5. CVIČENIE

(P5) (PREDNÁŠKA LP)

$A \subseteq \ell^1$, A je vlastný podpriestor (napr. $\{\frac{1}{2^n}\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^1 \setminus A$)

⇝ ukážeme, $\overline{A} = \ell^1$

⇝ nech $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell^1$; zvoľme $\varepsilon > 0$; potom existuje $n \in \mathbb{N}$ také, že $\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k| < \varepsilon$

⇝ definujme $y = \{y_k\}_{k=1}^{\infty}$: $y_k := \begin{cases} x_k & ; k \in \{1, \dots, n\} \\ 0 & ; k \geq n+1 \end{cases}$

⇝ zrejmé, že $y \in A$; ďalej:

$$\varrho^1(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k| = \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k| < \varepsilon$$

⇒ množina A je hustá v ℓ^1, t.j., $\overline{A} = \ell^1$

⇝ $A \subsetneq \overline{A}$ ⇒ A nie je uzavretý podpriestor //

(P8) (PREDNÁŠKA LP)

1. časť: pre $x_k = \frac{\pi}{2k^2} \in (0, \pi)$ ⇝ $\sin(k^2 \cdot x_k) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$

$$\Rightarrow \max_{x \in [0, \pi]} \left| \frac{\sin k^2 x}{k} \right| = \frac{1}{k} \quad //$$

2. časť:

(SL) $\left(y' p(t)\right)' + y \cdot q(t) = 0$, $p \in C^1[a,b]$, $q \in C[a,b]$

$p(t) \neq 0$

STURMOVA – LIOUVILLEOVA DR

⟶ rovnica je DISKONJUGOVANÁ na $[a,b]$, ak $\forall$ riešenie $y(t)$ má v $[a,b]$ najviac jeden nulový bod

⟶ platí:

(SL) je diskonjugovaná na $[a,b]$

$$\Updownarrow$$

$$\int_a^b \left(\frac{[f'(t)]^2}{p(t)} - [f(t)]^2 q(t) \right) dt > 0 \quad \text{pre } \forall f \in C^1[a,b]$$

$f(a) = 0 = f(b)$

(SL) je diskonjug. na (a,b)

$$\Updownarrow$$

$$\int_a^b \left(\frac{[f'(t)]^2}{p(t)} - [f(t)]^2 q(t) \right) dt \geq 0 \quad \text{pre } \forall f \in C^1[a,b]$$

$f(a) = 0 = f(b)$

⇝ hlavné riešenie v bode a:

$$y(a) = 0, \quad y'(a) = 1 \quad \rightsquigarrow \quad \underline{\underline{y_a}}$$

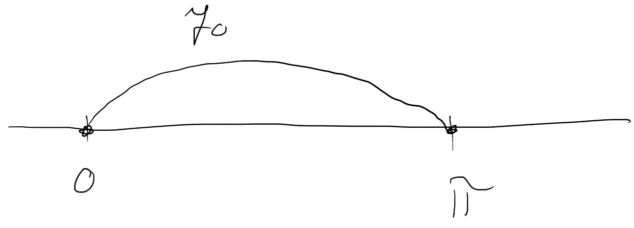
⇝ platí:

(i) (SL) je disjug. na $[a,b]$ ⟺ hlavné riešenie y_a je nenulové na $(a,b]$

(ii) (SL) —||— na (a,b) ⟺ y_a je nenulové na (a,b)

⇝ v našom prípade: $y'' + y = 0, \quad t \in [0,\pi]$

⇝ $\underline{\underline{y_0 = \sin t}}$



⇝ $y_0 \neq 0$ na $(0,\pi)$

⇒ rovnica je disjug. na $(0,\pi)$

⇒ platí:

$$\underline{\underline{\int_0^{\pi} \left(f'^2(t) - f^2(t) \right) dt \geq 0}}, \quad \forall f \in C^1[0,\pi], \ f(0) = 0 = f(\pi)$$