P17

$$N := \{ \{x_k\} \subseteq \mathbb{Q} \; ; \; x_k \neq 0 \text{ iba pre konečne veľa indexov } k \in \mathbb{N} \}$$

⇝ N je spočítateľná množina a $N \subseteq \ell^p$

⇝ ukážeme, že : $\underline{\overline{N} = \ell^p}$

⇝ nech $x := \{x_k\} \in \ell^p$ je dané ; nech $\varepsilon > 0$ je dané

⇝ vieme, že $\exists \, n \in \mathbb{N}$ také, že :

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^p < \frac{\varepsilon^p}{2}$$

⇝ vieme, že pre $\forall \, x_k$, $k = 1, \dots, n$ existuje $q_k \in \mathbb{Q}$ tak :

$$|x_k - q_k| < \frac{\varepsilon}{(2n)^{1/p}}$$

⇝ definujme $y := \{y_k\} \in N$ takto :

$$\underline{y_k := \begin{cases} q_k, & k = 1, \dots, n \\ 0, & k > n \end{cases}}$$

⇝ ukážeme, že $\rho^p(x, y) < \varepsilon$; platí :

$$\rho^p(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^p \right)^{1/p} = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k - q_k|^p + \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p}$$

$$< \Big(\underbrace{\sum_{l=1}^{n} \frac{\varepsilon^p}{2n}}_{n \text{ členov}} + \frac{\varepsilon^p}{2} \Big)^{1/p} = \Big(\frac{\varepsilon^p}{2} + \frac{\varepsilon^p}{2} \Big)^{1/p} = \varepsilon$$

$\Rightarrow$ platí, že N je hustá v ℓ^p //

(P18)

<u>c je množina uzavretá v ℓ^∞</u>

$\rightsquigarrow$ nech $\{x^{[n]}\} \subseteq c$ taká, že má v ℓ^∞ limitu vzhľadom na supremovú metriku ρ_∞, t. j. $\exists\, x \in \ell^\infty$:

$$\lim_{n\to\infty} \rho_\infty(x^{[n]}, x) = 0$$

$\rightsquigarrow$ ukážeme, že $x \in c$

$\rightsquigarrow$ zvoľme $\varepsilon > 0$; potom:

- $\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$: $\rho_\infty(x^{[n]}, x) < \frac{\varepsilon}{3}$; pre $\forall n \geq n_\varepsilon$

$$\Leftrightarrow \quad |x_l^{[n]} - x_l| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{pre } \forall n \geq n_\varepsilon, \ \forall l \in \mathbb{N}$$

- pre $\forall n \in \mathbb{N}$ je postup. $x^{[n]}$ cauchyovská ($\Leftarrow$ konvergentná)

$\rightsquigarrow$ pre dané $n \geq n_\varepsilon$ $\exists$ $\tilde{n}_{\varepsilon,n}$ tak, že:

$$|x_l^{[n]} - x_e^{[n]}| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{pre } \forall l, e \geq \tilde{n}_{\varepsilon,n}$$

$\Rightarrow$ ukážeme, že $x = \{x_l\}$ je cauchyovská:

$$|x_l - x_e| = |x_l - x_l^{[n]} + x_l^{[n]} - x_e^{[n]} + x_e^{[n]} - x_e|$$

$$\leq \underbrace{|x_l - x_l^{[n]}|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|x_l^{[n]} - x_e^{[n]}|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|x_e^{[n]} - x_e|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} < \varepsilon \quad \text{pre } \forall l, l \geq \hat{n}_{\varepsilon,n}$$

$\Rightarrow$ x je aj konvergentná (z úplnosti $\mathbb{E}$)

$\Rightarrow x \in c \rightsquigarrow \overline{c} = c$ ... je uzavretá v l^∞

(P2) – DOPLNOK – ekvivalencia metrík ρ_p a ρ_∞:

$\rightsquigarrow p \in [1, \infty)$; $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$\rho_\infty(x,y) = \max_{l \in \{1,\dots,n\}} |x_l - y_l| \leq \left(\sum_{l=1}^{n} |x_l - y_l|^p \right)^{1/p} = \rho_p(x,y)$$

$$\rho_p(x,y) \leq \left(\sum_{l=1}^{n} \underbrace{\rho_\infty^p(x,y)}_{n\text{-členov}} \right)^{1/p} = \left(n \cdot \rho_\infty^p(x,y) \right)^{1/p} = n^{1/p} \cdot \rho_\infty(x,y)$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \rho_\infty(x,y) \leq \rho_p(x,y) \leq n^{1/p} \rho_\infty(x,y) \\ n^{-1/p} \cdot \rho_p(x,y) \leq \rho_\infty(x,y) \leq \rho_p(x,y) \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ekvivalencia } \rho_\infty, \rho_p$$

$\Rightarrow$ pre $\forall p, q \geq 1$ sú ρ_p, ρ_q ekvivalentné //

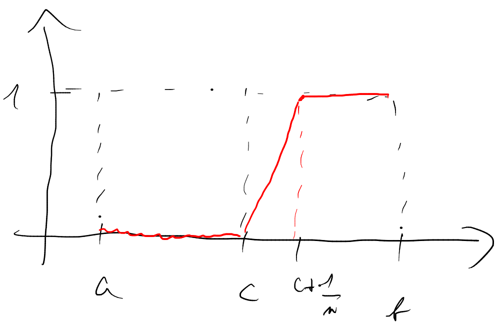
$\rightsquigarrow$ v prípade l^p metriky ρ^p a ρ_∞ nie sú ekvivalentné //

P32

$\rightsquigarrow$ platí, že $(C[a,b], \rho_I)$ nie je úplný

$\{f_n\} \subseteq C[a,b]$:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in [a, c] \\ n(x-c), & x \in [c, c+\frac{1}{n}] \\ 1, & x \in [c+\frac{1}{n}, b] \end{cases} \qquad c := \frac{a+b}{2}$$



$\rightarrow$ platí, že v metrike ρ_I je $\{f_n\}$ cauchyovská :

$$\rho_I(f_n, f_m) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right) \longrightarrow 0 \text{ pre } m, n \to \infty$$

nezávisle

$n > m$

ale $f_n \xrightarrow[\rho_I]{} f = \begin{cases} 0, & [a, c) \\ 1, & [c, b] \end{cases}$ ... nespojitá na $[a,b]$

$\Rightarrow f_n$ nekonverguje v $C[a,b]$ vzhľadom na ρ_I
