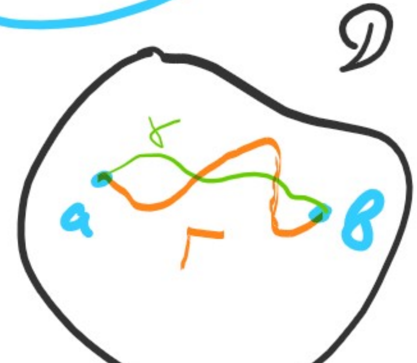
Prednaska11
Friday, April 9, 2021 2:08 PM

Důsledek z Věty Cauchy: $\mathcal{D}$ – jednoduše souv. obl. $a, b \in \mathcal{D}$; $f \in \mathcal{O}(\mathcal{D}) \Rightarrow$

$\int_\gamma f(z)dz$ nezávisí od jednoduché napoj. křivky γ, která spojí a a b.

($\Rightarrow$ můžeme uvažovat $\int_a^b f(z)dz$).

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\Gamma f(z)dz$$



Důkaz: Dříve dokazali jsme že $\int_\gamma f(z)dz = \lim \int_{\gamma_j} f(z)dz$ – lom. čáry spojí a, b

$\Rightarrow$ stačí dokazat pro případ kdy γ, Γ – lom. čáry.

V tom případě:

$$\int_\gamma f(z)dz - \int_\Gamma f(z)dz = \int_\gamma f(z)dz + \int_{\Gamma^-} f(z)dz =$$

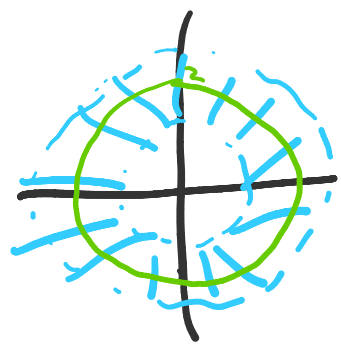
$\gamma \qquad \Gamma \qquad \tilde{\gamma} \qquad \tilde{\Gamma}^{-}$

$= \sum_{j=1}^{k} \pm \int_{\partial \Pi_j} f(z)\,dz$, Π_j – oblast, $\partial \Pi_j$ – Jord. čára!

každý $= 0$ podle Věty Cauchy

$\Rightarrow$ rozdíl $= 0$. $\blacksquare$

Příklad: $\mathcal{D} = \{1 < |z| < 3\}$



$\gamma = C_2(0) \subset \mathcal{D}$

$f(z) = \frac{1}{z} \in \mathcal{O}(\mathcal{D})$

$\int_{\gamma} f(z)\,dz = 2\pi i$ (výpočet dříve)

??

Protože $\mathcal{D}$ – není jednod. souv.!

$\int_{-2}^{2} \frac{1}{z}\,dz = \left[\begin{array}{l} \pi i \\ -\pi i \end{array} \right.$ (výpočet)

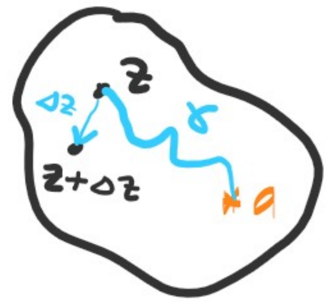
Závisí od cesty integrování!

Věta: $\mathcal{D}$ – jednod. souv. oblast, $f \in \mathcal{O}(\mathcal{D})$;

$\Rightarrow \exists$ primitivní funkce $\varphi(z)$ pro f.

$\Rightarrow \exists$ primitivní funkce $\Phi(z)$ pro f.

Důkaz: vybereme $a \in D$;



Teď, $\forall z \in D$, nechť $\Phi(z) := \int_a^z f(\xi)\, d\xi$.

(korektní, konkrétní věc, podle důsledku výše!)

Podle def. dokážeme že $\forall z \in D$, $\Phi'(z) = f(z)$.

$$\Phi(z+\Delta z) - \Phi(z) - f(z)\cdot \Delta z = \int_a^{z+\Delta z} f(\xi)\,d\xi - \int_a^{z} f(\xi)\,d\xi -$$

$$- \int_z^{z+\Delta z} f(z)\,d\xi = |\text{podle aditivity int}| = \int_z^{z+\Delta z} f(\xi)\,d\xi -$$

$$- \int_z^{z+\Delta z} f(z)\,d\xi = \int_z^{z+\Delta z} \big(f(\xi) - f(z)\big)\,d\xi \Rightarrow$$

$$|\Phi(z+\Delta z) - \Phi(z) - f(z)\cdot\Delta z| \leq |\Delta z| \cdot \max_{\xi \in [z, z+\Delta z]} |f(\xi) - f(z)|$$

$\xrightarrow{\Delta z \to 0} 0$ podle kontinuity $f(z)$

$\Rightarrow \Phi'(z) = f(z)$ podle def.

Příklad: uvažujeme $f(z) = \frac{1}{z}$

(a) např. $\{\operatorname{Im} z > 0\} \Rightarrow$

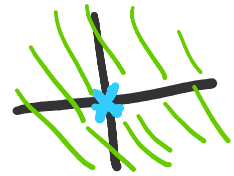
jedn. souv.

$\Rightarrow \Phi(z) = \operatorname{Ln} z + C = \ln z + C$

$\Rightarrow \varphi(z) = \mathrm{Ln}\, z + C = \ln z + C$

— vybr. větev $\mathrm{Ln}\, z$ v $\{\mathrm{Im}\, z > 0\}$

(B) $D = \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$



$\Rightarrow \varphi(z) \nexists$ — proč?

Protože $\int_{C_1(0)} \frac{1}{z} dz = 2\pi i \neq 0$ — pokud $\varphi \exists$

(kontradikce)

__Přesněji__: $\varphi(z)$ existuje jako __mnohoznačná__ funkce $(\mathrm{Ln}\, z)$.

__Def__: __n-násobně souv.__ Jord. oblast je oblast ve tvaru: $D_0 \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} \overline{D_j}$, kde všechny D_j — Jord. oblasti, $\overline{D_1}, .., \overline{D_{n-1}} \subset D_0$, $\overline{D_i} \cap \overline{D_j} = \emptyset$, $i, j = 1, .., n-1$.

(n=1: obecná Jord. obl.)

když $f \in C(\overline{D})$, a

vše $\partial D_0, \partial D_1, \dots, \partial D_{n-1}$ – naprav. $\Rightarrow$

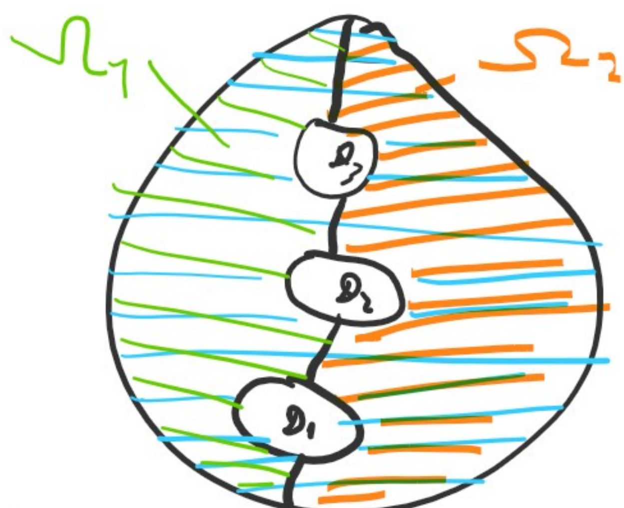
definujeme: $\boxed{\int_{\partial D} f(z)\,dz := \int_{\partial D_0^+} f(z)\,dz + \sum_{j=1}^{n-1} \int_{\partial D_j^-} f(z)\,dz}$

∂D "$= \bigcup_{j=0}^{n-1} \partial D_j$"

Věta Cauchy pro n-násob souv. obl.: D – n-násob. $(n \geq 2)$ souv. oblast, ∂D – naprav., a

$f \in \mathcal{O}(\overline{D}) \Rightarrow \int_{\partial D} f(z)\,dz = 0.$

Důkaz:



$$\int_{\partial D} f(z)\,dz = \int_{\partial \Omega_1^+} f(z)\,dz + \int_{\partial \Omega_2^+} f(z)\,dz$$

Ω_1, Ω_2 – Jord. obl.

$f \in \mathcal{O}(\overline{\Omega_1}),\ f \in \mathcal{O}(\overline{\Omega_2})$

(Přesný důkaz existování Ω_1, Ω_2: přes lomený čáry a indukce, jako uved. výše).

Teď: podle předchozí Věty Cauchy

Tedˇ: podle předchozi Věti Cauchy,

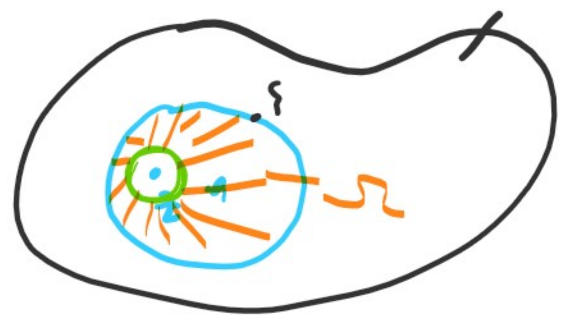
$$\int_{\partial\Omega_1} f = \int_{\partial\Omega_2} f = 0 \Rightarrow \int_{\partial\mathcal{D}} f(z)\,dz = 0 . \quad \blacksquare$$

<u>Integralni vzorec Cauchy (Veta)</u>: $\mathcal{D}$ – oblast",

$f \in \mathcal{O}(\mathcal{D})$; $\overline{B_R(a)} \subset \mathcal{D}$. Tak to, $\forall z \in B_R(a)$

platí:

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R(a)} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi}$$



<u>Důkaz</u>: Uvažujeme

$\overline{B_\varepsilon(z)} \subset B_R(a)$

$\Omega := B_R(a) \setminus \overline{B_\varepsilon}(z)$

Funkce $g(\xi) := \dfrac{f(\xi)}{\xi - z} \in \mathcal{O}(\overline{\Omega})$ $\left(\begin{matrix}\xi \neq z \\ v\ \Omega\end{matrix}\right)$.

$\Rightarrow$ přimenime Vetu Cauchy pro Ω, $g(\xi)$

$$\Rightarrow \int_{\partial\Omega} g(\xi)\,d\xi = 0; \Rightarrow \int_{\partial B_R^+(a)} g(\xi)\,d\xi - \int_{\partial B_\varepsilon^+(z)} g(\xi)\,d\xi = 0$$

$\partial B_R(a) \qquad \partial B_\varepsilon(z)$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_R(a)} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_\varepsilon(z)} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi\,; \quad \forall \varepsilon! \text{ malý}$$

// potřebujeme dokázat! $f(z)$ — nezávisí od ε.

Teď: připomníme že $\displaystyle\int_{\partial B_\varepsilon(z)} \frac{1}{\xi - z}\,d\xi = 2\pi i$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_\varepsilon} \frac{f(z)\,d\xi}{\xi - z} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_R(a)} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi - f(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\partial B_\varepsilon(z)} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi - \int_{\partial B_\varepsilon(z)} \frac{f(z)}{\xi - z}\,d\xi\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_\varepsilon(z)} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z}\,d\xi\,;$$ ale, v okolí bodu z,

$$\frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} = \underbrace{f'(z)}_{\text{konstanta podle } \xi \text{ — na integ } = 0} + \alpha(\xi) \quad \xrightarrow{\xi \to z} 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_\varepsilon(z)} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z}\,d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_\varepsilon(z)} \alpha(\xi)\,d\xi$$

$\Rightarrow$ modul rozdílu $\leq \dfrac{1}{2\pi}\cdot 2\pi\varepsilon \cdot \max|\alpha(\xi)| \to 0$

$\forall \varepsilon \Rightarrow$ rozdíl $= 0$ $\square$

$\forall \varepsilon \Rightarrow$ rozdíl $= 0$.

Podobným způsobem (úplně analog.) je možné dokázat:

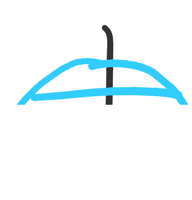
<u>Int vzorec Cauchy pro n-násob. souv. ohr. obl.</u> : $\mathcal{D}$ – n-násob. souv. ohr. obl. $(n \geq 1)$; $\partial\mathcal{D}$ – naprav.; $f \in \mathcal{O}(\overline{\mathcal{D}})$.

Takto, $\forall z \in \mathcal{D}$, platí: $\boxed{f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathcal{D}} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi}$

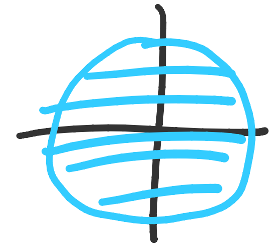
<u>Důsledek</u>: hodnoty f na $\partial\mathcal{D}$ jednozn. determinují hodnoty f v $\mathcal{D}$. (!)

<u>Rozdíl s reálnou analýzou!</u>

Příklad: $\mathcal{D} = \{x^2 + y^2 < 1\}$



Příklad: $\mathcal{D} = \{ x^2 + y^2 < 1 \}$



$$f_n(x,y) = (1 - x^2 - y^2)^n$$

$\forall f_n$, $f_n|_{\partial \mathcal{D}} = 0$, ale vše jsou úplně různý funkce!

Opakování: integrály závislí od param.

$$I(\alpha) := \int_a^b f(x,\alpha)\, dx$$

Např: $I(\alpha) = \int_0^1 e^{\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha}(e^{\alpha} - 1)$

Fakt 1: $x \in [a,b]$, $\alpha \in [A,B]$

$f \in C([a,b] \times [A,B]) \Rightarrow I(\alpha)$ je taky spojitá na $[A,B]$

Fakt 2: Nechť $f \in C([a,b] \times [A,B])$

Fakt 2: Nechť $f \in C([a,b]\times[A,B])$

a navíc $\exists \frac{\partial f}{\partial \alpha} \in C([a,b]\times[A,B])$

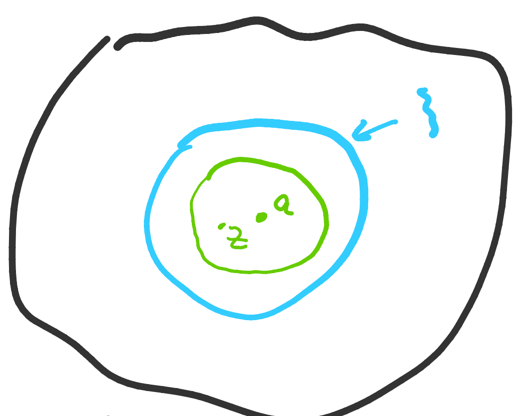
$\Rightarrow I(\alpha)$ je diferencov., a

$$\boxed{I'(\alpha) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)\,dx}$$

„Stejné" vlast. platí pro $x \in \mathbb{R}^n$, „$\alpha \in \mathbb{R}^n$" $\left(\frac{\partial I}{\partial \alpha_j} = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial \alpha_j}\, dx_1 \dots dx_n \right)$

Nechť $f \in \mathcal{O}(\mathcal{D})$; $\overline{B_R(a)} \subset \mathcal{D}$

$\overline{B_r(a)} \subset B_R(a)$ $(r<R)$



Teď, pro $z \in \overline{B_r(a)}$,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R(a)} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi ,$$

$\xi \in \partial B_R(a)$

$z \in \overline{B_r(a)}$

$\partial B_R(a)$ $\quad$ $z \in B_2(a)$

$\Rightarrow |\xi - z| \geq R - 2 \Rightarrow \underline{g(\xi, \overset{x+iy}{z})} = \dfrac{f(\xi)}{\xi - z}$

je $\underline{\text{spojitá}}$ na $\partial B_R(a) \times B_2(a)$ a

$\exists \dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ (jsou spojité) – podle vl. int. závis. od param. I (Fakt z výšše)

stejně $\exists \dfrac{\partial f}{\partial z}, \dfrac{\partial f}{\partial \bar z}$,

a navíc: $\dfrac{\partial f}{\partial \bar z} = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\partial B_R(a)} \dfrac{\partial}{\partial \bar z} \underbrace{\left[\dfrac{f(\xi)}{\xi - z} \right]}_{} d\xi = 0$

Racion. po $z \Rightarrow$ hol po $z \Rightarrow \dfrac{\partial}{\partial \bar z} = 0$

$\Rightarrow f(z) \in \mathcal{O}(B_2(a))$, a

navíc $f'(z) = \dfrac{\partial f}{\partial z} = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\partial B_R(a)} \dfrac{\partial}{\partial z} \dfrac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\partial B_R(a)} \dfrac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi$

$$\boxed{f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R(a)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi}$$

Teď, stejným způsobem dokážeme, že:

$f'(z) \in O(B_r(a))$, a

$$\boxed{f''(z) = \frac{2}{2\pi i} \int_{\partial B_r(a)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^3} \, d\xi}$$, atd, ...

$$\boxed{f^{(k)}(z) = \frac{(k-1)!}{2\pi i} \int_{\partial B_r(a)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}} \, d\xi}$$

Zejména, f je nekonečně differ!!!

Pokud $\underbrace{r}_{\text{libovolné}} < R \Rightarrow$ vše $f^{(k)} \in O(B_R(a))$

A pokud $\overline{B_R(a)} \subset D$ - libovolný $\Rightarrow$ $f^{(k)} \in O(D)$.

<u>Veta</u>: Pokud $f \in O(D)$ $(\Leftrightarrow \exists f'(z))$,

tak $\exists$ vše $f^{(k)}(z) \in O(D)$!!!

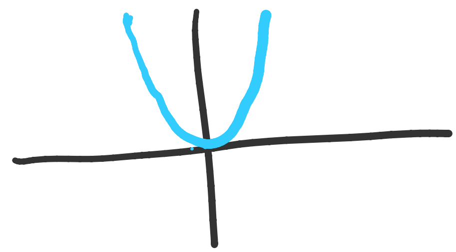
takto $\exists$ <u>vše</u> $f^{(k)}(z) \in \mathcal{O}(\overline{D})$ (!)

A navíc, $\forall\ \overline{B_R(a)} \subset D$,

$$\boxed{f^{(k)}(z) = \frac{(k-1)!}{2\pi i} \int_{\partial B_R(a)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}}\, d\xi}$$

V <u>real. analýze</u>: určitě, není pravda

$f(x) = x\sqrt[3]{x}$



$\forall x,\ \exists\ f'(x) = \frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$, ale $\nexists\ f''(0)$

$g(x) = x^n \sqrt[3]{x}$, $\Rightarrow \forall x\ \exists\ f^{(n)}(x) =$

$= (n+\frac{1}{3})(n-\frac{2}{3}) \cdot \ldots \cdot \frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$, ale $\nexists\ g^{(n+1)}(0)$

<u>Obecnější věta</u>:

Věta: $f \in \mathcal{O}(\overline{D})$, D – n-násob. souv. omez. obl., takto $\exists$ vše $f^{(k)} \in \mathcal{O}(\overline{D})$, a platí:

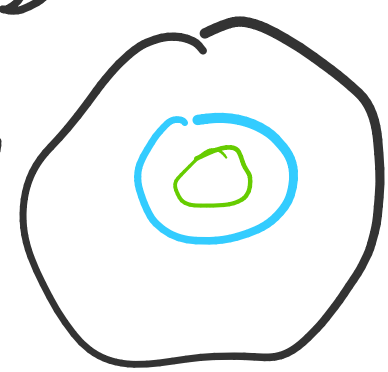
$$\boxed{f^{(k)}(z) = \frac{(k-1)!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} \, d\zeta}$$

– vzorec Cauchy pro derivace

(důkaz je stejný, a používá vzorec Cauchy pro omez. obl.)

Druhý výsledek se stejného důkazu:

Nechť: $f \in C(D)$; $\overline{B_R(a)} \subset D$, $\overline{B_r(a)} \subset B_R(a)$, a předpokládáme, že pro $\forall B_R(a)$, platí



vzorec Cauchy: $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta$

$z \in B_R(a)$. Výše, viděli jsme že důsledek

..., jsme že důsledek
je že $f \in \mathcal{O}(B_R(a))$.

Veta: Pokud $f \in C(\mathcal{D})$, $\forall\, \overline{B_R(a)} \subset \mathcal{D}$ platí
vzorec Cauchy (pro f) $\Rightarrow \boxed{f \in \mathcal{O}(\mathcal{D})}$

Když porovnáme už vše věty týkající
holomorfity, tak dostaneme:

Veta: Nechť $f \in C(\mathcal{D})$.
Tento následující vlastnosti
jsou ekvivalentní:

(a) $f \in \mathcal{O}(\mathcal{D})$ $(= \exists f'(z)\ \forall z \in \mathcal{D})$

(b) $\exists$ vše $f^{(k)} \in \mathcal{O}(\mathcal{D})$, $k \geq 0$

(c) $\forall\, \overline{\Delta} \subset \mathcal{D}$, platí $\int_{\partial\Delta} f(\zeta)\,d\zeta = 0$

(d) ...

(d) $\forall \overline{B_\varepsilon(a)} \subset \mathcal{D}$, platí $\boxed{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial B_\varepsilon(a)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} = f(z)}$ ∂D

(e) $\exists$ primitivní funkce pro f v $\forall B_\varepsilon(a) \subset \mathcal{D}$

<u>Poznámka</u>: vidíme že obecná spojitá funkce v oblasti **nemá** prim. funkci!
$\left(\exists\, \varphi : \varphi'(z) = f(z) \Rightarrow f \in \mathcal{O}(\mathcal{D})\right.$ podle věty výše$\left.\right)$ – rozdíl s reálnou analýzou!

Stejnoměrná konvergence hol. funkcí

<u>Opakování</u>: $f_n(x) \overset{E}{\rightrightarrows} f(x)$, když
$\exists \varepsilon > 0 \;\exists N : \forall n > N,\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$
<u>$\forall x \in E$</u> (reál. analýza)

(Stejné může být napsáno pro funkce

(Stejné může být napsáno pro funkce kompl. prom.; ale, potř. trochu upřesnit).

Stejné pro řad $\sum f_n(x)$

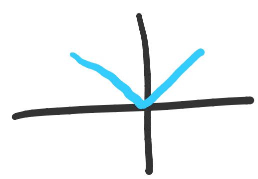
(uvažujeme $S_N(x)=\sum\limits_{n=1}^{N} f_n(x)$)

Věta pro difer.: (komplikovaná!)

Nechť f_n – difer. funkce na (a,b), a $\exists \varphi$: $f_n' \rightrightarrows \varphi$, a $\exists c \in (a,b)$, že $f_n(c) \to C$; $\Rightarrow$ $f_n \rightrightarrows f$, a $f' = \varphi$.

("Jednod. verze": $f_n \rightrightarrows f \Rightarrow f_n' \rightrightarrows f'$ – neplatí!) – reál. analýza

Protipříklad: $f(x)=|x|$



$f'(0) \nexists$; ale $\exists P_n(x)$:

$P_n(x) \underset{[-1,1]}{\rightrightarrows} f(x)$ Weierstrassova Věta

$[-1,1]$

ale to neni pravda že $f_n' \rightrightarrows F'$!

Ale v $\mathbb{C}$ to je tak

(jednod. "Věta" platí)

Def: Nechť f_n, f – funkce v $D \subset \mathbb{C}$.

Říkáme že $f_n \xrightarrow{D} f$ (f_n normálně konverguje k f v D)

(nebo stejnoměrně na kompaktech), pokud

$\forall K \subset D$, platí: $f_n \overset{K}{\rightrightarrows} f$ v obvyklém smyslu

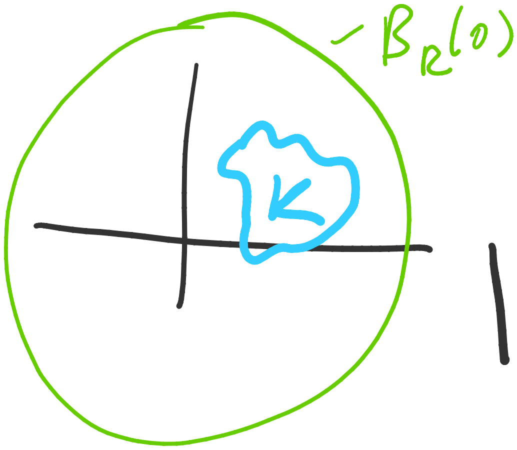
kompaktní podmnožina v D

(Číslo N v def. výše závisí od kompaktu K!)

Tedy: pobodově → norm. → stejnom.

Takto bodovou konverg. $<$ norm. konverg. $<$ stejnom konverg.

Příklad 1: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ – normálně konverguje v $\mathbb{C}$?



$\forall z \in B_R(0)$:

$$\left|\frac{z^n}{n!}\right| \le \frac{R^n}{n!} \Rightarrow$$

podle reál. analýzi (Cauchy)

$\sum \frac{z^n}{n!}$ – konverguje stejnom na $B_R(0) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ na K $\left(\sum \frac{R^n}{n!} = e^R < \infty \right)$

Výsledek: $\sum \frac{z^n}{n!}$ $\to$ norm. konv. v $\mathbb{C}$
$\to$ stejnom. konv. $\forall B_R(0)$

DU 1: dokazat, že $\sum \frac{z^n}{n!}$ nekonverguje stejnom v $\mathbb{C}$.

nekonvergují stejnom. v $\mathbb{C}$.

DÚ 2: dokázat, že $\sum \frac{\sin(nz)}{n^2}$ konverguje stejnom. v $\mathbb{R}$, ale $\nexists$ obl. $D \subset \mathbb{C}$, kde konv. normálně

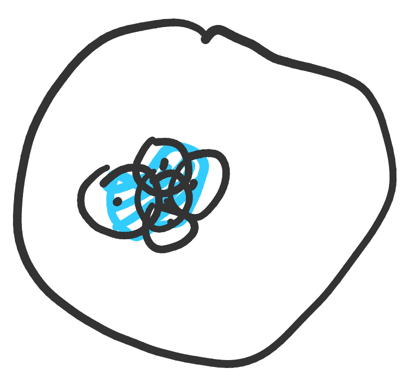
Výhodnější tvar pro defin. norm. konverg.:

1) Můžeme uvažovat jen $K = \overline{B_R(a)} \subset D$ (kruhy stačí) – proč?

Nechť platí pro kruhy, uvaž. $K \subset D$;

$\forall a \in K$, vybereme $\overline{B_r(a)} \subset D$

$\bigcup_{a \in K} B_r(a) \supset K$ (otevř. množ.) $\Rightarrow$ podle



def. komp. množ., $\exists$

konečn. [illegible]

konečně $B_{r_1}(a_1), \dots, B_{r_k}(a_k)$: jejich spojení $\supset K$, $\forall B_{r_j}(a_j)$ máme stejnom. konv. $\Rightarrow$ máme to na spojení $\Rightarrow$ máme to na K.

2) $\forall D = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$ komp., $K_j \subset K_{j+1}$ kompaktní vyčerpání

to stačí ověřit stejnom. konv. na $\forall K_1, K_2, \dots$

Přesná konstrukce K_j:

$$K_j = \left\{z \in D : dist(\partial D, z) \geq \frac{1}{j}\right\} \cap \{|z| \leq j\}$$

$\forall D = \bigcup K_j$

$$\forall \mathcal{D} = \bigcup_{j=1} K_j$$