8. CVIČENIE

NESEPARABILNÝ HILBERTOV PRIESTOR

$$X := \{ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;;\; f(t) \neq 0 \text{ najviac v spočítateľne veľa bodoch } t \in \mathbb{R} \;;\; \sum_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|^2 < \infty \}$$

$\leadsto$ X je lineárny priestor ; zobrazenie $\langle \cdot , \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$:

$$\langle f, g \rangle := \sum_{t \in \mathbb{R}} f(t) \cdot g(t) \quad , f, g \in X$$

je skalárny súčin na X $\leadsto$ X je unitárny priestor

$\leadsto$ norma: $\|f\| := \sqrt{\sum_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|^2}$; $f \in X$

$\leadsto$ X je úplný priestor vzhľadom na $\|\cdot\|$ $\leadsto$ Hilbertov priestor //

$\{ f^{[n]} \}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ je cauchyovská $\Longrightarrow$ $\{ f^{[n]} \}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentná

$\leadsto$ ortonormálna báza priestoru X :

$$S := \{ f_r : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;,\; f_r(t) = \begin{cases} 1 \;; & t = r \\ 0 \;; & t \neq r \end{cases} \;;\; r \in \mathbb{R} \}$$

$$\|f_r\| = 1 \;;\; \langle f_r, f_s \rangle = 0 \;;\; r \neq s \;;\; \forall r, s \in \mathbb{R}$$

$$\leadsto f = \sum_{r \in \mathbb{R}} f(r) \cdot f_r$$

$\rightsquigarrow$ mohutnosť množiny S je rovná mohutnosti $\mathbb{R}$

$\rightsquigarrow$ X je neseparabilný Hilbertov priestor