1.

$$A = \left\{ x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \; ; \; \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot |x_k| \leq 1 \right\}$$

Dokážte, že množina $A$:

a) je podmnožinou $\ell^1$

b) je kompaktná v $\ell^1$

R:

a) ukážeme, že $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$ je konvergentná pre $\forall x \in A$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot |x_k| \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x \in \ell^1}}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{A \subseteq \ell^1}$$

b) kompaktnosť v $\ell^1$ $\Leftrightarrow$ ohraničenosť + uzavretosť +

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N}:$

$$\sum_{n+1}^{\infty} |x_k| < \varepsilon \quad \text{pre } \forall x \in A$$

<u>ohraničenosť $A$ v $\ell^1$:</u>

pre $\forall x, y \in A$ platí (využijeme a))

$$\underline{\rho^1(x,y)} = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} (|x_k| + |y_k|) \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| + \sum_{k=1}^{\infty} |y_k| \leq \underline{2}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{d(A) \leq 2}}$$

uzavretosť $A$ v $\ell^1$:

⤳) nech $x \in \ell^1$ je hromadný bod množiny $A$, t.j.

$\exists \{x^{[n]}\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A$ tak, že $\lim_{n\to\infty} x^{[n]} = x$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \rho^1(x^{[n]}, x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \left( \sum_{\ell=1}^{\infty} |x_\ell^{[n]} - x_\ell| \right) = 0$$

$$\Rightarrow \forall \ell \in \mathbb{N}: \lim_{n\to\infty} x_\ell^{[n]} = x_\ell$$

⤳) pre $\forall m \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{\ell=1}^{m} \ell \cdot |x_\ell^{[n]}| \leq 1 \xrightarrow{n\to\infty} \sum_{\ell=1}^{m} \ell \cdot |x_\ell| \leq 1$$

$$\xrightarrow{m\to\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell \cdot |x_\ell| \leq 1 \Rightarrow \underline{\underline{x \in A}}$$

---

⤳) $\forall \varepsilon > 0$; nech $n \in \mathbb{N}$ je taký, že: $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$

pre $\forall$ dané $x \in A$ platí:

$$\underline{\sum_{\ell=n+1}^{\infty} |x_\ell|} \leq \sum_{\ell=n+1}^{\infty} \underbrace{\frac{\ell}{n+1}}_{\geq 1} |x_\ell| = \frac{1}{n+1} \sum_{\ell=n+1}^{\infty} \ell \cdot |x_\ell| \leq \frac{1}{n+1} \cdot 1 < \underline{\varepsilon}$$

$\Rightarrow$ $A$ je kompaktná

---

(2.)

⇝ VARIÁCIA NA PRÍKLAD (1.)

$$B = \left\{ x \in \{x_\ell\}_{\ell=1}^{\infty} \; ; \; \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell \cdot |x_\ell| = 1 \right\}$$

.... $B \subseteq A$ ⇝ $B$ je ohraničená, ale $B$ nie je uzavretá v $\ell^1$

napr. $\{x^{[n]}\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \ell^1$ ; $x_\ell^{[n]} = \begin{cases} \frac{1}{n} , & \ell = n \\ 0 ; & \ell \neq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \{x^{[n]}\}_{n=1}^{\infty} \subseteq B$ ✓

$\Rightarrow$ platí, že $x^{[n]} \xrightarrow[n \to \infty]{\rho^1} x \equiv 0 \in \ell^1$

$$\left( \rho^1 (x^{[n]}, x) = \sum_{\ell=1}^{\infty} |x_\ell^{[n]} - x_\ell| = \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\rightsquigarrow} 0 \right)$$

⇝ ale $x \equiv 0 \notin B$, lebo $\sum_{\ell=1}^{\infty} \ell \cdot |x_\ell| = 0 \neq 1$

$\Rightarrow$ $B$ nie je ani kompaktná množina v $\ell^1$

---

(3.) v $\mathbb{R}$ ; $\rho = \rho_1$

$x = \{x_\ell\}_{\ell=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$ ; $H := \{ y \in \mathbb{R} \; ; \; y$ je hromadný bod postup. $x \}$

BOLZANO – WEIERSTRASS :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{ak } x \text{ je ohraničená} \Rightarrow H \neq \emptyset \, ; \\ \quad H \text{ je jednoprvková} \Longleftrightarrow x \text{ je konvergentná v } \mathbb{R} \end{array}}$$

$\rightsquigarrow$ $(M, \varrho)$ je všeobecný metrický priestor:

- ak $x = \{x_k\}_{n=1}^{\infty} \subseteq M$ je konvergentná $\Rightarrow$ $M$ je jednoprvková
- ak $x \subseteq M$ $\boxed{\text{je predkompaktná v } M}$, potom:

  $M$ je jednoprvková $\Rightarrow$ $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ je konvergentná

---

PRÍKLAD $(M, \varrho) = \ell^2$, $\{x^{[n]}\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \ell^2$

$$x^{[n]} := \begin{cases} (0, 0, \dots, 0, \dots), & n \text{ liché} \\ (0, 0, \dots, \underset{n}{1}, 0, \dots), & n \text{ sudé} \end{cases}$$

len s indexom $\frac{n}{2}$

---

$$\varrho^2(x^{[n]}, x^{[m]}) = \begin{cases} \sqrt{2}, & m, n \text{ sú sudé} \\ 1, & m \text{ je sudé}, n \text{ liché} \\ 0, & n, m \text{ sú liché} \end{cases} \Rightarrow \text{postup. } \{x^{[n]}\} \text{ je ohran.}$$

$(n \neq m)$

$\rightsquigarrow$ ale $\{x^{[n]}\}$ nie je predkompaktná ( podpostup. $\{x^{[2k]}\}_{k=1}^{\infty}$ nemá hromadný bod)

$\rightsquigarrow$ $\{x^{[n]}\}$ má 1 hromadný bod, konkrétne $(0, 0, \dots, 0, \dots 0)$

$\rightsquigarrow$ $\{x^{[n]}\}$ nie je konvergentná v metrike $\varrho^2$ //

---