \in H$ sú ľubovoľné vektory a $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}, \{d_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^2$ príslušné postupnosti ich Fourierových koeficientov v (57) vzhľadom na systém S . V súlade s (67) a (68) potom platí

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n c_k u_k, \quad y = \sum_{k=1}^{\infty} d_k u_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n d_k u_k. \quad (69)$$

Využitím vlastností skalárneho súčinu v Definícii 11 a Vete 9 postupne máme

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &\stackrel{(69)}{=} \left\langle \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n c_k u_k \right), y \right\rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\langle \left(\sum_{k=1}^n c_k u_k \right), y \right\rangle \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n c_k \langle u_k, y \rangle \stackrel{(69)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n c_k d_k = \sum_{k=1}^{\infty} c_k d_k \\ &\stackrel{(42)}{=} \langle \{c_k\}_{k=1}^{\infty}, \{d_k\}_{k=1}^{\infty} \rangle_{l^2} \stackrel{(68)}{=} \langle \Psi(x), \Psi(y) \rangle_{l^2}, \end{aligned}$$

kde $\langle \cdot, \cdot \rangle_{l^2}$ je skalárny súčin v priestore l^2 zavedený v Príklade 10. Zobrazenie Ψ je teda v zhode s Definíciou 13 izometrický izomorfizmus priestorov H a l^2 . ■

Lema 4

Nech (M, ρ) je separabilný metrický priestor a $N \subseteq M$ podmnožina. Potom (N, ρ) je tiež separabilný metrický priestor.

Poznámka 25

Z Poznámky 14, Vety 19 a Lemy 4 vyplýva, že každý (uzavretý) podpriestor N ľubovoľného separabilného Hilbertovho priestoru H je buď Hilbertov priestor konečnej dimenzie (izometricky izomorfný s euklidovským priestorom \mathbb{E}^n pre vhodné $n \in \mathbb{N}$) alebo nekonečnorozmerný separabilný Hilbertov priestor (izometricky izomorfný s priestorom l^2). Navyiac, v podpriestore N je možné vždy vybrať ortonormálny systém $S = \{u_k\}_{k=1}^m$, kde $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, tak, aby $\overline{\text{Lin } S} = N$.

Príklad 13

Poznamenajme, že okrem unitárneho priestoru l^2 je ďalšou realizáciou separabilného Hilbertovho priestoru s nekonečnou dimenziou úplný obal unitárneho priestoru $(\mathcal{C}[-\pi, \pi], \langle \cdot, \cdot \rangle)$ prezentovaného v Príklade 12.

Veta o projekcii do uzavretého podpriestoru

Veta 20 (O projekcii do uzavretého podpriestoru)

Nech H je Hilbertov priestor so skalárnym súčinom $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a $A \subseteq H$ (uzavretý) podpriestor. Potom každé $x \in H$ sa dá jednoznačne vyjadriť v tvare $x = y + z$, kde $y \in A$ a $z \in A^\perp$. Vektor y sa nazýva **projekcia** prvku x do podpriestoru A .

Dôkaz Vety 20.

Dokážeme najprv existenciu daného rozkladu pre každý prvok $x \in H$. Ak $x \in A$, potom stačí vziať $y = x$ a $z = 0$. Predpokladajme preto, že vektor $x \in H$ nie je prvkom uzavretého podpriestoru A , t.j., vzdialenosť $d := \rho(x, A) > 0$. Pripomeňme, že metrika ρ na H je indukovaná normou $\| \cdot \|$ danou skalárnym súčinom $\langle \cdot, \cdot \rangle$ podľa (3) a (48). Obzvlášť, platí

$$0 < d \leq \|x - u\| \quad \text{pre každé } u \in A. \quad (70)$$

Naviac, existuje postupnosť $\{y_k\}_{k=1}^\infty \subseteq A$ s vlastnosťou

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x - y_k\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \rho(x, y_k) = d. \quad (71)$$

Ukážeme, že postupnosť $\{y_k\}_{k=1}^\infty$ je cauchyovská. Využitím rovnobežníkového pravidla (50) pre každé dva indexy $m, n \in \mathbb{N}$ postupne máme

Dôkaz Vety 20 (pokračovanie).

$$\begin{aligned}
 \|y_n - y_m\|^2 &= \|(x - y_m) - (x - y_n)\|^2 \\
 &\stackrel{(50)}{=} 2\|x - y_m\|^2 + 2\|x - y_n\|^2 - \|2x - y_n - y_m\|^2 \\
 &= 2\|x - y_m\|^2 + 2\|x - y_n\|^2 - 4\left\|x - \frac{1}{2}(y_n + y_m)\right\|^2 \quad (72)
 \end{aligned}$$

Nakoľko vektor $u := \frac{1}{2}(y_n + y_m)$ je zrejme prvkom podpriestoru A , podľa (70) platí $d \leq \|x - u\|$, a tak pomocou (72) dostávame nerovnosť

$$\|y_n - y_m\|^2 \leq 2\|x - y_m\|^2 + 2\|x - y_n\|^2 - 4d^2 \quad (73)$$

A keďže z (71) vieme, že $\lim_{m \rightarrow \infty} \|x - y_m\| = d = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x - y_n\|$, získaná nerovnosť (73) implikuje reláciu

$$\|y_n - y_m\| \rightarrow 0 \quad \text{pre } \min\{m, n\} \rightarrow \infty. \quad (74)$$

Teda postupnosť $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ je skutočne cauchyovská a vďaka úplnosti priestoru H i konvergentná v H . Označme $y := \lim_{k \rightarrow \infty} y_k$. Keďže podpriestor A je uzavretý, vektor $y \in A$. Navyše, využijúc spojitosť normy $\|\cdot\|$ v súlade s Vetou 2, z relácie (71) vyplýva rovnosť $\|x - y\| = d$. Položme $z := x - y$. Ukážeme, že vektor z je prvkom ortogonálneho doplnku A^\perp , t.j., v zhode s (66) spĺňa $\langle z, u \rangle = 0$ pre každé $u \in A$. Zvoľme nejaký vektor $u \in A$. Potom pre každý skalár $t \in \mathbb{R}$ je

Dôkaz Vety 20 (pokračovanie).

$$z + tu = x - y + tu = x - \underbrace{(y - tu)}_{\in A}, \quad \text{a tak podľa (70) platí } \|z + tu\| \geq d.$$

Následne, využitím formuly (48) a základných vlastností skalárneho súčinu máme

$$d^2 \leq \|z + tu\|^2 \stackrel{(48)}{=} \langle z + tu, z + tu \rangle = \langle z, z \rangle + 2t \langle z, u \rangle + t^2 \langle u, u \rangle$$

$$\stackrel{(48)}{=} \underbrace{\|z\|^2}_{d^2} + t^2 \|u\|^2 + 2t \langle z, u \rangle, \quad \text{a tak } t^2 \|u\|^2 + 2t \langle z, u \rangle \geq 0 \text{ pre každé } t \in \mathbb{R}.$$

Nie je ťažké si premyslieť, že posledná nerovnosť môže byť splnená pre každé $t \in \mathbb{R}$ jedine vtedy, keď $\langle z, u \rangle = 0$. Preto $z \in A^\perp$, a tak platí rozklad $x = y + z$. Zostáva dokázať jednoznačnosť tohto rozkladu. Ak $\tilde{y} \in A$ a $\tilde{z} \in A^\perp$ je iná dvojica vektorov spĺňajúca $x = \tilde{y} + \tilde{z}$, potom platí $y + z = \tilde{y} + \tilde{z}$, a následne $y - \tilde{y} = \tilde{z} - z$. Avšak vektor $y - \tilde{y} \in A$ a vektor $\tilde{z} - z \in A^\perp$, takže podľa Definície 18 máme

$$\|y - \tilde{y}\|^2 \stackrel{(48)}{=} \langle y - \tilde{y}, y - \tilde{y} \rangle = \langle \tilde{z} - z, y - \tilde{y} \rangle = 0,$$

a tak $\tilde{y} = y$, a následne i $\tilde{z} = z$. Dôkaz je teraz kompletný. ■

Poznámka 26

Je potrebné zdôrazniť, že Veta 20 o projekcii do uzavretého podpriestoru platí pre ľubovoľný Hilbertov priestor H , špeciálne teda i pre neseperabilné priestory. Poznamenajme, že výsledok Vety 20 možno ekvivalentne vyjadriť v tvare

$$H = A \oplus A^\perp, \quad (75)$$

kde symbol \oplus reprezentuje tzv. **direktný (priamy) súčet** podpriestorov A a A^\perp .

Dôsledok 6

Nech H je Hilbertov priestor so skalárnym súčinom $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a $A \subseteq H$ (uzavretý) podpriestor. Potom platí rovnosť $A = (A^\perp)^\perp$.

Dôkaz Dôsledku 6.

V súlade s Poznámkou 22 zrejme stačí dokázať inklúziu $(A^\perp)^\perp \subseteq A$. Nech $x \in (A^\perp)^\perp$ je ľubovoľný vektor. Z Vety 20 vieme, že existujú vektory $y \in A$ a $z \in A^\perp$ s vlastnosťou $x = y + z$. Obzvlášť, podľa (66) máme $\langle x, z \rangle = 0 = \langle y, z \rangle$, a tak $\|z\|^2 = \langle z, z \rangle = 0$, čo znamená, že vektor $z = 0$. Preto $x = y \in A$. ■

Dôsledok 7

Nech H je separabilný Hilbertov priestor a $S \subseteq H$ je ľubovoľný ortonormálny systém. Potom je možné systém S rozšíriť na ortonormálnu bázu priestoru H .

Dôkaz Dôsledku 7.

Z Vety 13 vyplýva, že systém S je nanajvyš spočítateľný, t.j., $S = \{u_k\}_{k=1}^m$, kde $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Označme $A := \overline{\text{Lin } S}$. Potom zrejme $A \subseteq H$ je (uzavretý) podpriestor Hilbertovho priestoru H a podľa (75) platí rovnosť $H = A \oplus A^\perp$. Ďalej, vďaka Poznámke 25 vieme, že v (uzavretom) podpriestore A^\perp existuje nanajvyš spočítateľný ortonormálny systém $T = \{v_k\}_{k=1}^n$, kde $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ s vlastnosťou $\overline{\text{Lin } T} = A^\perp$. Nie je ťažké si premyslieť, že v súlade s Definíciou 15(i) potom $S \cup T$ predstavuje úplný ortonormálny systém v H . Napokon, podľa Vety 18 je systém $S \cup T$ uzavretý vzhľadom na H , a tak v zhode s Definíciou 16 tvorí ortonormálnu bázu priestoru H . Dôkaz je hotový. ■

Poznámka 27

Poznamenajme, že Dôsledok 7 platí i pre neseperabilný Hilbertov priestor.