6. CVIČENIE

POZNÁMKA 9 Z PREDNÁŠKY

$(X, \|\cdot\|)$ má konečnú dimenziu $\Leftrightarrow$ $\forall$ norma $\|\cdot\|_*$ v X je ekvivalentná s $\|\cdot\|$

D:

„$\Rightarrow$" vyplýva z výsledkov z prednášky

„$\Leftarrow$" dokážeme obmenou implikácie, t.j., ukážeme:

ak X má nekonečnú dimenziu $\Rightarrow \exists \|\cdot\|_0$ taká, že $\|\cdot\|$ nie je s ňou ekvivalentná

$\rightsquigarrow$ nech $\dim X = \infty$; nech $\{e_\alpha\}_{\alpha \in I}$ je báza priestoru X, $\|e_\alpha\| = 1$ pre $\forall \alpha \in I$

$\rightsquigarrow$ vieme, že pre $\forall x \in X$ existuje jediný systém $\{\lambda_\alpha\}_{\alpha \in I}$, ktorý je konečný a: $x = \sum_{\alpha \in I} \lambda_\alpha e_\alpha$ ($\Leftarrow$ $\lambda_\alpha \neq 0$ iba pre konečne veľa $\alpha \in I$)

$\rightsquigarrow$ I je nekonečná $\Rightarrow$ vyberme nejakú spočítateľnú podmnožinu $\{\alpha_\ell\}_{\ell=1}^{\infty} \subseteq I$

$\rightsquigarrow$ definujme zobrazenie $\phi : X \to \mathbb{R}$ takto:

ak $x \in X$; $x = \sum_{\alpha \in I} \lambda_\alpha e_\alpha$, potom: $\boxed{\phi(x) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell \cdot \lambda_{\alpha_\ell}}$

$\rightsquigarrow$ ϕ je def. dobře a je lineární, ale není spojité; např.

$$\{x_\ell\}_{\ell=1}^{\infty} := \left\{\frac{1}{\sqrt{\ell}} e_{\alpha_\ell}\right\}_{\ell=1}^{\infty} \subseteq X \quad ; \text{ platí:}$$

$$\lim_{\ell\to\infty} \|x_\ell\| = \lim_{\ell\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\ell}} = 0 \rightsquigarrow \lim_{\ell\to\infty} x_\ell = 0 \text{ v } \|\cdot\|$$

$$\lim_{\ell\to\infty} |\phi(x_\ell)| = \lim_{\ell\to\infty} \left|\ell\cdot\frac{1}{\sqrt{\ell}}\right| = \lim_{\ell\to\infty} |\sqrt{\ell}| = \infty \neq \phi(0) = 0$$

$\rightsquigarrow$ definuje:

$$\|x\|_* := \|x\| + |\phi(x)| \quad ; \quad x\in X$$

$\rightsquigarrow$ $\|\cdot\|_*$ je naozaj norma:

- $\|x\|_* = 0 \iff \|x\| = 0 \wedge \phi(x) = 0 \iff x = 0$ ✓
- $\|\lambda\cdot x\|_* = \|\lambda x\| + |\phi(\lambda x)| = |\lambda|\cdot\|x\| + |\lambda\cdot\phi(x)|$
  $= |\lambda|\cdot\left[\|x\| + |\phi(x)|\right] = |\lambda|\cdot\|x\|_*$ ✓
- $\|x+y\|_* = \|x+y\| + |\phi(x+y)| = \|x+y\| + |\phi(x)+\phi(y)|$
  $\leq \|x\|+\|y\| + |\phi(x)| + |\phi(y)| = \|x\|_* + \|y\|_*$ ✓

$\rightsquigarrow$ norma $\|\cdot\|_*$ nie je ekvivalentní s $\|\cdot\|$; ukážeme sporom

$\rightsquigarrow$ z def. $\|\cdot\|_*$ platí: $\|x\| \leq \|x\|_*$ pre $\forall x\in X$

→ predpokladajme, že $\exists\, M > 0$ tak, že:

$$\|x\|_* \leq M \cdot \|x\| \quad \text{pre } \forall x \in X$$

→ $\|x\| + |\phi(x)| \leq M \cdot \|x\| \Rightarrow |\phi(x)| \leq (M-1)\|x\|$, $\forall x \in X$

→ použijeme postup. $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ def. vyššie:

$|\phi(x_k)| \leq (M-1) \cdot \|x_k\|$ → $k \to \infty$ → $\lim\limits_{k \to \infty} |\phi(x_k)| \leq (M-1) \cdot 0 = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{k \to \infty} |\phi(x_k)| = 0$ .... SPOR

$\Rightarrow$ neexistuje $M > 0$ vyššie predpokladané, a teda $\|\cdot\|_*$ nie je ekvivalentná s $\|\cdot\|$

//

(2.) $C[a,b]$; $\|\cdot\|_C$; $n \in \mathbb{N}_0$

$M := \{\text{polynóm } P(x) \text{ , st } P \leq n \text{ , } \|P\|_C \leq 1\}$

→ ukážeme, že M je kompaktná v $C[a,b]$

· množina všetkých polynómov stupňa $\leq n$ je $(n+1)$-rozmerný priest. nad $\mathbb{R}$ → bázа je napr. $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

→ teda tento priestor je homeomorfný s $\mathbb{E}^{n+1}$

$\Rightarrow$ kompaktnosť v priestore polynómov stupňa najviac n teda znamená ohraničenosť + uzavretosť

D.Ú. ukážte, že M je uzavretá vzhľadom na $\|\cdot\|_C$

t.j., ak $\{P_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq M$; $P_i \xrightarrow[i \to \infty]{\|\cdot\|_C} f \in C[a,b]$,

potom nutne $f \in M$, t.j., f je polynóm st. $\leq n$ a $\|f\|_C \leq 1$