7. CVIČENIE

→ vlastnosť Fourierových koeficientov

Nech $(X, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ je unitárny priestor a $S \subseteq X$ je ortonormálny systém vektorov. Nech $x \in X$ je daný vektor. Potom existuje najviac spočítateľne veľa vektorov $u \in S$ takých, že

$$\langle x, u \rangle \neq 0$$

$\Longleftrightarrow$ množina všetkých Fourierových koef. c vektora x vzhľadom na systém S je najviac spočítateľná.

D: nech $S \subseteq X$ a $x \in X$ sú dané;

→ ukážeme, že pre $\forall n \in \mathbb{N}$ existuje iba konečne veľa vektorov $u \in S$ takých, že $\underbrace{|c_u|}_{\langle x, u \rangle} \geq \frac{1}{n}$; ich max. počet je $\leq n^2 \cdot \|x\|^2$

→ dokážeme sporom; nech $n \in \mathbb{N}$ dané; nech $u_1, \dots, u_m$ sú vektory z S také, že $|c_u| \geq \frac{1}{n}$ a nech $m > n^2 \cdot \|x\|^2$

→ z prednášky vieme, že pre $u_1, \dots, u_m$, resp. pre ich Fourierove koef. $c_{u_1}, \dots, c_{u_m}$ platí Besselova nerov.:

$$\sum_{l=1}^{m} |c_{u_l}|^2 \leq \|x\|^2$$

→ avšak $|c_{u_l}| \geq \frac{1}{n}$ pre $\forall\, l = 1, \dots, m$

⇝ potom platí

$$\sum_{l=1}^{m} |c_{n_l}|^2 \geq \sum_{l=1}^{m} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2} \cdot \overset{> n^2 \cdot \|x\|^2}{m} > \frac{1}{n^2} \cdot n^2 \cdot \|x\|^2 = \|x\|^2$$

$$\Rightarrow \sum_{l=1}^{m} |c_{n_l}|^2 > \|x\|^2$$ .... SPOR S BESSELOM

⇒ počet $m \leq n^2 \cdot \|x\|^2$

⇝ počet vektorov z S takých, že $|c_\alpha| \geq \frac{1}{n}$ je konečný

⇝ ak $c_\alpha > 0$ → $|c_\alpha| > 0$ .... $\exists\, n \in \mathbb{N}$ tak, že $|c_\alpha| \geq \frac{1}{n}$

⇒ takýchto c_α teda môže byť najviac spočít. veľa