M6150 Funkcionálna analýza I

Metrické priestory

Peter Šepitka

leto 2017

Obsah

Obsah

Metrika a príklady metrických priestorov

Definícia 1 (Metrický priestor)

Nech M je neprázdna množina a $\rho : M \times M \to [0, \infty)$ zobrazenie, ktoré pre každú trojicu prvkov $x, y, z \in M$ splňa podmienky

M1 $\rho(x, y) = 0$ práve vtedy, keď $x = y$ (axióma totožnosti),

M2 $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (axióma symetrie),

M3 $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (trojuholníková nerovnosť).

Zobrazenie ρ sa nazýva metrika na množine M a dvojicu (M, ρ) označujeme ako metrický priestor. Pre dané $x, y \in M$ sa číslo $\rho(x, y)$ nazýva vzdialenosť prvkov x, y v metrickom priestore (M, ρ).

Príklad 1 (Diskrétny metrický priestor)

Na každej množine $M \neq \emptyset$ je možné zaviesť tzv. diskrétnu metriku ρ_D predpisom

$$\rho_D(x, y) := \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & x \neq y. \end{cases} \tag{1}$$

Dvojica (M, ρ_D) sa potom označuje ako diskrétny (triviálny) metrický priestor.

Príklad 2

Pre dané $n \in \mathbb{N}$ nech $M := \mathbb{R}^n$ a nech $p \in [1, \infty)$ je pevné reálne číslo. Funkcia

$$\rho_p(x, y) := \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad x := (x_1, \dots, x_n), \ y := (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n, \qquad (2)$$

je potom metrikou na množine M a dvojica (M, ρ_p) metrický priestor. Obzvlášť, pre $p = 1$ sa metrika ρ_1 v (2) označuje ako súčtová, t.j.,

$$\rho_1(x, y) = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|, \quad x := (x_1, \dots, x_n), \ y := (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n. \qquad (3)$$

V prípade $p = 2$ dostávame tzv. euklidovskú metriku ρ_2, t.j.,

$$\rho_2(x, y) := \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^2}, \quad x := (x_1, \dots, x_n), \ y := (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n, \qquad (4)$$

Metrický priestor (M, ρ_2) nazývame euklidovský priestor a označujeme ho $\mathbb{E}^n$. Ďalšou dôležitou metrikou na množine M je tzv. maximálna metrika ρ_∞ definovaná predpisom

$$\rho_\infty(x, y) = \max_{1 \le k \le n} |x_k - y_k|, \quad x := (x_1, \dots, x_n), \ y := (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n. \qquad (5)$$

Príklad 2

Poznamenajme, že v prípade $n = 1$ všetky metriky $\rho_p(x, y)$, $p \in [1, \infty)$, a ρ_∞ splývajú, pričom pre každé $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$\rho_p(x, y) = \rho_\infty(x, y) = |x - y|, \tag{6}$$

ako sa možno pomocou (2) a (5) ľahko presvedčiť. Pre $n = 2$ sa o súčtovej metrike ρ_1 v (3) niekedy hovorí aj ako o taxikárskej metrike. Na množine $M = \mathbb{R}^2$ sa zavádza i tzv. hviezdicová metrika $\rho^\star$ daná

$$\rho^\star(x, y) := \begin{cases} \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + \sqrt{y_1^2 + y_2^2}, & \text{ak body } x = [x_1, x_2],\ y = [y_1, y_2] \\ & \text{ležia na rôznych polpriamkach} \\ & \text{vychádzajúcich z bodu } [0, 0] \\ \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}, & \text{v opačnom prípade.} \end{cases}$$

Príklad 3

Pre dané reálne číslo $p \in [1, \infty)$ uvažujme nasledujúcu množinu

$$M := \left\{ x = \{x_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R}, \quad \sum_{k=1}^\infty |x_k|^p < \infty \right\}, \tag{7}$$

t.j., množinu reálnych postupností $\{x_k\}$, pre ktoré je rad $\sum |x_k|^p$ konvergentný.

Príklad 3

Zobrazenie $\rho^p : M \times M \to [0,\infty)$ definované predpisom

$$\rho^p(x,y) := \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad x = \{x_k\},\ y = \{y_k\} \in M, \tag{8}$$

je potom metrikou na množine M. Metrický priestor (M, ρ^p) sa štandardne označuje symbolom l^p. Popri M v (7) majú významné postavenie i množiny

$$N := \{x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}, \quad \{x_k\} \text{ je ohraničená}\}, \tag{9}$$

$$\tilde{N} := \{x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}, \quad \{x_k\} \text{ konverguje}\}, \tag{10}$$

$$\tilde{N}_0 := \left\{x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}, \quad \lim_{k\to\infty} x_k = 0\right\}, \tag{11}$$

na ktorých je možné zaviesť metriku ρ tvaru

$$\rho(x,y) = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k - y_k|, \quad x = \{x_k\},\ y = \{y_k\}. \tag{12}$$

Pre odpovedajúce metrické priestory (N,ρ), $(\tilde{N},\rho)$ a $(\tilde{N}_0,\rho)$ sa v literatúre postupne používa označenie l^∞, c a c_0.

Príklad 4

Nech I je nedegenerovaný reálny interval. Symbolom $\mathcal{B}(I)$ budeme označovať množinu všetkých reálnych (komplexných) funkcií, ktoré sú ohraničené na I (používa sa tiež označenie $\mathcal{B}(I,\mathbb{R})$, resp. $\mathcal{B}(I,\mathbb{C})$). Zobrazenie ρ_B definované

$$\rho_B(f,g) := \sup_{x\in I} |f(x) - g(x)|, \quad f,g \in \mathcal{B}(I), \tag{13}$$

je metrika na množine $\mathcal{B}(I)$, ako sa možno ľahko presvedčiť. V prípade uzavretého intervalu I, t.j., $I = [a,b]$ pre nejaké $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$, označme výrazom $\mathcal{C}[a,b]$ množinu všetkých reálnych (komplexných) funkcií, ktoré sú spojité na $[a,b]$. Na tejto množine je možné uvažovať dve metriky ρ_C a ρ_I s predpismi

$$\rho_C(f,g) := \max_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|, \tag{14}$$

$$\rho_I(f,g) := \int_a^b |f(x) - g(x)| \,\mathrm{d}x, \tag{15}$$

pre každé $f,g \in \mathcal{C}[a,b]$. Metrika ρ_C sa štandardne označuje pojmom metrika rovnomernej konvergencie, kým pre metriku ρ_I sa používa prívlastok integrálna.

Príklad 5

Nech S je ľubovoľná konečná neprázdna množina. Nech $M := \mathcal{P}(S)$, kde $\mathcal{P}(S)$ je množina všetkých podmnožín množiny S (potenčná množina množiny S). Zobrazenie $\rho : M \times M \to \mathbb{N}_0$ definované predpisom

$$\rho(A, B) := |A \,\Delta\, B|, \quad A, B \in M, \tag{16}$$

potom predstavuje metriku na množine M. Pripomeňme, že symbol Δ označuje symetrický rozdiel množín, t.j.,

$$A \,\Delta\, B := (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A), \tag{17}$$

kým $|\cdot|$ predstavuje mohutnosť danej množiny, v našom prípade počet prvkov. Overiť prvé dve axiómy v Definícii 1 nie je ťažké. Skutočnosť, že $\rho(A, B) = 0$ pre nejaké $A, B \in M$, podľa (16) znamená, že množina $A \,\Delta\, B$ je prázdna. Pomocou rovnosti v (17) dostávame, že obidve množiny $A \setminus B$ a $B \setminus A$ sú prázdne, čo implikuje relácie $A \subseteq B$ a $B \subseteq A$. Nutne teda platí $A = B$. Symetrickosť funkcie ρ je evidentná. Platnosť axiómy M3 v Definícii 1 vyplýva z inklúzie

$$A \,\Delta\, B \subseteq (A \,\Delta\, C) \cup (C \,\Delta\, B), \quad A, B, C \in M, \tag{18}$$

ktorú možno pomerne ľahko dokázať napríklad pomocou vhodného nákresu. Využitím (18) a faktu, že množina S je konečná, potom dostávame

Príklad 5

$$\rho(A,B) \overset{(16)}{=} |A \,\Delta\, B| \overset{(18)}{\leq} |(A \,\Delta\, C) \cup (C \,\Delta\, B)| \leq |(A \,\Delta\, C)| + |(C \,\Delta\, B)|$$
$$\overset{(16)}{=} \rho(A,C) + \rho(C,B) \quad \text{pre každé } A, B, C \in M,$$

čo je požadovaná trojuholníková nerovnosť. Poznamenajme, že namiesto metriky ρ zavedenej v (16) sa častejšie používa tzv. Jaccardova metrika δ daná

$$\delta(A,B) := \frac{|A \,\Delta\, B|}{|A \cup B|}, \quad A, B \in M. \tag{19}$$

Metrika δ v (19) má okrem iných aplikácií uplatnenie v štatistike a botanike.

Poznámka 1

Ak axiómu M1 v Definícii 1 metrického priestoru nahradíme slabšou podmienkou

$$\text{ak } x = y, \text{ potom } \rho(x,y) = 0,$$

potom zobrazenie ρ sa nazýva pseudometrika a dvojica (M, ρ) pseudometrický priestor. Jedná sa zrejme o slabšiu štruktúru než je metrický priestor. Obzvlášť, v tomto prípade môže $\rho(x,y) = 0$ i pre rôzne prvky $x, y \in M$. Príkladom pseudometrického priestoru je množina $\mathcal{C}[a,b]$ z Príkladu 4 so pseudometrikou

Poznámka 1

$$\rho(f,g) = |f(a) - g(a)|, \quad f,g \in \mathcal{C}[a,b]. \tag{20}$$

Naopak, ak trojuholníkovú nerovnosť v M3 zameníme za silnejšiu požiadavku

$$\rho(x,y) \leq \max\{\rho(x,z),\, \rho(z,y)\}, \tag{21}$$

dostávame tzv. ultrametriku, resp. supermetriku ρ a ultrametrický, resp, supermetrický priestor (M,ρ). Je zrejmé, že posledná nerovnosť priamo implikuje axiómu M3 v Definícii 1, a preto ultrametrický priestor je špeciálnym prípadom metrického priestoru. Každý diskrétny metrický priestor z Príkladu 1 je ultrametrickým priestorom, nakoľko diskrétna metrika ρ_D definovaná v (1) je v skutočnosti ultrametrika, ako sa možno ľahko presvedčiť.

Definícia 2 (Vnorenie metrických priestorov)

Nech (M,ρ) a (N,σ) sú dva metrické priestory spĺňajúce

$$N \subseteq M \qquad \text{a} \qquad \sigma(x,y) = \rho(x,y) \quad \text{pre každé } x,y \in N. \tag{22}$$

Potom povieme, že metrický priestor (N,σ) je vnorený do metrického priestoru (M,ρ) a metrika ρ indukuje metriku σ. Metrický priestor (N,σ) s vlastnosťami v (22) sa označuje ako podpriestor metrického priestoru (M,ρ).

Príklad 6

V súlade s Príkladom 4 je metrický priestor $(\mathcal{C}[a,b], \rho_C)$ vnorený do metrického priestoru $(\mathcal{B}[a,b], \rho_B)$. Vyplýva to z dvoch Weierstrassových viet o reálnych funkciách spojitých na uzavretom intervale $[a,b]$. Konkrétne, na základe prvej Weierstrassovej vety máme inklúziu $\mathcal{C}[a,b] \subseteq \mathcal{B}[a,b]$, kým druhá Weierstrassova veta spolu s (13) a (14) zaručuje rovnosť

$$\rho_B(f,g) \overset{(13)}{=} \sup_{x \in I} |f(x) - g(x)| = \max_{x \in I} |f(x) - g(x)| \overset{(14)}{=} \rho_C(f,g)$$

pre každé $f, g \in \mathcal{C}[a,b]$. Podľa Definície 2 teda platí výrok v úvode príkladu.

Príklad 7

Metrika ρ_2 v euklidovskom priestore $\mathbb{E}^3$ predstavenom v Príklade 2 indukuje na jednotkovej guľovej ploche $M := S^2([0,0,0],1) \subseteq \mathbb{R}^3$ metriku σ, t.j., podľa (4)

$$\sigma(x,y) = \rho_2(x,y) \overset{(4)}{=} \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$$

pre každé dva body $x = [x_1, x_2, x_3]$ a $y = [y_1, y_2, y_3]$ množiny M. Metrický priestor (M, σ) je teda vnorený do euklidovského priestoru $\mathbb{E}^3$. Poznamenajme, že indukovaná metrika σ prakticky odpovedá prekopaniu najkratšieho tunela medzi bodmi na guľovej ploche M.

Definícia 3 (Vzdialenosť a priemer množín)

Nech (M, ρ) je metrický priestor a $A, B \subseteq M$ sú neprázdne množiny. Definujme

$$\rho(A, B) := \inf\{\rho(x, y),\ x \in A,\ y \in B\}, \tag{23}$$

$$d(A) := \sup\{\rho(x, y),\ x, y \in A\}. \tag{24}$$

Číslo $\rho(A, B)$ sa nazýva vzdialenosť množín A a B v metrickom priestore (M, ρ), kým objekt $d(A)$ označujeme ako priemer množiny A v (M, ρ). Obzvlášť, ak $d(A) < \infty$, hovoríme, že množina A je ohraničená v metrickom priestore (M, ρ).

Príklad 8

Určme vzdialenosť bodu $A = \left[\frac{1}{2}, 0\right]$ od množiny $B \subseteq \mathbb{R}^2$ danej

$$B := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ y \geq \sqrt{|x|^3}\right\} \tag{25}$$

v euklidovskom priestore $\mathbb{E}^2$. Keďže metrika ρ_2 v (4) reprezentuje klasickú geometrickú vzdialenosť bodov v rovine, v súlade s (23) v Definícii 3 a grafickým znázornením množiny B v (25) a bodu A stačí zistiť vzdialenosť bodu A od krivky $y = \sqrt{|x|^3}$. Hľadáme teda infimum funkcie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s predpisom

Príklad 8

$$f(x) := \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{|x|^3} - 0\right)^2} = \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + |x|^3}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{26}$$

Funkcia f v (26) má deriváciu f' na celom $\mathbb{R}$, pričom platí

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x+3x^2-1}{2\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+|x|^3}}, & x \geq 0, \\ \frac{2x-3x^2-1}{2\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+|x|^3}}, & x < 0, \end{cases} \tag{27}$$

ako sa možno ľahko presvedčiť. A keďže $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = \infty$, z diferenciálneho počtu reálnych funkcií jednej reálnej premennej vieme, že hľadané infimum funkcie f na $\mathbb{R}$ je dokonca minimum a nadobúda sa v jednom zo stacionárnych bodov funkcie f. V súlade s (27) má rovnica $f'(x) = 0$ práve jeden koreň $x = \frac{1}{3}$. Absolútne minimum funkcie f, a teda i hľadaná vzdialenosť bodu A od množiny B, potom je $\rho_2(A, B) = f\left(\frac{1}{3}\right) = \sqrt{\frac{7}{108}}$.

Príklad 9

Nájdime priemer množiny $A := \{f_n(x) = x^n,\ x \in [0,1],\ n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{C}[0,1]$ vzhľadom na metriku rovnomernej konvergencie ρ_C. Ukážeme, že $d(A) = 1$. Podľa vhodného obrázka ľahko zistíme, že pre ľubovoľné dve funkcie $f_n, f_m \in A$ je $|f_n(x) - f_m(x)| \leq 1$ pre každé $x \in [0,1]$. Podľa (14) potom $\rho_C(f_n, f_m) \leq 1$, čo následne v súlade s (24) implikuje nerovnosť $d(A) \leq 1$. Pre $n \geq 2$ teraz stanovíme vzdialenosť funkcií f_1 a f_n v metrickom priestore $(\mathcal{C}[0,1], \rho_C)$, t.j.,

$$\rho_C(f_1, f_n) \overset{(14)}{=} \max_{x\in[0,1]} |f_1(x) - f_n(x)| = \max_{x\in[0,1]} |x - x^n|. \tag{28}$$

Nakoľko $x - x^n \geq 0$ pre každé $x \in [0,1]$, hľadáme globálne maximum výrazu $x - x^n$ na intervale $[0,1]$. Štandardnými metódami matematickej analýzy zistíme, že toto maximum sa nadobúda pre $x = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}$ a tak podľa (28) dostávame

$$\rho_C(f_1, f_n) = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}} - \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{n-1}} \quad \text{pre každé } n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}. \tag{29}$$

Podľa (24) v Definícii 3 je však hľadaný priemer $d(A) \geq \rho_C(f_1, f_n)$ pre každé $n \geq 2$. Limitovaním tejto nerovnosti pre $n \to \infty$ napokon dostávame

$$d(A) \geq \lim_{n\to\infty} \rho_C(f_1, f_n) = \lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}} - \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{n-1}}\right] = 1, \quad \text{a tak } d(A) = 1.$$

Príklad 10

Stanovme priemer reálnej osi $\mathbb{R}$ v metrickom priestore $(\mathbb{R}, \rho)$ s metrikou ρ tvaru

$$\rho(x, y) := \frac{|x-y|}{1+|x-y|}, \quad x, y \in \mathbb{R}. \tag{30}$$

Najprv overíme, že zobrazenie ρ definované v (30) je skutočne metrikou na množine $\mathbb{R}$. Platnosť axióm M1 a M2 v Definícii 1 je zrejmá, stačí sa preto zamerať na dokázanie trojuholníkovej nerovnosti pre zobrazenie ρ. Funkcia

$$\varphi(t) := \frac{t}{1+t} = 1 - \frac{1}{1+t}, \quad t \in [0, \infty), \tag{31}$$

je očividne rastúca na intervale $[0, \infty)$. A keďže pre každé $a, b \in \mathbb{R}$ platí klasická trojuholníková nerovnosť $|a+b| \le |a| + |b|$, postupne dostávame

$$\underbrace{\frac{|a+b|}{1+|a+b|}}_{\varphi(|a+b|)} \le \underbrace{\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}}_{\varphi(|a|+|b|)} = \frac{|a|}{1+|a|+|b|} + \frac{|b|}{1+|a|+|b|} \le \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}. \tag{32}$$

V druhom kroku v (32) sme využili fakt, že funkcia φ je rastúca na $[0, \infty)$. Nech $x, y, z \in \mathbb{R}$ sú ľubovoľné a položme $a := x - z$ a $b := z - y$. Pomocou formuly (30) a nerovnosti v (32) potom odvodíme trojuholníkovú nerovnosť, konkrétne

Príklad 10

$$\rho(x,y) \overset{(30)}{=} \frac{|x-y|}{1+|x-y|} = \frac{|(x-z)+(z-y)|}{1+|(x-z)+(z-y)|} \overset{(32)}{\leq} \frac{|x-z|}{1+|x-z|} + \frac{|z-y|}{1+|z-y|}$$
$$\overset{(30)}{=} \rho(x,z) + \rho(z,y),$$

a tak platí i axióma M3 v Definícii 1. Napokon, zistíme hľadaný priemer $d(\mathbb{R})$. Z rovností v (30) a (31) vyplýva, že funkcie ρ a φ spĺňajú

$$\rho(x,y) = \varphi(|x-y|) \quad \text{pre } x,y \in \mathbb{R}, \qquad \varphi(t) < 1 \quad \text{na } [0,\infty), \qquad \lim_{t\to\infty} \varphi(t) = 1.$$

Z tohto možno v súlade s (24) usúdiť, že platí $d(\mathbb{R}) = 1$.

Definícia 4 (Izometrické zobrazenie metrických priestorov)

Nech (M,ρ) a (N,σ) sú metrické priestory. Zobrazenie $f : N \to M$ spĺňajúce

$$\sigma(x,y) = \rho(f(x), f(y)) \quad \text{pre každé } x,y \in N \tag{33}$$

sa nazýva izometrické zobrazenie. V prípade, ak f je surjektívne zobrazenie, označujeme ho pojmom izometria a o metrických priestoroch (N,σ) a (M,ρ) potom hovoríme, že sú izometrické.

Poznámka 2

Priamo z Definície 4 vyplýva, že každé izometrické zobrazenie f medzi metrickými priestormi (N, σ) a (M, ρ) je nutne injektívne. Ak f je naviac i surjektívne, existuje k nemu inverzné zobrazenie $f^{-1} : M \to N$, ktoré je tiež izometrické. Poznamenajme tiež, že skutočnosť, že izometrické zobrazenie f je vždy injektívne, umožňuje zovšeobecniť pojem vnorenia metrických priestorov zavedený v Definícii 2. Konkrétne, hovoríme, že metrický priestor (N, σ) v Definícii 4 je (izometricky) vnorený do metrického priestoru (M, ρ). Je zrejmé, že v tomto ponímaní je v Definícii 2 metrický priestor (N, σ) vnorený do priestoru (M, ρ) prostredníctvom identického zobrazenia $f(x) = x$ pre každé $x \in N$.

Príklad 11

Euklidovský priestor $\mathbb{E} := \mathbb{E}^1$ je možné izometricky vnoriť do každého z metrických priestorov $(\mathbb{R}^2, \rho_1)$, $\mathbb{E}^2$ a $(\mathbb{R}^2, \rho_\infty)$. Funkcia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definovaná

$$f(x) := (x, 0), \quad x \in \mathbb{R},$$

je totiž izometrické zobrazenie vzhľadom na všetky tri metriky ρ_1, ρ_2 a ρ_∞ na $\mathbb{R}^2$ zavedené v (3)–(5), ako sa možno ľahko presvedčiť.

Príklad 12

Nech $M := \mathcal{C}[-1,1]$ a definujme zobrazenie $F : M \to M$ predpisom

$$F(f)(x) := f(-x) \quad \text{pre každé } f \in M \text{ a } x \in [-1,1]. \tag{34}$$

Potom F je izometria každého z metrických priestorov (M, ρ_C) a (M, ρ_I) do seba, kde metriky ρ_C a ρ_I sú definované v (14) a (15). Skutočne, pre každé dve funkcie $f, g \in M$ postupne platí

$$\rho_C(F(f), F(g)) \overset{(14)}{=} \max_{x\in[-1,1]} |F(f)(x) - F(g)(x)| \overset{(34)}{=} \max_{x\in[-1,1]} |f(-x) - g(-x)|$$

$$= |t = -x| = \max_{t\in[-1,1]} |f(t) - g(t)| \overset{(14)}{=} \rho_C(f, g),$$

$$\rho_I(F(f), F(g)) \overset{(15)}{=} \int_{-1}^{1} |F(f)(x) - F(g)(x)| \,\mathrm{d}x \overset{(34)}{=} \int_{-1}^{1} |f(-x) - g(-x)| \,\mathrm{d}x$$

$$= |t = -x| = \int_{-1}^{1} |f(t) - g(t)| \,\mathrm{d}t \overset{(15)}{=} \rho_I(f, g).$$

V súlade s Definíciou 4 je preto F izometrické zobrazenie vzhľadom na obidve metriky ρ_C a ρ_I. Z (34) je naviac zrejmé, že F je surjekcia na M s inverziou $F^{-1} = F$. Jedná sa teda o izometriu.

Obsah

Otvorené a uzavreté gule

Definícia 5 (Otvorená a uzavretá guľa)

Nech (M, ρ) je metrický priestor a nech $x_0 \in M$ a $r \in \mathbb{R}^+$ sú dané. Otvorenou, resp. uzavretou guľou so stredom v bode x_0 a polomerom r rozumieme množinu

$$B(x_0, r) := \{x \in M,\ \rho(x, x_0) < r\}, \text{ resp. } B[x_0, r] := \{x \in M,\ \rho(x, x_0) \leq r\}. \quad (35)$$

Pre $B(x_0, r)$ sa používa aj označenie $\mathcal{O}_r(x_0)$ a pomenovanie r-okolie bodu x_0.

Príklad 13

V diskrétnom metrickom priestore (M, ρ) sú otvorené ako aj uzavreté gule buď jednoprvkové množiny alebo celé M. Konkrétne, pre každé $x_0 \in M$ platí

$$B(x_0, r) = \begin{cases} \{x_0\}, & r \leq 1, \\ M, & r > 1, \end{cases} \qquad B[x_0, r] = \begin{cases} \{x_0\}, & r < 1, \\ M, & r \geq 1, \end{cases} \quad (36)$$

ako sa možno ľahko presvedčiť pomocou Definície 5. Na druhej strane, v ultrametrickom priestore (M, ρ) je každý bod otvorenej ako aj uzavretej gule jej stredom. Je to dôsledok zosilnenej trojuholníkovej nerovnosti (21). V tomto prípade teda každé dve otvorené (uzavreté) gule sú buď disjunktné alebo splývajú.

Klasifikácia bodov metrického priestoru

Definícia 6

Nech (M, ρ) je metrický priestor, $N \subseteq M$ podmnožina a $x_0 \in M$ bod.

(i) Bod x_0 sa nazýva bodom uzáveru množiny N, ak pre každé $\varepsilon > 0$ platí $\mathcal{O}_\varepsilon(x_0) \cap N \neq \emptyset$. Množina všetkých bodov uzáveru množiny N sa nazýva uzáver množiny N a označuje sa $\overline{N}$.

(ii) Bod x_0 sa nazýva hraničným bodom množiny N, ak pre každé $\varepsilon > 0$ platí $\mathcal{O}_\varepsilon(x_0) \cap N \neq \emptyset$ i $\mathcal{O}_\varepsilon(x_0) \cap (M \setminus N) \neq \emptyset$. Množina všetkých hraničných bodov množiny N sa nazýva hranica množiny N a označuje sa $h(N)$.

(iii) Bod x_0 sa nazýva hromadným bodom množiny N, ak pre každé $\varepsilon > 0$ $\mathcal{O}_\varepsilon(x_0)$ obsahuje nekonečna veľa bodov z N. Množina všetkých hromadných bodov množiny N sa nazýva derivácia množiny N a označuje sa N'.

(iv) Bod x_0 sa nazýva vnútorným bodom množiny N, ak existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $\mathcal{O}_\varepsilon(x_0) \subseteq N$. Množina všetkých vnútorných bodov množiny N sa nazýva vnútro množiny N a označuje sa N^o.

(v) Bod x_0 sa nazýva izolovaným bodom množiny N, ak existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $\mathcal{O}_\varepsilon(x_0) \cap N = \{x_0\}$. Množina všetkých izolovaných bodov množiny N sa nazýva adherencia množiny N.

Veta 1

Nech (M, ρ) *je metrický priestor a* $A, B \subseteq M$ *podmnožiny.*

(i) $\overline{\emptyset} = \emptyset, \quad \emptyset^o = \emptyset, \quad \overline{M} = M, \quad M^o = M.$

(ii) $A \subseteq \overline{A}, \quad \overline{\overline{A}} = \overline{A}, \quad A^o \subseteq A, \quad (A^o)^o = A^o.$

(iii) *Ak* $A \subseteq B$, *potom* $\overline{A} \subseteq \overline{B}$ *a* $A^o \subseteq B^o$.

(iv) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \quad (A \cap B)^o = A^o \cap B^o.$

(v) $h(A) = \overline{A} \cap \overline{M \setminus A}, \quad h(A) = \overline{A} \setminus A^o.$

Poznámka 3

Nech (M, ρ) je metrický priestor a $N \subseteq M$ podmnožina. Priamo z Definície 6(i) a rovnosti (23) vyplýva, že uzáver $\overline{N}$ možno ekvivalentne charakterizovať v tvare

$$\overline{N} = \{x \in M, \ \rho(x, N) = 0\}. \tag{37}$$

Poznamenajme ďalej, že podľa Definície 6 každý hraničný bod množiny N ako aj každý hromadný bod množiny N je zároveň bodom uzáveru množiny N.

Otvorené a uzavreté množiny I

Definícia 7 (Otvorená a uzavretá množina)

Nech (M,ρ) je metrický priestor a $N \subseteq M$ podmnožina. Množina N sa nazýva otvorená (v metrickom priestore (M,ρ)), ak $N = N^o$, t.j., každý bod množiny N je jej vnútorným bodom. Množina N sa nazýva uzavretá (v metrickom priestore (M,ρ)), ak $N = \overline{N}$, t.j., každý bod uzáveru množiny N patrí do N.

Príklad 14

Zrejme pre každé $x_0 \in M$ a $r > 0$ je otvorená guľa $B(x_0,r)$ otvorenou množinou v (M,ρ). Skutočne, nech $x \in B(x_0,r)$ a položme $\varepsilon := r - \rho(x_0,x)$. Podľa (35) je číslo $\varepsilon > 0$. Uvažujme okolie $\mathcal{O}_\varepsilon(x)$ bodu x. Potom pre $y \in \mathcal{O}_\varepsilon(x)$ platí

$$\rho(x_0,y) \leq \rho(x_0,x) + \rho(x,y) < \rho(x_0,x) + \varepsilon = r,$$

a tak $y \in B(x_0,r)$. Teda $\mathcal{O}_\varepsilon(x) \subseteq B(x_0,r)$, a preto podľa Definície 6(iv) je x vnútorným bodom množiny $B(x_0,r)$. A nakoľko bod $x \in B(x_0,r)$ bol vybraný ľubovoľne, v súlade s Definíciou 7 to znamená, že $B(x_0,r)$ je otvorená množina v (M,ρ). Podobne, uzavretá guľa $B[x_0,r]$ je uzavretou množinou v (M,ρ).

Otvorené a uzavreté množiny II

Príklad 14

Nech x je ľubovoľný bod uzáveru množiny $B[x_0, r]$. Podľa Definície 6(i) pre každé $\varepsilon > 0$ je $\mathcal{O}_\varepsilon(x) \cap B[x_0, r] \neq \emptyset$. Preto existuje $y \in \mathcal{O}_\varepsilon(x) \cap B[x_0, r]$ a platí

$$\rho(x_0, x) \leq \rho(x_0, y) + \rho(y, x) < r + \varepsilon.$$

Keďže posledná nerovnosť platí pre každé $\varepsilon > 0$, nutne $\rho(x_0, x) \leq r$, a tak $x \in B[x_0, r]$ v súlade (35). Podľa Definície 7 je teda $B[x_0, r]$ uzavretou množinou v (M, ρ). Poznamenajme, že ďalej platí inklúzia $\overline{B(x_0, r)} \subseteq B[x_0, r]$, avšak vo všeobecnosti neplatí rovnosť $\overline{B(x_0, r)} = B[x_0, r]$. Napríklad ak (M, ρ) je diskrétny metrický priestor obsahujúci aspoň dva prvky a $r = 1$, potom podľa (36) platí $B(x_0, r) = \{x_0\}$ a $B[x_0, r] = M$. Následne máme $\overline{B(x_0, r)} = \{x_0\}$ a $\overline{B[x_0, r]} = M$, a tak $\overline{B(x_0, r)} \subsetneq B[x_0, r]$.

Poznámka 4

Vo všeobecnom metrickom priestore (M, ρ) je každá jeho konečná podmnožina N uzavretá v (M, ρ). Naviac, každé $x \in N$ je izolovaným bodom množiny N.

Veta 2

Nech (M, ρ) je metrický priestor a $N \subseteq M$ podmnožina. Potom množina N je otvorená v (M, ρ) práve vtedy, keď $M \setminus N$ je uzavretá v (M, ρ). Podobne, množina N je uzavretá v (M, ρ) práve vtedy, keď $M \setminus N$ je otvorená v (M, ρ).

Veta 3

Nech (M, ρ) je metrický priestor. Prienik konečného počtu otvorených množín v (M, ρ) a zjednotenie ľubovoľného počtu otvorených množín v (M, ρ) je opäť množina otvorená. Zjednotenie konečného počtu uzavretých množín v (M, ρ) a prienik ľubovoľného počtu uzavretých množín v (M, ρ) je opäť množina uzavretá.

Poznámka 5

Poznamenajme, že prienik nekonečného počtu otvorených množín nemusí byť množina otvorená a zjednotenie nekonečného počtu uzavretých množín nemusí byť množina uzavretá. Uvažujem dva nekonečné systémy podmnožín v $\mathbb{R}$

$$A_n := \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), \qquad B_n := \left[-\frac{n}{n+1}, \frac{n}{n+1}\right], \quad n \in \mathbb{N}.$$

Množiny A_n sú zrejme otvorené v $\mathbb{E}$, ale $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{0\}$ nie je otvorená v $\mathbb{E}$. Podobne, B_n sú uzavreté v $\mathbb{E}$, ale $\cup_{n\in\mathbb{N}} B_n = (-1, 1)$ nie je uzavretá v $\mathbb{E}$.

Definícia 8 (Hustá množina)

Nech (M, ρ) je metrický priestor a $A, B \subseteq M$ podmnožiny. Hovoríme, že množina B je hustá v metrickom podpriestore (A, ρ), ak platí $A \subseteq \overline{B}$.

Definícia 9 (Riedka množina)

Nech (M, ρ) je metrický priestor a $N \subseteq M$ podmnožina. Množina N sa označuje ako riedka v metrickom priestore (M, ρ), ak neexistuje žiadna otvorená guľa v M, v ktorej by bola množina N hustá.

Definícia 10 (Separabilný metrický priestor)

Metrický priestor (M, ρ) sa nazýva separabilný, ak existuje najviac spočítateľná (t.j., konečná alebo spočítateľná) podmnožina $N \subseteq M$, ktorá je hustá v (M, ρ).

Poznámka 6

Skutočnosť, že množina B je hustá v (A, ρ), je ekvivalentná s reláciou

pre každé $x \in A$ a pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $y \in B$ tak, že $\rho(x, y) < \varepsilon$.

Poznámka 7

Nie je ťažké ukázať, že nejaká podmnožina $N \subseteq M$ je riedka v metrickom priestore (M, ρ) práve vtedy, keď každá otvorená guľa $B \subseteq M$ obsahuje otvorenú guľu $C \subseteq B$ tak, že $N \cap C = \emptyset$.

Príklad 15 (Separabilita priestoru spojitých funkcií)

Pre ľubovoľné $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, je metrický priestor $(\mathcal{C}[a,b], \rho_C)$ predstavený v Príklade 4 separabilný. Tento významný výsledok vyplýva z Weierstrassovej vety o aproximácii spojitých funkcií, podľa ktorej je množina P všetkých polynómov s reálnymi koeficientami hustá v metrickom priestore $(\mathcal{C}[a,b], \rho_C)$. Podľa Definície 8 teda platí $\mathcal{C}[a,b] = \overline{P}$. Z vlastností množiny reálnych čísiel $\mathbb{R}$ ďalej vieme, že množina všetkých racionálnych čísiel $\mathbb{Q}$ je hustá v metrickom priestore $\mathbb{E}$. To znamená, že množina Q všetkých polynómov s racionálnymi koeficientami je hustá v P, t.j., platí $P \subseteq \overline{Q}$ opäť podľa Definície 8. Okrem toho, keďže zrejme $Q \subseteq P$, v súlade s Vetou 1(ii),(iii) máme $\overline{P} = \overline{Q}$. Následne $\mathcal{C}[a,b] = \overline{Q}$, čo ukazuje, že množina Q je hustá v metrickom priestore $(\mathcal{C}[a,b], \rho_C)$. A keďže množina Q je spočítateľná (vďaka spočítateľnosti množiny $\mathbb{Q}$), je $(\mathcal{C}[a,b], \rho_C)$ v zhode s Definíciou 10 separabilný metrický priestor.

Príklad 16 (Separabilita diskrétneho priestoru)

Diskrétny metrický priestor je separabilný práve vtedy, keď má najviac spočítateľne veľa prvkov. Je to dôsledok skutočnosti, že v každom diskrétnom metrickom priestore sú všetky jeho podmnožiny uzavreté (a teda súčasne i otvorené).

Príklad 17 (Separabilita l^p-priestorov)

Pre každú reálnu hodnotu $p \geq 1$ je metrický priestor l^p zavedený v Príklade 3 separabilný, pričom jeho príslušná spočítateľná hustá podmnožina je napríklad

$$N = \{\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{Q}, \quad x_k \neq 0 \text{ iba pre konečne veľa indexov } k \in \mathbb{N}\}. \tag{38}$$

Podstatnú úlohu pri tom zohráva skutočnosť, že množina racionálnych čísiel $\mathbb{Q}$ je spočítateľná a hustá v metrickom priestore $\mathbb{E}$.

Príklad 18

V Príklade 3 sme predstavili metrické priestory l^∞, c a c_0. Platí potom, že c a c_0 sú uzavreté metrické podpriestory v priestore l^∞.

Príklad 19

Metrický priestor l^∞ definovaný v Príklade 3 nie je separabilný. Nech

$$N := \left\{x^{[n]} = \{x_k^{[n]}\}_{k=1}^{\infty} \subseteq l^\infty,\ n \in \mathbb{N}\right\} \tag{39}$$

je nejaká spočítateľná podmnožina v l^∞. Definujme postupnosť $y = \{y_k\}_{k=1}^{\infty}$

$$y_k := \begin{cases} 0, & \left|x_k^{[k]}\right| > 1, \\ 1 + x_k^{[k]}, & \left|x_k^{[k]}\right| \le 1. \end{cases} \tag{40}$$

Zrejme postupnosť y je ohraničená, a tak $y \in l^\infty$ v súlade s Príkladom 3. Podľa (23) v Definícii 3 pre vzdialenosť y od N v l^∞ platí

$$\rho(y, N) \overset{(23),(39)}{=} \inf\left\{\rho\left(y, x^{[n]}\right),\ n \in \mathbb{N}\right\}. \tag{41}$$

Pre každé $n \in \mathbb{N}$ však máme

$$\rho\left(y, x^{[n]}\right) \overset{(12)}{=} \sup_{k\in\mathbb{N}} \left|y_k - x_k^{[n]}\right| \ge \left|y_n - x_n^{[n]}\right| \overset{(40)}{\ge} 1. \tag{42}$$

Preto v zhode s (41) dostávame $\rho(y, N) \ge 1$. Podľa Poznámky 6 teda žiadna spočítateľná podmnožina N nemôže byť hustá v l^∞, a tak v súlade s Definíciou 10 metrický priestor l^∞ nie je separabilný.

Obsah

Konvergentné a cauchyovské postupnosti

Definícia 11 (Konvergentná postupnosť)

Nech (M,ρ) je metrický priestor a $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq M$ postupnosť. Hovoríme, že postupnosť $\{x_k\}$ konverguje v metrickom priestore (M,ρ) k bodu $x \in M$, ak

$$\text{pre každé } \varepsilon > 0 \text{ existuje } k_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ tak, že pre každé } k \geq k_\varepsilon \text{ platí } x_k \in \mathcal{O}_\varepsilon(x). \qquad (43)$$

Inými slovami, platí relácia $\lim_{k\to\infty} \rho(x_k, x) = 0$. Bod $x \in M$ sa nazýva limita postupnosti $\{x_k\}$, pričom píšeme $\lim_{k\to\infty} x_k = x$, resp. $x_k \to x$ pre $k \to \infty$.

Definícia 12 (Cauchyovská postupnosť)

Nech (M,ρ) je metrický priestor a $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq M$ postupnosť. Hovoríme, že postupnosť $\{x_k\}$ je cauchyovská (tiež fundamentálna) v (M,ρ) ak

$$\text{pre každé } \varepsilon > 0 \text{ existuje } k_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ tak, že pre každé } m,n \geq k_\varepsilon \text{ platí } \rho(x_m, x_n) < \varepsilon. \qquad (44)$$

Inými slovami, platí relácia $\rho(x_m, x_n) \to 0$ pre $\min\{m,n\} \to \infty$.

Poznámka 8

Z Definícií 3 a 12 vyplýva, že každá cauchyovská postupnosť je ohraničená v M.

Veta 4

Nech (M,ρ) je metrický priestor. Potom platia nasledujúce tvrdenia.

- **(i)** *Každá postupnosť konvergentná v M má práve jednu limitu.*
- **(ii)** *Každá postupnosť konvergentná v M je cauchyovská v M.*
- **(iii)** *Ak postupnosť $\{x_k\} \subseteq M$ konverguje k bodu $x \in M$, potom každá podpostupnosť vybraná z tejto postupnosti konverguje k x.*
- **(iv)** *Ak postupnosť $\{x_k\} \subseteq M$ je cauchyovská a obsahuje konvergentnú podpostupnosť s limitou $x \in M$, potom celá postupnosť je konvergentná s limitou x.*

Veta 5

Nech (M,ρ) je metrický priestor a $N \subseteq M$ podmnožina. Bod $x \in M$ je bod uzáveru množiny N práve vtedy, keď existuje konvergentná postupnosť $\{x_k\} \subseteq N$, ktorá má za limitu bod x.

Príklad 20 (Konvergencia v diskrétnom metrickom priestore)

V diskrétnom metrickom priestore je postupnosť konvergentná, resp. cauchyovská práve vtedy, keď je skorostacionárna, t.j., od istého indexu konštantná.

Príklad 21

V ultrametrickom priestore (M, ρ) je postupnosť $\{x_k\} \subseteq M$ cauchyovská práve vtedy, keď platí $\lim_{k\to\infty} \rho(x_k, x_{k+1}) = 0$. Kým implikácia „$\Rightarrow$" vyplýva priamo z Definície 12, opačná implikácia „$\Leftarrow$" je dôsledkom zosilnenej trojuholníkovej nerovnosti v (21). Skutočne, pre každú dvojicu indexov $m < n$ platí

$$0 \le \rho(x_m, x_n) \le \max\{\rho(x_m, x_{n-1}),\ \rho(x_{n-1}, x_n)\},$$

$$0 \le \rho(x_m, x_{n-1}) \le \max\{\rho(x_m, x_{n-2}),\ \rho(x_{n-2}, x_{n-1})\},$$

$$\vdots$$

$$0 \le \rho(x_m, x_{m+3}) \le \max\{\rho(x_m, x_{m+2}),\ \rho(x_{m+2}, x_{m+3})\},$$

$$0 \le \rho(x_m, x_{m+2}) \le \max\{\rho(x_m, x_{m+1}),\ \rho(x_{m+1}, x_{m+2})\},$$

z čoho ihneď vyplýva relácia $\rho(m, n) \to 0$ pre $\min\{m, n\} \to \infty$, a tak postupnosť $\{x_k\}$ je podľa Definície 12 cauchyovská. Poznamenajme, že v priestoroch, ktoré nie sú ultrametrické, tento výsledok nemusí platiť. Napríklad v euklidovskom priestore $\mathbb{E}$ pre postupnosť $\{x_k\}$ definovanú

$$x_k := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k}, \quad k \in \mathbb{N},$$

síce platí $\lim_{k\to\infty} |x_k - x_{k+1}| = 0$, ale nejedná sa o cauchyovskú postupnosť, pretože $\lim |x_m - x_n| \ne 0$ pre $\min\{m, n\} \to \infty$.

Definícia 13 (Ekvivalentné metriky)

Nech (M,ρ) a (M,σ) sú metrické priestory. Metriky ρ a σ sa nazývajú ekvivalentné, ak pre každú postupnosť $\{x_k\} \subseteq M$ a bod $x \in M$ platí

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x \text{ vzhľadom na } \rho \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{k\to\infty} x_k = x \text{ vzhľadom na } \sigma. \tag{45}$$

Príklad 22

Rozhodnime o ekvivalencii metrík ρ_C a ρ_I na množine $\mathcal{C}[a,b]$, pozri Príklad 4. Uvedené metriky nie sú ekvivalentné. Označme $c := (a+b)/2$ a pre dostatočne veľké indexy $n \in \mathbb{N}$ uvažujme postupnosť funkcií $\{f_n\} \subseteq \mathcal{C}[a,b]$ s predpismi

$$f_n(x) := \begin{cases} 0, & x \in \left[a, c-\frac{1}{n}\right] \cup \left[c+\frac{1}{n}, b\right], \\ n\left(x-c+\frac{1}{n}\right), & x \in \left[c-\frac{1}{n}, c\right], \\ n\left(c-x+\frac{1}{n}\right), & x \in \left[c, c+\frac{1}{n}\right]. \end{cases} \tag{46}$$

V integrálnej metrike ρ_I táto postupnosť konverguje k funkcii $f(x) \equiv 0$ na $[a,b]$. V metrike rovnomernej konvergencie ρ_C však postupnosť v (46) nemá limitu v $\mathcal{C}[a,b]$, keďže bodová limita $g(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ je funkcia nespojitá na $[a,b]$. Okrem toho platí $\lim_{n\to\infty} \rho_C(f_n, f) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$, a tak podľa Definícií 11 a 13 dané metriky nie sú ekvivalentné na množine $\mathcal{C}[a,b]$.

Obsah

Spojité zobrazenie

Definícia 14 (Spojité zobrazenie)

Nech (M, ρ) a (N, σ) sú metrické priestory a $f : M \to N$. Zobrazenie f sa nazýva spojité v bode $x_0 \in M$, ak pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že

$$\text{pre každé } x \in M \text{ také, že } \rho(x, x_0) < \delta, \text{ platí } \sigma(f(x), f(x_0)) < \varepsilon. \tag{47}$$

Zobrazenie f je spojité na M, ak je spojité v každom bode množiny M.

Veta 6

Nech (M, ρ) a (N, σ) sú metrické priestory a $f : M \to N$ zobrazenie. Potom f je spojité v bode $x_0 \in M$ práve vtedy, keď pre každú postupnosť $\{x_k\} \subseteq M$ s $\lim_{k\to\infty} x_k = x_0$ v metrike ρ platí $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(x_0)$ v metrike σ.

Príklad 23

Uvažujme metrické priestory $(M, \rho) := \mathbb{E}$ a $(N, \sigma) := (\mathbb{R}, \rho_D)$, kde ρ_D je diskrétna metrika zavedená v (1). Potom zobrazenie $f : M \to N$ je spojité na M práve vtedy, keď je konštantné na M. Na druhej strane, priamo z Definície 14 vyplýva, že každé zobrazenie $g : N \to M$ je spojité na N.

Veta 7

Nech (M, ρ) a (N, σ) sú metrické priestory a $f : M \to N$ zobrazenie. Nasledujúce výroky su ekvivalentné.

(i) *Zobrazenie f je spojité na M.*

(ii) *Pre každú podmnožinu $A \subseteq M$ platí $f\left(\overline{A}\right) \subseteq \overline{f(A)}$.*

(iii) *Pre každú otvorenú podmnožinu $B \subseteq N$ je jej úplný vzor*

$$f^{-1}(B) := \{x \in M,\ f(x) \in B\} \tag{48}$$

otvorenou podmnožinou v metrickom priestore (M, ρ).

(iv) *Pre každú uzavretú podmnožinu $B \subseteq N$ je množina $f^{-1}(B)$ uzavretou podmnožinou v metrickom priestore (M, ρ).*

Definícia 15 (Rovnomerne spojité zobrazenie)

Nech (M, ρ) a (N, σ) sú metrické priestory a $f : M \to N$. Povieme, že zobrazenie f je rovnomerne spojité na M, ak pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak,

$$\text{že ak pre } x, y \in M \text{ platí } \rho(x, y) < \delta, \text{ potom } \sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon. \tag{49}$$

Lipschitzovské zobrazenie a kontrakcia

Definícia 16 (Lipschitzovské zobrazenie)

Nech (M, ρ) a (N, σ) sú metrické priestory a $f : M \to N$. Zobrazenie f sa označuje ako lipschitzovské, ak existuje nezáporná reálna konštanta L s vlastnosťou

$$\sigma(f(x), f(y)) \leq L\rho(x, y) \quad \text{pre každé } x, y \in M. \tag{50}$$

Číslo L sa nazýva Lipschitzova konštanta zobrazenia f. V prípade, ak $L \in [0, 1)$, sa zobrazenie f označuje ako kontraktívne, resp. kontrakcia.

Veta 8

Nech (M, ρ) a (N, σ) sú metrické priestory a $f : M \to N$ je lipschitzovské zobrazenie. Potom f je zobrazenie rovnomerne spojité na M.

Príklad 24

Funkcia $F : \mathcal{C}[a,b] \to \mathbb{R}$ definovaná predpisom

$$F(f) := \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \quad f \in \mathcal{C}[a,b], \tag{51}$$

je lipschitzovské zobrazenie medzi metrickými priestormi $(\mathcal{C}[a,b], \rho_C)$ a $\mathbb{E}$ s Lipschitzovou konštantou $L = b - a$. Skutočne, pre každé $f, g \in \mathcal{C}[a,b]$ platí

$$\begin{aligned} \rho_2(F(f), F(g)) &\overset{(6)}{=} |F(f) - F(g)| \overset{(51)}{=} \left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \right| \\ &= \left| \int_a^b [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x \right| \le \int_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x \\ &\overset{(14)}{\le} \int_a^b \rho_C(f,g)\,\mathrm{d}x = \rho_C(f,g) \int_a^b \mathrm{d}x = (b-a)\,\rho_C(f,g). \end{aligned} \tag{52}$$

Poznamenajme, že hodnota Lipschitzovej konštanty $L = b - a$ je optimálna v tom zmysle, že sa nedá nahradiť menšou hodnotou tak, aby nerovnosť (52) zostala v platnosti pre každú dvojicu funkcií $f, g \in \mathcal{C}[a,b]$. Napríklad pre funkcie $f(x) \equiv 2$ a $g(x) \equiv 1$ sa nerovnosť v (52) realizuje ako rovnosť, nakoľko $F(f) = 2(b-a)$, $F(g) = b - a$, $\rho_C(f,g) = 1$ a $\rho_2(F(f), F(g)) = b - a$.

Príklad 25

Nech F je zobrazenie metrického priestoru $(\mathcal{C}[0,1], \rho_C)$ do seba s predpisom

$$F(f)(x) := \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t, \quad f \in \mathcal{C}[0,1], \quad x \in [0,1]. \tag{53}$$

Rozhodnime, či F je kontraktívne zobrazenie. Pre každé $f, g \in \mathcal{C}[0,1]$ máme

$$\begin{aligned}
\rho_C(F(f), F(g)) &\overset{(14)}{=} \max_{x\in[0,1]} |F(f)(x) - F(g)(x)| \overset{(53)}{=} \max_{x\in[0,1]} \left| \int_0^x [tf(t) - tg(t)]\,\mathrm{d}t \right| \\
&\le \max_{x\in[0,1]} \int_0^x |tf(t) - tg(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t|f(t) - g(t)|\,\mathrm{d}t \\
&\overset{(14)}{\le} \int_0^1 t\rho_C(f,g)\,\mathrm{d}t = \rho_C(f,g) \int_0^1 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} \cdot \rho_C(f,g).
\end{aligned}$$

Podľa Definície 16 je teda zobrazenie F lipschitzovské s Lipschitzovou konštantou $L = 1/2$, čo následne ukazuje, že sa naozaj jedná o kontrakciu.

Príklad 26

Nech $a < b$ sú dané reálne čísla. Dokážeme, že funkcia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ so spojitou deriváciou na intervale $[a,b]$ je kontraktívne zobrazenie z metrického priestoru $([a,b],\rho_2)$ do $\mathbb{E}$ práve vtedy, keď platí $|f'(x)| < 1$ pre každé $x \in [a,b]$.
Nech f je kontrakcia s Lipschitzovou konštantou $L \in [0,1)$ a predpokladajme sporom, že $\max\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)| \geq 1$. Teda existuje $c \in [a,b]$ také, že $|f'(c)| > L$, t.j.,

$$|f'(c)| = \lim_{x\to c} \left|\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\right| > L, \quad \text{a tak} \quad |f(x)-f(c)| > L|x-c|$$

pre všetky $x \in [a,b]$ dostatočne blízko k bodu c. To však, vzhľadom na Definíciu 16, odporuje predpokladu kontraktívnosti zobrazenia f na celom $[a,b]$ s konštantou L. Preto musí platiť $\max_{x\in[a,b]} |f'(x)| < 1$, a tak $|f'(x)| < 1$ na $[a,b]$.
Naopak, nech funkcia f spĺňa nerovnosť $|f'(x)| < 1$ pre všetky $x \in [a,b]$. Predpoklad spojitosti derivácie f' zaručuje existenciu čísla $L \in [0,1)$ s vlastnosťou $|f'(x)| \leq L$ pre každé $x \in [a,b]$. Ukážeme, že funkcia f je kontrakcia na $[a,b]$ s konštantou L. Pre ľubovoľné $x, y \in [a,b]$ podľa Lagrangeovej vety platí

$$|f(x)-f(y)| = |f'(c)\,(x-y)| = |f'(c)|\,|x-y| \quad \text{pre isté } c \text{ medzi } x \text{ a } y.$$

To následne znamená, že $|f(x)-f(y)| = |f'(c)|\,|x-y| \leq L|x-y|$, a teda f je kontraktívne zobrazenie s Lipschitzovou konštantou L.

Homeomorfné zobrazenie metrických priestorov

Definícia 17 (Homeomorfné zobrazenie)

Nech (M,ρ) a (N,σ) sú metrické priestory a $f : M \to N$ bijekcia. Zobrazenie f sa nazýva homeomorfné, resp. homeomorfizmus, ak obidve zobrazenia f a f^{-1} sú spojité. V tomto prípade hovoríme, že metrické priestory (M,ρ) a (N,σ) sú (vzájomne) homeomorfné.

Veta 9

Nech (M,ρ) a (N,σ) sú metrické priestory a nech $f : M \to N$ je homeomorfné zobrazenie. Potom platia nasledujúce tvrdenia.

(i) *Množina $A \subseteq M$ je otvorená v M práve vtedy, keď $f(A)$ je otvorená v N.*

(ii) *Množina $A \subseteq M$ je uzavretá v M práve vtedy, keď $f(A)$ je uzavretá v N.*

Príklad 27

Funkcia $f : \mathbb{R} \to (-1,1)$ definovaná predpisom $f(x) := \frac{x}{1+|x|}$, $x \in \mathbb{R}$, je homeomorfizmus metrických priestorov $\mathbb{E}$ a $((-1,1),\rho_2)$.

Obsah

Úplnosť metrického priestoru

Definícia 18 (Úplný metrický priestor)

Metrický priestor (M, ρ) sa označuje ako úplný, ak v ňom každá jeho cauchyovská postupnosť má limitu, t.j., je konvergentná.

Príklad 28 (Úplnosť diskrétneho metrického priestoru)

Každý diskrétny metrický priestor je úplný, keďže podľa Príkladu 20 každá jeho cauchyovská postupnosť je skorostacionárna, a teda nutne i konvergentná.

Príklad 29

Pre každé $n \in \mathbb{N}$ je euklidovský priestor $\mathbb{E}^n$ úplným metrickým priestorom. Obzvlášť, úplnosť priestoru $\mathbb{E}$ je dôsledkom tzv. Cantorovho–Dedekindovho princípu do seba vložených intervalov. Vo všeobecnosti, pre ľubovoľné $p \in [1, \infty)$ je každý z metrických priestorov $(\mathbb{R}^n, \rho_p)$ s metrikou ρ_p definovanou v (2) úplný.

Príklad 30 (Úplnosť l^p-priestorov)

Pre každé $p \in [1, \infty)$ je priestor l^p predstavený v Príklade 3 úplným metrickým priestorom. Dokážeme toto tvrdenie. Nech $p \geq 1$ je dané a nech $\{x^{[n]}\}_{n=1}^{\infty} \subseteq l^p$, kde $x^{[n]} = \{x_k^{[n]}\}_{k=1}^{\infty}$, je nejaká postupnosť cauchyovská v priestore l^p. Teda

$$\rho^p \left(x^{[m]}, x^{[n]}\right) \overset{(8)}{=} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left|x_k^{[m]} - x_k^{[n]}\right|^p\right)^{1/p} \to 0 \quad \text{pre } \min\{m, n\} \to \infty, \tag{54}$$

podľa Definície 12. Obzvlášť, z relácie (54) vyplýva, že pre každý pevný index $k \in \mathbb{N}$ je postupnosť $\{x_k^{[n]}\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$ cauchyovská v euklidovskom priestore $\mathbb{E}$, a teda i konvergentná vďaka úplnosti priestoru $\mathbb{E}$ v Príklade 29. Nech $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$ označuje príslušnú postupnosť limít, t.j.,

$$x_k := \lim_{n \to \infty} x_k^{[n]}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{55}$$

Ukážeme, že postupnosť $\{x^{[n]}\}$ konverguje k x v metrike ρ^p a že $x \in l^p$. Zvoľme $\varepsilon > 0$. Z toho, že $\{x^{[n]}\}$ je cauchyovská v l^p, máme v súlade s (44) zaručenú existenciu $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s vlastnosťou $\rho^p(x^{[m]}, x^{[n]}) < \frac{\varepsilon}{2}$ pre každé $m, n \geq n_\varepsilon$, a tak

Príklad 30 (Úplnosť l^p-priestorov)

$$\left(\sum_{i=1}^{k}\left|x_i^{[m]}-x_i^{[n]}\right|^p\right)^{1/p} \overset{(8)}{\leq} \rho^p\left(x^{[m]},x^{[n]}\right) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pre každé } k\in\mathbb{N}. \tag{56}$$

Limitným prechodom v (56) pre $m\to\infty$ so zreteľom na (55) dostaneme

$$\left(\sum_{i=1}^{k}\left|x_i-x_i^{[n]}\right|^p\right)^{1/p} \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pre každé } k\in\mathbb{N}, \tag{57}$$

z čoho následným limitovaním pre $k\to\infty$ získame

$$\rho^p\left(x,x^{[n]}\right) \overset{(8)}{=} \left(\sum_{i=1}^{\infty}\left|x_i-x_i^{[n]}\right|^p\right)^{1/p} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad \text{pre každé } n\geq n_\varepsilon. \tag{58}$$

Nerovnosť (58) podľa Definície 11 znamená, že postupnosť $\{x^{[n]}\}$ konverguje k x v metrike ρ^p. Obzvlášť, $\{x^{[n]}\}$ je ohraničená v l^p, t.j., existuje $L>0$ tak, že

$$\sum_{i=1}^{k}\left|x_i^{[n]}\right|^p \leq L \quad \text{pre každé } k,n\in\mathbb{N}. \tag{59}$$

Limitovaním tejo nerovnosti najprv pre $n\to\infty$, a následne pre $k\to\infty$, a využitím (55) napokon odvodíme $\sum|x_i|^p\leq L$, a tak $x\in l^p$, podľa Príkladu 3.

Príklad 31 (Úplnosť priestoru spojitých funkcií)

Nech $a < b$ sú dané reálne čísla. Metrický priestor $(\mathcal{C}[a,b], \rho_C)$ zavedený v Príklade 4 je úplný. Nech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{C}[a,b]$ je nejaká postupnosť cauchyovská vzhľadom na metriku ρ_C a nech $\varepsilon > 0$ je dané. V súlade s (14) a Definíciou 12 potom existuje index $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s vlastnosťou

$$\rho_C(f_m, f_n) \overset{(14)}{=} \max_{x\in[a,b]} |f_m(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{pre každé } m, n \geq k_\varepsilon. \tag{60}$$

Obzvlášť, relácia (60) je ekvivalentná s nerovnosťou

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{pre každé } m, n \geq k_\varepsilon \text{ a každé } x \in [a,b]. \tag{61}$$

Z (61) ihneď vyplýva, že pre každé $x \in [a,b]$ je číselná postupnosť $\{f_n(x)\}$ cauchyovská v $\mathbb{E}$, a teda aj konvergentná. Skúmaná postupnosť $\{f_n\}$ teda bodovo konverguje na intervale $[a,b]$ k istej funkcii $f(x)$, t.j.,

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad \text{pre každé } x \in [a,b]. \tag{62}$$

Táto konvergencia je však dokonca rovnomerná, nakoľko limitovaním nerovnosti v (61) pre $m \to \infty$ a využitím (62) dostaneme

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{pre každé } n \geq k_\varepsilon \text{ a každé } x \in [a,b]. \tag{63}$$

Príklad 31 (Úplnosť priestoru spojitých funkcií)

To znamená, že postupnosť $\{f_n\}$ konverguje k funkcii f v metrickom priestore $(\mathcal{B}[a,b], \rho_B)$ definovanom v Príklade 4. Stačí nám teda dokázať už len spojitosť funkcie f na intervale $[a,b]$. Nech $x_* \in [a,b]$ je ľubovoľný, ale pevný bod a nech $\{x_k\} \subseteq [a,b]$ je nejaká postupnosť bodov konvergujúca (v $\mathbb{E}$) k x_*. Funkcie f_n, $n \in \mathbb{N}$, sú spojité, preto pre každé dané $n \in \mathbb{N}$ existuje index $l_{\varepsilon,n} \in \mathbb{N}$ tak, že

$$|f_n(x_k) - f_n(x_*)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{pre každé } k \geq l_{\varepsilon,n}. \tag{64}$$

Pre nejaké zvolené $n \geq k_\varepsilon$ položme $N := \max\{k_\varepsilon, l_{\varepsilon,n}\}$. Aplikáciou trojuholníkovej nerovnosti a odhadov v (63) a (64) pre každé $k \geq N$ dostaneme

$$\begin{aligned}
|f(x_k) - f(x_*)| &= |f(x_k) - f_n(x_k) + f_n(x_k) - f_n(x_*) + f_n(x_*) - f(x_*)| \\
&\leq |f(x_k) - f_n(x_k)| + |f_n(x_k) - f_n(x_*)| + |f_n(x_*) - f(x_*)| \\
&\overset{(63),(64)}{<} \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

čo ihneď ukazuje, že funkcia f je spojitá v bode x_*, a tak i $f \in \mathcal{C}[a,b]$.

Príklad 32

Rozhodnime, či i priestor $(\mathcal{C}[a,b], \rho_I)$ je úplným metrickým priestorom.

Veta 10

Nech (M, ρ) je úplný metrický priestor a $N \subseteq M$ uzavretá neprázdna množina. Potom (N, ρ) je úplný metrický priestor.

Definícia 19 (Úplný obal metrického priestoru)

Nech (M, ρ) a (N, σ) sú metrické priestory. Hovoríme, že metrický priestor (N, σ) je úplný obal metrického priestoru (M, ρ), ak

(i) (N, σ) je úplný metrický priestor,

(ii) $M \subseteq N$ a $\rho \equiv \sigma|_{M \times M}$,

(iii) množina M je hustá v (N, σ).

Veta 11

Pre každý metrický priestor (M, ρ) existuje jeho úplný obal, ktorý je určený jednoznačne v nasledujúcom zmysle. Ak (N_1, σ_1) a (N_2, σ_2) sú dva úplné obaly metrického priestoru (M, ρ), potom existuje izometria $\Phi : N_1 \to N_2$ taká, že jej zúženie $\Phi|_M$ je identické zobrazenie na M.

Veta 12

Nech (M, ρ) je úplný metrický priestor a $N \subseteq M$ neprázdna množina. Potom $(\overline{N}, \rho)$ je úplný obal metrického priestoru (N, ρ).

Príklad 33

Pre každé $n \in \mathbb{N}$ je euklidovský priestor $\mathbb{E}^n$ úplný obal metrického priestoru $(\mathbb{Q}^n, \rho_2)$ a rovnako i metrického priestoru $(\mathbb{R}^n \setminus \{[0, \dots, 0]\}, \rho_2)$. Obzvlášť, pre $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, je podľa Vety 10 metrický priestor $([a, b]^n, \rho_2)$, ako uzavretý podpriestor v $\mathbb{E}^n$, úplný a je zúplnením každého z metrických priestorov $([a, b)^n, \rho_2)$, $((a, b]^n, \rho_2)$ a $((a, b)^n, \rho_2)$, v zhode s Vetou 12.

Veta 13

Nech (M, ρ) je metrický priestor. Potom (M, ρ) je úplný metrický priestor práve vtedy, keď každá postupnosť $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ jeho do seba vložených uzavretých guli, ktorých polomery konvergujú do nuly, má neprázdny prienik. Naviac, v tomto prípade je daný prienik pre každú uvedenú postupnosť $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ vždy jednoprvkový.

Dôkaz Vety 13.

Nech (M, ρ) je úplný metrický priestor a nech

$$M \supseteq B_1[x_1, r_1] \supseteq B_2[x_2, r_2] \supseteq B_3[x_3, r_3] \supseteq \cdots \supseteq B_k[x_k, r_k] \supseteq \cdots, \tag{65}$$

kde $\lim_{k\to\infty} r_k = 0$, je nejaká postupnosť do seba vložených uzavretých gulí v M s polomermi konvergujúcimi do nuly. Odpovedajúca postupnosť stredov $\{x_k\}$ je v súlade s Definíciou 12 cauchyovská, keďže platí $\rho(x_m, x_n) \le r_m$ pre každú dvojicu indexov m, n spĺňajúcu $n \ge m$. Vďaka úplnosti priestoru (M, ρ) potom $\{x_k\}$ konverguje v M, t.j., existuje $x \in M$ také, že $\lim_{k\to\infty} x_k = x$. Platí

$$x \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} B_k[x_k, r_k]. \tag{66}$$

Skutočne, podľa (65) pre každé dané $n \in \mathbb{N}$ množina $B_n[x_n, r_n]$ obsahuje všetky body postupnosti $\{x_k\}$ od indexu $k = n$ vrátane. A keďže $B_n[x_n, r_n]$ je uzavretá v M a $x = \lim_{k\to\infty} x_k$, z Poznámky 3 vyplýva, že nutne $x \in B_n[x_n, r_n]$. Podľa (66) je teda prienik postupnosti $\{B_k\}$ neprázdny.
Naopak, predpokladajme, že každá postupnosť do seba vložených uzavretých gulí v M s polomermi konvergujúcimi do nuly má neprázdny prienik. Nech $\{x_k\} \subseteq M$ je nejaká postupnosť cauchyovská v metrickom priestore (M, ρ). Dokážeme, že $\{x_k\}$ je i konvergentná a jej limita patrí do M. V súlade s Definíciou 12 zo skutočnosti, že $\{x_k\}$ je cauchyovská, vyplýva existencia indexu n_1 s vlastnosťou

Dôkaz Vety 13 (pokračovanie).

$$\rho(x_m, x_n) \leq \frac{1}{2} \quad \text{pre každé } m, n \geq n_1. \tag{67}$$

Obzvlášť, nerovnosť v (67) (s $m := n_1$) implikuje reláciu

$$x_n \in B\left[x_{n_1}, \frac{1}{2}\right] \quad \text{pre každé } n \geq n_1. \tag{68}$$

Ďalej existuje $n_2 > n_1$ s vlastnosťou

$$\rho(x_m, x_n) \leq \frac{1}{2^2} \quad \text{pre každé } m, n \geq n_2, \tag{69}$$

čo následne (s $m := n_2$) ukazuje, že

$$x_n \in B\left[x_{n_2}, \frac{1}{2^2}\right] \quad \text{pre každé } n \geq n_2. \tag{70}$$

Nech teraz $x \in B\left[x_{n_2}, \frac{1}{2}\right]$. Pomocou trojuholníkovej nerovnosti potom máme

$$\rho(x, x_{n_1}) \leq \rho(x, x_{n_2}) + \rho(x_{n_2}, x_{n_1}) \overset{(68)}{\leq} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1, \quad \text{a tak } x \in B\left[x_{n_1}, 1\right]$$

$$\Downarrow$$

$$B\left[x_{n_2}, \frac{1}{2}\right] \subseteq B\left[x_{n_1}, 1\right]. \tag{71}$$

Dôkaz Vety 13 (pokračovanie).

Týmto spôsobom môžeme induktívne zostrojiť postupnosť indexov $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ a vybranú podpostupnosť $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. Konkrétne, ak

$$\text{indexy } n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_k \text{ a body } x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \ldots, x_{n_k}$$

sú zostrojené ako vyššie, potom existuje index $n_{k+1} > n_k$ s vlastnosťou

$$\rho(x_m, x_n) \leq \frac{1}{2^{k+1}} \quad \text{pre každé } m, n \geq n_{k+1}, \tag{72}$$

čo (s $m := n_{k+1}$) ukazuje, že pre každé $n \geq n_{k+1}$ platí

$$x_n \in B\left[x_{n_{k+1}}, \frac{1}{2^{k+1}}\right], \quad \text{a následne} \quad B\left[x_{n_{k+1}}, \frac{1}{2^k}\right] \subseteq B\left[x_{n_k}, \frac{1}{2^{k-1}}\right]. \tag{73}$$

Získali sme teda postupnosť do seba vložených uzavretých gulí $B\left[x_{n_k}, \frac{1}{2^{k-1}}\right]$, $k \in \mathbb{N}$, ktorých polomery očividne konvergujú do nuly. Táto postupnosť má podľa predpokladov neprázdny prienik, t.j., existuje bod $x \in M$ tak, že $x \in B\left[x_{n_k}, \frac{1}{2^{k-1}}\right]$ pre každé $k \in \mathbb{N}$. To však znamená, že $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. Napokon, z Vety 4(iv) vyplýva, že i celá postupnosť $\{x_k\}$ je konvergentná s limitou x. To ukazuje úplnosť metrického priestoru (M, ρ). Dôkaz je hotový. ∎

Poznámka 9

Poznamenajme, že kritérium úplnosti metrického priestoru (M, ρ) prezentované vo Vete 13 sa dá zovšeobecniť nasledujúcim spôsobom. Metrický priestor (M, ρ) je úplný práve vtedy, keď ľubovoľná postupnosť $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ jeho do seba vložených uzavretých podmnožín, ktorých priemery $d(A_k)$, $k \in \mathbb{N}$, konvergujú do nuly, má neprázdny prienik.

Veta 14 (Bairova)

Žiadny neprázdny úplný metrický priestor (M, ρ) sa nedá vyjadriť ako spočítateľné zjednotenie množín riedkych v (M, ρ). Inými slovami, neprázdny úplný metrický priestor je množina druhej kategórie.

Dôkaz Vety 14.

Vetu dokážeme sporom, t.j., predpokladajme, že existuje neprázdny úplný metrický priestor (M, ρ), pre ktorý platí

$$M = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k, \quad A_k \subseteq M \text{ je riedka v } (M, \rho) \text{ pre každé } k \in \mathbb{N}. \tag{74}$$

Dôkaz Vety 14 (pokračovanie).

Zvoľme nejaký bod $x_0 \in M$. Keďže množina A_1 je riedka v (M, ρ), podľa Poznámky 7 pre uzavretú guľu $B[x_0, 2]$ existuje $r_1 \in (0, 1)$ a bod $x_1 \in M$ tak, že uzavretá guľa $B[x_1, r_1] \subseteq B[x_0, 2]$ a $B[x_1, r_1] \cap A_1 = \emptyset$. Podobne, množina A_2 je riedka v (M, ρ), preto pre uzavretú guľu $B[x_1, r_1]$ existuje $r_2 \in (0, \frac{1}{2})$ a bod $x_2 \in M$ tak, že uzavretá guľa $B[x_2, r_2] \subseteq B[x_1, r_1]$ a $B[x_2, r_2] \cap A_2 = \emptyset$. Pokračujúc v tomto procese, zostrojíme postupnosť $\{B[x_k, r_k]\}$ uzavretých gúľ, ktoré pre každý index $k \in \mathbb{N}$ spĺňajú vlastnosti

$$B[x_{k+1}, r_{k+1}] \subseteq B[x_k, r_k], \quad B[x_k, r_k] \cap A_k = \emptyset, \quad 0 < r_k < \frac{1}{k}. \tag{75}$$

Jedná sa teda o postupnosť do seba vložených uzavretých gúľ, ktorých polomery konvergujú do nuly. Vďaka úplnosti priestoru (M, ρ) je potom podľa Vety 13 prienik $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} B[x_k, r_k]$ neprázdny, t.j., existuje $x \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} B[x_k, r_k]$. Očividne, bod $x \in M$. Avšak podľa (75) bod x nie je prvkom žiadnej z množín A_k, $k \in \mathbb{N}$. Obzvlášť, s prihliadnutím na (74) teda platí $x \notin \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k = M$, čo však je zrejmý spor. Takže množinu M nie je možné vyjadriť v tvare (74). ■

Poznámka 10

Špeciálnym dôsledkom Vety 14 je pozorovanie, že neprázdny úplný metrický priestor neobsahujúci izolované body nie je spočítateľný.

Banachov princíp pevného bodu

Definícia 20 (Pevný bod zobrazenia)

Nech M je ľubovoľná neprázdna množina a $F : M \to M$ zobrazenie. Bod $x \in M$ sa nazýva pevný bod zobrazenia F, ak platí $F(x) = x$.

Veta 15 (Banachova o pevnom bode)

Nech (M, ρ) je (neprázdny) úplný metrický priestor. Potom každé kontraktívne zobrazenie $F : M \to M$ má práve jeden pevný bod v M.

Poznámka 11

Z dôkazu Vety 15 vyplýva, že daný jediný pevný bod $x_0 \in M$ zobrazenia F je limitou postupnosti $\{F^k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ pre ľubovoľné pevne zvolené $x \in M$.

Dôsledok 1

Nech (M, ρ) je (neprázdny) úplný metrický priestor a $F : M \to M$ zobrazenie s vlastnosťou, že nejaká jeho iterácia F^n, $n \in \mathbb{N}$, je kontrakcia. Potom zobrazenie F má práve jeden pevný bod v M.

Dôkaz Dôsledku 1.

Nech F a n sú ako v zadaní tvrdenia. Označme $T := F^n$. V súlade s Banachovou vetou 15 má potom kontraktívne zobrazenie $T : M \to M$ práve jeden pevný bod $x_0 \in M$, t.j., platí $T(x_0) = x_0$. Dokážeme, že x_0 je i pevným bodom zobrazenia F. Položme $x := F(x_0)$. Postupne dostávame

$$\begin{aligned} x &= F(x_0) = F\left(T(x_0)\right) = F\left(F^n(x_0)\right) = F^{n+1}(x_0) \\ &= F^n\left(F(x_0)\right) = T\left(F(x_0)\right) = T(x), \end{aligned} \tag{76}$$

takže x je tiež pevný bod zobrazenia T. Preto nutne $x = x_0$, a tak $F(x_0) = x_0$, t.j., zobrazenie F má aspoň jeden pevný bod $x_0 \in M$. Je však zároveň i jediným pevným bodom tohto zobrazenia v M, pretože každý pevný bod zobrazenia F je zároveň i pevným bodom zobrazenia $T = F^n$, ktoré má v M jediný pevný bod x_0. Dôkaz je preto kompletný. ■

Príklad 34

Uvažujme metrický priestor $([1,\infty), \rho_2)$ a funkciu $f : [1,\infty) \to [1,\infty)$ danú

$$f(x) := x + \frac{1}{x}, \quad x \in [1,\infty).$$

Hoci sa jedná o úplný metrický priestor a $\rho_2(f(x), f(y)) < \rho_2(x,y)$ pre každé rôzne $x, y \in [1,\infty)$, zobrazenie f očividne nemá žiadny pevný bod v $[1,\infty)$.

Obsah

Pojem kompaktnosti

Definícia 21 (Centrovaný systém množín)

Nech (M, ρ) je metrický priestor a I nejaká neprázdna indexová množina. Systém podmnožín $\{A_k\}_{k \in I}$ v M sa označuje ako centrovaný, ak pre každú konečnú neprázdnu podmnožinu $J \subseteq I$ platí $\bigcap_{k \in J} A_k \neq \emptyset$.

Definícia 22 (Otvorené pokrytie množiny)

Nech (M, ρ) je metrický priestor, I neprázdna indexová množina a $N \subseteq M$ množina. Systém podmnožín $\{A_k\}_{k \in I}$ v M sa nazýva pokrytie množiny N, ak platí $N \subseteq \bigcup_{k \in I} A_k$. V prípade, ak každá z množín A_k, $k \in I$, je otvorená v metrickom priestore (M, ρ), hovoríme o otvorenom pokrytí $\{A_k\}_{k \in I}$ množiny N. Ak množina $J \subseteq I$ je taká, že systém množín $\{A_k\}_{k \in J}$ je tiež pokrytím množiny N, potom systém $\{A_k\}_{k \in J}$ označujeme ako podpokrytie pokrytia $\{A_k\}_{k \in I}$.

Definícia 23 (Kompaktný metrický priestor)

Metrický priestor (M, ρ) nazývame kompaktným, ak z každého otvoreného pokrytia množiny M je možné vybrať konečné podpokrytie.

Lema 1

Nech (M, ρ) *je metrický priestor a* I *ľubovoľná neprázdna indexová množina. Nech* $\{A_k\}_{k\in I}$ *je systém uzavretých podmnožín množiny* M *a položme* $B_k := M \setminus A_k$ *pre každé* $k \in I$*. Potom systém* $\{B_k\}_{k\in I}$ *je otvorené pokrytie množiny* M *práve vtedy, keď* $\bigcap_{k\in I} A_k = \emptyset$*.*

Dôkaz Lemy 1.

Tvrdenie vyplýva jednak z faktu, že každá z množín B_k, $k \in I$, je otvorená v M, a jednak z množinových de Morganových pravidiel, konkrétne

$$\bigcup_{k\in I} B_k = M \setminus \left(\bigcap_{k\in I} A_k \right), \qquad \bigcap_{k\in I} A_k = M \setminus \left(\bigcup_{k\in I} B_k \right). \tag{77}$$

Ak $\{B_k\}_{k\in I}$ je otvorené pokrytie množiny M, potom podľa Definície 22 platí $M = \bigcup_{k\in I} B_k$, a tak z druhej identity v (77) máme $\bigcap_{k\in I} A_k = \emptyset$. Naopak, ak $\bigcap_{k\in I} A_k = \emptyset$, potom prvá rovnosť v (77) implikuje $M = \bigcup_{k\in I} B_k$, a tak $\{B_k\}_{k\in I}$ je otvorené pokrytie množiny M v súlade s Definíciou 22. ∎

Veta 16

Metrický priestor (M, ρ) je kompaktný práve vtedy, keď každý centrovaný systém uzavretých podmnožín množiny M má neprázdny prienik.

Dôkaz Vety 16.

Nech (M, ρ) je kompaktný metrický priestor a uvažujme nejaký centrovaný systém $\{A_k\}_{k \in I}$ uzavretých podmnožín množiny M. Položme $B_k := M \setminus A_k$. V súlade s Definíciou 21 pre každú konečnú podmnožinu $J \subseteq I$ je $\bigcap_{k \in J} A_k \neq \emptyset$, čo podľa (77) znamená, že $\bigcup_{k \in J} B_k \subsetneq M$, t.j., systém $\{B_k\}_{k \in J}$ nie je otvoreným pokrytím množiny M. Predpoklad kompaktnosti (M, ρ) a Definícia 23 však následne zaručia, že ani $\{B_k\}_{k \in I}$ nemôže byť otvorené pokrytie množiny M. Preto podľa Lemy 1 platí $\bigcap_{k \in I} A_k \neq \emptyset$. Naopak, predpokladajme, že každý centrovaný systém uzavretých podmnožín množiny M má neprázdny prienik. Nech $\{B_k\}_{k \in I}$ je nejaké otvorené pokrytie množiny M a položme $A_k := M \setminus B_k$, $k \in I$. Každá z množín A_k je zrejme uzavretá a v súlade s Lemou 1 platí $\bigcap_{k \in I} A_k = \emptyset$. Preto $\{A_k\}_{k \in I}$ nemôže byť centrovaný systém podmnožín v M. Podľa Definície 21 teda existuje konečná množina indexov $J \subseteq I$ taká, že $\bigcap_{k \in J} A_k = \emptyset$. V zhode s Lemou 1 potom ale $\{B_k\}_{k \in J}$ je otvorené pokrytie množiny M, a teda konečné podpokrytie pokrytia $\{B_k\}_{k \in I}$, v reči Definície 22. Podľa Definície 23 je tak metrický priestor (M, ρ) kompaktný. ∎

Veta 17

Nech (M, ρ) je kompaktný metrický priestor. Potom každá nekonečná podmnožina $N \subseteq M$ má aspoň jeden hromadný bod v M.

Dôkaz Vety 17.

Predpokladajme sporom, že existuje nekonečná podmnožina $N \subseteq M$, ktorá nemá žiadny hromadný bod. Zrejme je možné vybrať jej spočítateľnú podmnožinu

$$\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots\} \subseteq N,$$

ktorá tiež nemá žiadny hromadný bod. Uvažujme systém nekonečných množín

$$A_k := \{x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n, \dots\}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{78}$$

V súlade s Definíciou 21 potom $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ predstavuje centrovaný systém uzavretých podmnožín množiny M. Skutočne, pre každú konečnú množinu indexov $J = \{k_1, \dots, k_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, platí

$$\bigcap_{k \in J} A_k = \{x_l, x_{l+1}, x_{l+2}, \dots, x_n, \dots\} \neq \emptyset, \quad \text{kde } l := \max\{k_1, \dots, k_n\}.$$

Na druhej strane očividne $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k = \emptyset$, a preto podľa Vety 16 metrický priestor (M, ρ) nemôže byť kompaktný, čo však je spor s predpokladmi vety. ■

Veta 18

Nech (M, ρ) je kompaktný metrický priestor. Potom každá uzavretá podmnožina $N \subseteq M$ je kompaktná.

Dôkaz Vety 18.

Nech priestor (M, ρ) je kompaktný a $N \subseteq M$ je uzavretá podmnožina. Vďaka uzavretosti N v (M, ρ) platí, že každá podmnožina $A \subseteq N$, ktorá je uzavretá v metrickom podpriestore (N, ρ), je zároveň uzavretá aj v (M, ρ). Nech $\{A_k\}_{k \in I}$ je nejaký centrovaný systém uzavretých podmnožín množiny N. Potom $\{A_k\}_{k \in I}$ je zrejme i centrovaný systém uzavretých podmnožín množiny M, a tak v súlade s Vetou 16 platí $\bigcap_{k \in I} A_k \neq \emptyset$ vďaka kompaktnosti (M, ρ). Z toho, opäť podľa Vety 16, vyplýva zároveň i kompatnosť priestoru (N, ρ). ■

Veta 19

Nech (M, ρ) je metrický priestor a (N, ρ) jeho kompaktný metrický podpriestor. Potom množina N je uzavretá a ohraničená v M.

Dôkaz Vety 19.

Nech N je kompaktná podmnožina v priestore (M, ρ). Ukážeme najprv uzavretoť množiny N v M, t.j., dokážeme, že každý bod uzáveru množiny N je jej prvkom. Nech $y \in M \setminus N$. Potom zrejme pre každé $x \in N$ okolie $\mathcal{O}_r^1(x)$ bodu x a okolie $\mathcal{O}_r^2(y)$ bodu y, kde $r := \frac{1}{3}\rho(x, y)$, spĺňajú $\mathcal{O}_r^1(x) \cap \mathcal{O}_r^2(y) = \emptyset$. Obzvlášť, systém množín $\{A_x\}_{x \in N}$, kde $A_x := \mathcal{O}_r^1(x) \subseteq M$, predstavuje otvorené pokrytie množiny N a systém množín $\{B_x\}_{x \in N}$, kde $B_x := \mathcal{O}_r^2(y) \subseteq M$, tvorí systém okolí bodu y. Vďaka kompaktnosti množiny N je možné podľa Definície 23 vybrať z pokrytia $\{A_x\}_{x \in N}$ konečné podpokrytie $A_{x_1}, A_{x_2}, \ldots, A_{x_n}$, takže platí inklúzia $N \subseteq \bigcup_{i=1}^n A_{x_i}$. Na druhej strane, množina $B := \bigcap_{i=1}^n B_{x_i}$ je zrejme okolie bodu y spĺňajúce

$$B \cap N \subseteq B \cap \bigcup_{i=1}^n A_{x_i} = \bigcup_{i=1}^n (B \cap A_{x_i}) = \bigcup_{i=1}^n \emptyset = \emptyset, \quad \text{a tak nutne } B \cap N = \emptyset.$$

Podľa Definície 6(i) teda bod y nie je bodom uzáveru množiny N, a preto N je, v súlade s Definíciou 7, uzavretá v metrickom priestore (M, ρ). Ohraničenosť množiny N dokážeme sporom, t.j., predpokladajme, že N je neohraničená v (M, ρ), t.j., v zhode s Definíciou 3 platí $d(N) = \infty$. Z definície priemeru množiny v (24) vyplýva, že množina N musí byť nutne nekonečná, pričom je možné vybrať jej nekonečnú podmnožinu $\{x_k,\ k \in \mathbb{N}\} \subseteq N$ s vlastnosťou $\rho(x_i, x_j) \geq 1$ pre každé rôzne $i, j \in \mathbb{N}$. Očividne, nekonečná množina $\{x_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ nemá v kom-

Dôkaz Vety 19 (pokračovanie).

-paktnom metrickom priestore (N, ρ) hromadný bod, čo však odporuje výsledku Vety 17. Preto je N ohraničená v (M, ρ). Dôkaz je kompletný. ■

Príklad 35 (Kompaktnosť diskrétneho metrického priestoru)

Diskrétny metrický priestor je kompaktný práve vtedy, keď má konečne veľa prvkov.

Príklad 36 (Kompaktnosť podmnožín euklidovského priestoru)

Pre ľubovoľné $n \in \mathbb{N}$ je podmnožina euklidovského priestoru $\mathbb{E}^n$ kompaktná práve vtedy, keď je uzavretá a ohraničená.

Poznámka 12

Je nutné zdôrazniť, že tvrdenie Vety 19 nie je možné vo všeobecnosti obrátiť (ako v Príklade 36), t.j., uzavretá a ohraničená podmnožina metrického priestoru nemusí byť nutne kompaktná. Uvažujme napríklad priestor l^2 zavedený v Príklade 3 a jeho podmnožinu N tvorenú postupnosťami

Poznámka 12

$$x^{[n]} := (0,\ 0,\ \dots,\ 0,\ \underbrace{1}_{n},\ 0,\ \dots,\ ),\quad n \in \mathbb{N}. \tag{79}$$

Keďže podľa (8) s $p := 2$ platí $\rho^2(x^{[i]}, x^{[j]}) = \sqrt{2}$ pre každú rôznu dvojicu $i, j \in \mathbb{N}$, nekonečná množina N je zrejme uzavretá a ohraničená v l^2. V súlade s Vetou 17 však nemôže byť kompaktná, pretože nemá žiadny hromadný bod.

Veta 20

Nech (M, ρ) a (N, σ) sú metrické priestory a $f : M \to N$ spojité zobrazenie. Nech priestor (M, ρ) je kompaktný. Potom platia nasledujúce tvrdenia.

(i) *Obraz $f(M)$ je množina kompaktná v (N, σ).*

(ii) *Zobrazenie f je rovnomerne spojité.*

Dôkaz Vety 20.

Nech $\{B_k\}_{k \in I}$ je nejaké otvorené pokrytie množiny $f(M)$ v priestore (N, σ). Podľa Vety 7(iii) je potom každá z množín $f^{-1}(B_k)$, $k \in I$, otvorenou podmnožinou množiny M a platí $M = \bigcup_{k \in I} f^{-1}(B_k)$. Systém $\{f^{-1}(B_k)\}_{k \in I}$ je teda otvorené pokrytie množiny M. Vďaka kompaktnosti priestoru (M, ρ) potom v

Dôkaz Vety 20 (pokračovanie).

súlade s Definíciou 23 existuje konečná množina indexov $J \subseteq I$ s vlastnosťou $M = \bigcup_{k\in J} f^{-1}(B_k)$. Následne, $f(M) \subseteq \bigcup_{k\in J} B_k$, a tak existuje konečné podpokrytie $\{B_k\}_{k\in J}$ pokrytia $\{B_k\}_{k\in I}$. Množina $f(M)$ je preto kompaktná v (N,σ), opäť podľa Definície 23. Tvrdenie (ii) dokážeme sporom. Predpokladajme, že zobrazenie f nie je rovnomerne spojité, t.j., podľa Definície 15 existuje $\varepsilon > 0$ tak, že pre každé $n \in \mathbb{N}$ existujú body $x_n, x_n^* \in M$ s vlastnosťou

$$\rho(x_n, x_n^*) < \frac{1}{n} \quad \text{a} \quad \sigma(f(x_n), f(x_n^*)) \geq \varepsilon. \tag{80}$$

V súlade s Vetami 17 a 19 má postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ vďaka kompaktnosti množiny M konvergentnú vybranú podpostupnosť $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ s limitou $x \in M$. Využitím trojuholníkovej nerovnosti a prvej nerovnosti v (80) vybraná podpostupnosť $\{x_{n_k}^*\}_{k=1}^{\infty}$ postupnosti $\{x_n^*\}_{k=1}^{\infty}$ spĺňa

$$\lim_{k\to\infty} \rho(x_{n_k}^*, x) \leq \lim_{k\to\infty} \left[\rho(x_{n_k}^*, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, x)\right] \overset{(80)}{\leq} \lim_{k\to\infty} \left[\frac{1}{n_k} + \rho(x_{n_k}, x)\right] = 0,$$

čo podľa Definície 11 znamená, že i postupnosť $\{x_{n_k}^*\}_{k=1}^{\infty}$ je konvergentná s limitou x. Následne, podľa Vety 6 zo spojitosti zobrazenia f dostávame

$$\varepsilon \overset{(80)}{\leq} \lim_{k\to\infty} \sigma(f(x_{n_k}), f(x_{n_k}^*)) \leq \lim_{k\to\infty} \left[\sigma(f(x_{n_k}), f(x)) + \sigma(f(x), f(x_{n_k}^*))\right] = 0,$$

čo odporuje predpokladu o čísle ε. Preto zobrazenie f je rovnomerne spojité. ■

Dôsledok 2 (Weierstrassova veta)

Nech (M, ρ) je kompaktný metrický priestor a f spojitá funkcia zobrazujúca M do euklidovského priestoru $\mathbb{E}$. Potom zobrazenie f je ohraničené a nadobúda svoje maximum i minimum na M.

Dôkaz Dôsledku 2.

Tvrdenie priamo vyplýva z Viet 19 a 20(i), podľa ktorých je obraz $f(M)$ množina kompaktná v $\mathbb{E}$, a teda ohraničená a uzavretá v $\mathbb{E}$. ■

Definícia 24 (Spočítateľne kompaktný metrický priestor)

Metrický priestor (M, ρ) nazývame spočítateľne kompaktným, ak každá jeho nekonečná podmnožina má aspoň jeden hromadný bod v M.

Poznámka 13

Priamo z Vety 17 a Definície 24 vyplýva, že každý kompaktný metrický priestor je zároveň i spočítateľne kompaktný. Neskôr (vo Vete 24) dokážeme i obrátené tvrdenie. Pojmy kompaktnosť a spočítateľná kompaktnosť teda splývajú.

Veta 21

Nech (M, ρ) je metrický priestor. Nasledujúce tvrdenie sú ekvivalentné.

(i) *Priestor (M, ρ) je spočítateľne kompaktný.*

(ii) *Každé spočítateľné otvorené pokrytie množiny M obsahuje konečné podpokrytie.*

(iii) *Každý spočítateľný centrovaný systém uzavretých podmnožín množiny M má neprázdny prienik.*

Dôkaz Vety 21.

Poznamenajme, že ekvivalentnosť podmienok (ii) a (iii) sa dokáže úplne analogicky ako v prípade kompaktnosti pri Vete 16. Zameriame sa preto iba na dôkaz ekvivalencie podmienok (i) a (iii). Nech (M, ρ) je spočítateľne kompaktný metrický priestor a nech $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ je nejaký centrovaný systém uzavretých podmnožín v M. Ukážeme, že $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \neq \emptyset$. Položme

$$B_k := \bigcap_{i=1}^{k} A_i \quad \text{pre každé } k \in \mathbb{N}. \tag{81}$$

Zrejme každá z množín B_k, $k \in \mathbb{N}$, je neprázdna a uzavretá v M, pričom platí

Dôkaz Vety 21 (pokračovanie).

$$B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq \cdots \supseteq B_k \supseteq \cdots, \qquad \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k. \tag{82}$$

Z (82) vyplýva, že môže nastať práve jedna z nasledujúcich dvoch možností.

- Existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ s vlastnosťou $B_{k_0} = B_{k_0+i}$ pre každé $i \in \mathbb{N}$. Potom

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \overset{(82)}{=} \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k = B_{k_0} \neq \emptyset.$$

- Medzi množinami B_k, $k \in \mathbb{N}$, existuje nekonečne veľa vzájomne rôznych množín. Bez ujmy na všeobecnosti zrejme stačí uvažovať situáciu, kedy všetky množiny B_k, $k \in \mathbb{N}$, sú vzájomne rôzne. Pre každé $k \in \mathbb{N}$ teda existuje bod $x_k \in B_k \setminus B_{k+1}$. Keďže metrický priestor (M, ρ) je spočítateľne kompaktný, podľa Definície 24 má postupnosť $\{x_k\}$ aspoň jeden hromadný bod $y \in M$. A nakoľko očividne platí

$$\{x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots\} \subseteq B_k \quad \text{pre každé } k \in \mathbb{N},$$

bod y je hromadným bodom, a vďaka uzavretosti i prvkom, pre každú z množín B_k, $k \in \mathbb{N}$. Obzvlášť, potom máme

$$y \in \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k \overset{(82)}{=} \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k, \quad \text{a tak} \quad \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \neq \emptyset.$$

Dôkaz Vety 21 (pokračovanie).

Platnosť opačnej implikácie (iii) $\Rightarrow$ (i) vyplýva z dôkazu Vety 17, kde sme vlastne dokázali, že ak množina M obsahuje nekonečnú podmnožinu bez hromadných bodov v M, potom existuje spočítateľný centrovaný systém uzavretých podmnožín množiny M, ktorý má prázdny prienik. Ak teda platí tvrdenie (iii), potom nutne každá nekonečná podmnožina v M má aspoň jeden hromadný bod v M, čo podľa Definície 24 znamená, že metrický priestor (M, ρ) je spočítateľne kompaktný, t.j., platí tvrdenie (i). Dôkaz je hotový. ■

Definícia 25 (Sieť množiny)

Nech (M, ρ) je metrický priestor, $N \subseteq M$ podmnožina a ε kladné reálne číslo. Množina $A \subseteq M$ sa nazýva sieť množiny N s polomerom ε, resp. ε-sieť množiny N, ak pre každý bod $x \in N$ existuje bod $y \in A$ tak, že $\rho(x, y) \leq \varepsilon$.

Definícia 26 (Totálne ohraničený metrický priestor)

Hovoríme, že metrický priestor (M, ρ) je totálne ohraničený, ak pre každé $\varepsilon > 0$ existuje konečná ε-sieť množiny M.

Poznámka 14

Z Definícií 3 a 26 ihneď vyplýva, že každý totálne ohraničený metrický priestor je zároveň i ohraničený (stačí uvážiť konečnosť ε-siete pre nejaké $\varepsilon > 0$ a trojuholníkovú nerovnosť). Opačná skutočnosť vo všeobecnosti neplatí. Kým v každom euklidovskom priestore $\mathbb{E}^n$, $n \in \mathbb{N}$, pojmy totálna ohraničenosť a ohraničenosť splývajú, diskrétny metrický priestor je totálne ohraničený práve vtedy, keď má konečne veľa prvkov. Na druhej strane, každý, teda aj nekonečný, diskrétny metrický priestor je zrejme v súlade s Definíciou 3 ohraničený.

Veta 22

Každý totálne ohraničený metrický priestor je separabilný.

Dôkaz Vety 22.

Nech (M, ρ) je totálne ohraničený metrický priestor. V súlade s Definíciou 26 pre každé $n \in \mathbb{N}$ existuje konečná $\frac{1}{n}$-sieť A_n množiny M. Potom je zrejme množina $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ nanajvyš spočítateľná a podľa Poznámky 6 hustá v metrickom priestore (M, ρ). V zhode s Definíciou 10 je teda priestor (M, ρ) separabilný. ∎

Poznámka 15

Poznamenajme, že tvrdenie Vety 22 sa nedá obrátiť. Vhodne to ilustruje podpriestor (N, ρ^2) metrického priestoru l^2 skúmaný v Poznámke 12. V Príklade 17 sme ukázali separabilitu priestoru l^2, takže i podpriestor (N, ρ^2) je separabilný. Avšak nie je totálne ohraničený v l^2, nakoľko pre množinu N neexistuje konečná ε-sieť s hodnotou $\varepsilon < \frac{\sqrt{2}}{2}$, ako vyplýva z diskusie v Poznámke 12.

Veta 23

Každý spočítateľne kompaktný metrický priestor je totálne ohraničený.

Dôkaz Vety 23.

Predpokladajme, nech metrický priestor (M, ρ) je spočítateľne kompaktný, ale nie je totálne ohraničený. Podľa Definície 26 teda pre isté $\varepsilon > 0$ neexistuje žiadna konečná ε-sieť množiny M. Zvoľme ľubovoľne $x_1 \in M$. Potom existuje bod $x_2 \in M$ tak, že $\rho(x_1, x_2) > \varepsilon$. V opačnom prípade by totiž jednoprvková množina $\{x_1\}$ bola konečná ε-sieť množiny M. Podobne, existuje bod $x_3 \in M$ s vlastnosťou $\rho(x_1, x_3) > \varepsilon$ a $\rho(x_2, x_3) > \varepsilon$ (inak by zas množina $\{x_1,\ x_2\}$ bola konečnou ε-sieťou množiny M). Týmto spôsobom získame postupnosť $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ v M, ktorá spĺňa $\rho(x_i, x_j) > \varepsilon$ pre každé $i, j \in \mathbb{N}$, $i \neq j$. Obzvlášť, táto postup-

Dôkaz Vety 23 (pokračovanie).

-nosť nemá žiadny hromadný bod v M. Podľa Definície 24 však tento fakt odporuje spočítateľnej kompaktnosti priestoru (M, ρ). ■

Definícia 27 (Báza metrického priestoru)

Nech (M, ρ) je metrický priestor. Systém $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ otvorených podmnožín množiny M sa nazýva báza priestoru (M, ρ), ak sa každá otvorená podmnožina množiny M dá vyjadriť ako zjednotenie niektorých množín systému $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$.

Lema 2

Metrický priestor je separabilný práve vtedy, keď má spočítateľnú bázu.

Dôkaz Lemy 2.

Nech (M, ρ) je separabilný metrický priestor a nech $N := \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ je v súlade s Definíciou 10 jeho nanajvýš spočítateľná podmnožina, ktorá je v ňom hustá. Potom nie je ťažké si uvedomiť, že systém otvorených množín

$$\left\{B\left(x_n, \frac{1}{m}\right), \quad n, m \in \mathbb{N}\right\}$$

Dôkaz Lemy 2 (pokračovanie).

predstavuje podľa Definície 27 spočítateľnú bázu priestoru (M,ρ). Naopak, ak $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ je spočítateľná báza metrického priestoru (M,ρ), potom každá spočítateľná podmnožina tvaru $N := \{x_k,\ x_k \in A_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ je hustá v (M,ρ). Dokážeme to sporom. Predpokladajme, že pre nejaký výber bodov $x_k \in A_k$, $k \in \mathbb{N}$, uvedená podmnožina N nie je hustá v (M,ρ). Podľa Definície 8 to znamená, že množina $M \setminus \overline{N}$ je neprázdna a otvorená. A keďže systém $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ tvorí bázu metrického priestoru (M,ρ), podľa Definície 27 existuje index $k_0 \in \mathbb{N}$ tak, že množina $A_{k_0} \neq \emptyset$ a $A_{k_0} \subseteq M \setminus \overline{N}$. Z tohto následne vyplýva, že bod $x_{k_0} \in M \setminus \overline{N}$, čo však je v rozpore s definíciou množiny N. Platí teda $M = \overline{N}$, a tak v súlade s Definíciou 10 je metrický priestor (M,ρ) separabilný. ■

Veta 24

Každý spočítateľne kompaktný metrický priestor je zároveň i kompaktný.

Dôkaz Vety 24.

Nech (M,ρ) je spočítateľne kompaktný metrický priestor a nech $\{O_\alpha\}_{\alpha\in I}$ je nejaké jeho otvorené pokrytie. Ukážeme, že existuje konečné podpokrytie tohto pokrytia. Kombináciou Viet 22 a 23 dostávame separabilitu priestoru (M,ρ).

Dôkaz Vety 24 (pokračovanie).

Následne, podľa Lemy 2 v tomto priestore existuje spočítateľná báza $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$. Zvoľme ľubovoľný bod $x \in M$. Skutočnosť, že systém $\{O_\alpha\}_{\alpha\in I}$ je pokrytie priestoru (M,ρ), zaručuje, že existuje index $\alpha(x) \in I$ taký, že $x \in O_{\alpha(x)}$. Zároveň z toho, že $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ je bázou priestoru (M,ρ), vyplýva podľa Definície 27 existencia indexu $k(x) \in \mathbb{N}$ s vlastnosťou $x \in A_{k(x)} \subseteq O_{\alpha(x)}$. Systém $\mathcal{S} := \{A_{k(x)}\}_{x\in M}$ takto vybraných podmnožín je zrejme nanajvýš spočítateľný a pokrýva celú množinu M. Okrem toho pre každú množinu $A_{k(x)} \in \mathcal{S}$ vieme vybrať jednu množinu O_α zo skúmaného otvoreného pokrytia $\{O_\alpha\}_{\alpha\in I}$, ktorá ju, t.j., $A_{k(x)}$, obsahuje. Takto teda vieme zostrojiť nanajvýš spočítateľné podpokrytie $\{O_\alpha\}_{\alpha\in J}$ pokrytia $\{O_\alpha\}_{\alpha\in I}$. Ak množina indexov $J \subseteq I$ je konečná, dôkaz je hotový, pretože sme vybrali konečné podpokrytie pokrytia $\{O_\alpha\}_{\alpha\in I}$, a tak metrický priestor (M,ρ) je kompaktný v zhode s Definíciou 23. V prípade, ak množina J je spočítateľne nekonečná, je možné podľa Vety 21(ii) vybrať z pokrytia $\{O_\alpha\}_{\alpha\in J}$ opäť konečné podpokrytie, čo znovu zaručuje kompaktnosť metrického priestoru (M,ρ). Dôkaz je teraz kompletný. ∎

Veta 25 (Nutná a postačujúca podmienka kompaktnosti metrického priestoru)

Metrický priestor (M,ρ) je kompaktný práve vtedy, keď je totálne ohraničený a zároveň úplný.

Dôkaz Vety 25.

Ak (M, ρ) je kompaktný metrický priestor, potom je v súlade s Poznámkou 13 i spočítateľne kompaktný, a následne i totálne ohraničený, podľa Vety 23. Okrem toho každá postupnosť cauchyovská v (M, ρ) musí v zhode s Vetou 17 mať aspoň jeden hromadný bod v M, t.j., obsahovať aspoň jednu podpostupnosť konvergentnú v M. To však podľa Vety 4(iv) znamená, že celá skúmaná cauchyovská postupnosť má v M limitu, a tak v súlade s Definíciou 18 je metrický priestor (M, ρ) úplný. Naopak, predpokladajme, nech priestor (M, ρ) je totálne ohraničený a úplný. Dokážeme, že je spočítateľne kompaktný, t.j., v zhode s Definíciou 24 každá jeho nekonečná podmnožina má v M aspoň jeden hromadný bod. Vo svetle Vety 24 nám tento výsledok potom zaručí i kompaktnosť priestoru (M, ρ). Bez ujmy na všeobecnosti sa zrejme stačí obmedziť iba na spočítateľné nekonečné podmnožiny v M, t.j., postupnosti v M. Nech teda $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq M$ je nejaká postupnosť. Ukážeme, že $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ má aspoň jeden hromadný bod v M. V súlade s Definíciou 26 nech $N_1 = \{c_1^1, \dots, c_{n_1}^1\}$ je konečná sieť množiny M s polomerom $\varepsilon = 1$. Obzvlášť, podľa Definície 25 platí $M = \cup_{i=1}^{n_1} B[c_i^1, 1]$. Nakoľko množina $N_1 \subseteq M$ je konečná, musí aspoň jedna z daných uzavretých gulí obsahovať nekonečne veľa členov postupnosti $\{x_k\}$, t.j., nejakú jej podpostupnosť $\{x_k^1\}$. Označme stred tejto gule a_1. Metrický priestor $(B[a_1, 1], \rho)$, ako podpriestor v (M, ρ), je zrejme tiež totálne ohraničený. Nech teda $N_2 = \{c_1^2, \dots, c_{n_2}^2\}$ je konečná sieť množiny $B[a_1, 1]$ s polomerom $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

Dôkaz Vety 25 (pokračovanie).

Potom zrejme $B[a_1, 1] \subseteq \cup_{i=1}^{n_2} B[c_i^2, \frac{1}{2}]$. A keďže i množina N_2 je konečná, minimálne jedna z gulí tohto pokrytia musí opäť obsahovať nekonečne veľa členov postupnosti $\{x_k^1\}$, t.j., nejakú jej podpostupnosť $\{x_k^2\}$. Označme stred tejto gule a_2. Využitím trojuholníkovej nerovnosti pre vzdialenosť bodov a_1 a a_2 platí

$$\rho(a_1, a_2) \leq \rho(a_1, y) + \rho(y, a_2) \leq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} < 2,$$

kde y je ľubovoľný z členov postupnosti $\{x_k^2\}$. Uzavretá guľa $B[a_2, \frac{1}{2}]$ však opäť vytvára totálne ohraničený metrický priestor, a tak existuje jej konečná sieť $N_3 = \{c_1^3, \ldots, c_{n_3}^3\}$ s polomerom $\frac{1}{4}$. Keďže $B[a_2, \frac{1}{2}] \subseteq \cup_{i=1}^{n_3} B[c_i^3, \frac{1}{4}]$, nutne aspoň jedna z uzavretých gulí tohto pokrytia musí obsahovať nekonečne veľa členov postupnosti $\{x_k^2\}$, t.j., nejakú jej podpostupnosť $\{x_k^3\}$. Označiac stred tejto gule a_3, dostávame pre vzdialenosť $\rho(a_2, a_3)$ odhad

$$\rho(a_2, a_3) \leq \rho(a_2, y) + \rho(y, a_3) \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} < 1,$$

kde y je ľubovoľný člen postupnosti $\{x_k^3\}$. V tomto procese pokračujeme ďalej a získame postupnosť uzavretých gulí

$$B[a_1, 1], \quad B\left[a_2, \frac{1}{2}\right], \quad B\left[a_3, \frac{1}{4}\right], \quad \ldots, \quad B\left[a_i, \frac{1}{2^{i-1}}\right], \quad \ldots. \tag{83}$$

Každá z gulí $B[a_i, \frac{1}{2^{i-1}}]$, $i \in \mathbb{N}$, pritom zrejme obsahuje nekonečne veľa členov

Dôkaz Vety 25 (pokračovanie).

postupnosti $\{x_k\}$ a odpovedajúca postupnosť stredov $\{a_i\}$ spĺňa

$$\rho(a_i, a_{i+1}) \leq \frac{1}{2^{i-1}} + \frac{1}{2^i} = \frac{3}{2^i} < \frac{4}{2^i} = \frac{1}{2^{i-2}}, \quad i \in \mathbb{N}. \tag{84}$$

Uvažujme teraz postupnosť podmnožín $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ v M daných $A_i := B[a_i, \frac{1}{2^{i-3}}]$ pre $i \in \mathbb{N}$. Zrejme $B\left[a_i, \frac{1}{2^{i-1}}\right] \subseteq B\left[a_i, \frac{1}{2^{i-3}}\right] = A_i$ pre všetky indexy $i \in \mathbb{N}$, a tak každá z množín A_i obsahuje nekonečne veľa členov postupnosti $\{x_k\}$. Okrem toho platí $A_{i+1} \subseteq A_i$ pre každé $i \in \mathbb{N}$. Skutočne, pre $x \in A_{i+1}$ je $\rho(a_{i+1}, x) \leq \frac{1}{2^{i-2}}$, z čoho následne pomocou trojuholníkovej nerovnosti dostávame

$$\rho(a_i, x) \leq \rho(a_i, a_{i+1}) + \rho(a_{i+1}, x) \overset{(84)}{<} \frac{1}{2^{i-2}} + \frac{1}{2^{i-2}} = \frac{2}{2^{i-2}} = \frac{1}{2^{i-3}},$$

t.j., $x \in A_i$. Systém $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ teda predstavuje postupnosť do seba vložených uzavretých gulí v M, ktorých polomery konvergujú do nuly. A keďže metrický priestor (M, ρ) je podľa predpokladov úplný, v súlade s Vetou 13 je prienik $\cap_{i=1}^{\infty} A_i$ neprázdny, t.j., existuje jediné $x \in \cap_{i=1}^{\infty} A_i$. To znamená, že každé okolie bodu x obsahuje nejakú množinu A_i, a tak i nekonečne veľa členov postupnosti $\{x_k\}$. Bod x je teda hromadný bod postupnosti $\{x_k\}$ a dôkaz je hotový. ∎

Pojem prekompaktnosti

Definícia 28 (Prekompaktná množina)

Nech (M, ρ) je metrický priestor. Neprázdna množina $N \subseteq M$ sa nazýva prekompaktná (alebo tiež relatívne kompaktná) v metrickom priestore (M, ρ), ak jej uzáver $\overline{N}$ v (M, ρ) je kompaktný metrický priestor.

Veta 26

Nech (M, ρ) je úplný metrický priestor. Potom neprázdna podmnožina $N \subseteq M$ je prekompaktná v (M, ρ) práve vtedy, keď je totálne ohraničená.

Dôkaz Vety 26.

V prvom rade poznamenajme, že podľa Poznámky 3 a Definície 26 je množina $N \subseteq M$ totálne ohraničená práve vtedy, keď množina $\overline{N}$ je totálne ohraničená. Kombináciou Viet 1(ii) a 10 a Definície 7 dostávame, že $(\overline{N}, \rho)$ je úplným metrickým priestorom pre každú neprázdnu množinu $N \subseteq M$. Tvrdenie dokazovanej vety je potom priamym dôsledkom Vety 25 a Definície 28. ∎

Príklad 37 (Prekompaktné množiny v priestore l^p)

Pre dané $p \geq 1$ uvažujme metrický priestor l^p z Príkladu 3. Potom neprázdna podmnožina $N \subseteq l^p$ je prekompaktná v l^p práve vtedy, keď množina N je ohraničená v l^p a pre každé $\varepsilon > 0$ existuje index $n \in \mathbb{N}$ tak, že

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^p < \varepsilon \quad \text{pre každé } x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in N. \tag{85}$$

Príklad 38

Uvažujme metrický priestory l^∞ a c_0 z Príkladu 3. Potom c_0 nie je kompaktný podpriestor v l^∞. Skutočne, nech $\{x^n\}_{n=0}^{\infty}$ je systém reálnych postupností tvaru

$$x_k^n := \begin{cases} n, & k = n+1, \\ 0, & k \neq n+1, \end{cases} \quad \text{pre každé } n \in \mathbb{N}_0. \tag{86}$$

Zrejme $x^n \in c_0$ pre každý index $n \in \mathbb{N}_0$. Súčasne podľa (12) a (86) máme

$$\rho(x^n, x^0) \stackrel{(12)}{=} \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k^n - x_k^0| \stackrel{(86)}{=} n, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{87}$$

Podpriestor c_0 preto nie je ohraničený v l^∞, nakoľko v súlade s (87) jeho priemer $d(c_0) = \infty$. Preto podľa Vety 19 c_0 nemôže byť ani (pre)kompaktný v l^∞.

Arzelàova–Ascoliho veta

Definícia 29 (Rovnomerná ohraničenosť a rovnaká spojitosť)

Pre dané $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, uvažujme (neprázdnu) množinu N funkcií $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Povieme, že funkcie z množiny N sú rovnomerne ohraničené na intervale $[a, b]$, ak existuje kladné reálne číslo L s vlastnosťou

$$|f(x)| \leq L \quad \text{pre každé } x \in [a, b] \text{ a každé } f \in N. \tag{88}$$

Podobne, hovoríme, že funkcie z N sú rovnako spojité na intervale $[a, b]$, ak pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že

$$\text{ak pre } x, x^* \in [a, b] \text{ je } |x - x^*| < \delta, \text{ potom } |f(x) - f(x^*)| < \varepsilon \text{ pre každé } f \in N. \tag{89}$$

Poznámka 16

Z relácie (88) je zrejmé, že ak N je množina funkcií rovnomerne ohraničených na intervale $[a, b]$, potom nutne $N \subseteq \mathcal{B}[a, b]$, t.j., každá z funkcií $f \in N$ je ohraničená na $[a, b]$. Obzvlášť, množina N je v súlade s Definíciou 3 ohraničená v metrickom priestore $(\mathcal{B}[a, b], \rho_B)$ zavedenom v Príklade 4. Podobne, ak N je množina funkcií rovnako spojitých na intervale $[a, b]$, potom podľa Definície 15 a relácie v (89) je každá funkcia $f \in N$ rovnomerne spojitá na $[a, b]$.

Veta 27 (Arzelàova–Ascoliho)

Nech $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, *sú dané a nech* N *je množina reálnych funkcií spojitých na intervale* $[a, b]$. *Potom* N *je prekompaktná v metrickom priestore* $(\mathcal{C}[a, b], \rho_C)$ *zavedenom v Príklade 4 práve vtedy, keď funkcie z množiny* N *sú rovnomerne ohraničené a rovnako spojité na* $[a, b]$.

Dôsledok 3 (Kompaktné množiny v priestore spojitých funkcií)

Neprázdna množina $N \subseteq \mathcal{C}[a, b]$ *je kompaktná v metrickom priestore* $(\mathcal{C}[a, b], \rho_C)$ *práve vtedy, keď* N *je uzavretá v* $(\mathcal{C}[a, b], \rho_C)$ *a funkcie z množiny* N *sú rovnomerne ohraničené a rovnako spojité na* $[a, b]$.

Dôsledok 4

Nech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je postupnosť reálnych funkcií spojitých na kompaktnom intervale* $[a, b]$, $a < b$. *Ak funkcie* f_n, $n \in \mathbb{N}$, *sú rovnomerne ohraničené a rovnako spojité na* $[a, b]$, *potom existuje vybraná podpostupnosť* $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, *ktorá konverguje rovnomerne na* $[a, b]$.

Nech (M, ρ) a (N, σ) sú dva kompaktné metrické priestory. Symbolom $\mathcal{F}(M, N)$ označme množinu všetkých zobrazení $f : M \to N$. Kompaktnosť priestoru (N, σ) podľa Vety 19 zaručuje, že pre každé $f \in \mathcal{F}(M, N)$ je množina $f(M) \subseteq N$ ohraničená v (N, σ). To následne umožňuje korektne definovať zobrazenie $\tau : \mathcal{F}(M, N) \times \mathcal{F}(M, N) \to [0, \infty)$ s predpisom

$$\tau(f, g) := \sup_{x \in M} \sigma(f(x), g(x)), \quad f, g \in \mathcal{F}(M, N). \tag{90}$$

Nie je ťažké overiť, že zobrazenie τ v (90) je metrikou na množine $\mathcal{F}(M, N)$. Obzvlášť, ak $\mathcal{C}(M, N)$ označuje množinu všetkých spojitých zobrazení $f : M \to N$, potom $(\mathcal{C}(M, N), \tau)$ je uzavretý metrický podpriestor v $(\mathcal{F}(M, N), \tau)$. Nech $D \subseteq \mathcal{F}(M, N)$ je neprázdna množina. Zobrazenia $f \in D$ sa nazývajú rovnako spojité, ak pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že

ak pre $x, x^* \in M$ je $\rho(x, x^*) < \delta$, potom $\sigma(f(x), f(x^*)) < \varepsilon$ pre každé $f \in D$. (91)

Veta 28 (Zovšeobecnenie Arzelàovej–Ascoliho vety)

Nech (M, ρ) a (N, σ) sú kompaktné metrické priestory. Množina $D \subseteq \mathcal{C}(M, N)$ je prekompaktná v metrickom priestore $(\mathcal{C}(M, N), \tau)$ práve vtedy, keď zobrazenia $f \in D$ sú rovnako spojité.