Prednaska 13
Friday, April 16, 2021 2:00 PM

Weierstrassova Veta: $f_n \in \mathcal{O}(\mathcal{D})$, $f_n \xrightarrow{\mathcal{D}} f$ $\Rightarrow$

(a) $f \in \mathcal{O}(\mathcal{D})$

(b) $\forall k \geq 1$, $f_n^{(k)} \xrightarrow{\mathcal{D}} f^{(k)}$

(„norm. konv. můžeme diferencovat")

Důkaz: dokážeme nejdříve (a). Budeme dokazovat holomorfitu v $\forall B_R(a) \subset \mathcal{D}$

Vybereme $\overline{B_r(a)} \subset B_R(a)$

$\forall z \in \overline{B_r(a)}$: $f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R(a)} \frac{f_n(\xi)}{\xi - z} \, d\xi$

Víme: $f_n \overset{\overline{B_R(a)}}{\rightrightarrows} f \Rightarrow f_n(z) \xrightarrow{n \to \infty} f(z)$;

$f_n(\xi) \overset{\partial B_R(a)}{\rightrightarrows} f(\xi) \Rightarrow \frac{f_n(\xi)}{\xi - z} \overset{\partial B_R(a)}{\rightrightarrows} \frac{f(\xi)}{\xi - z}$

$$\to f(\zeta) \Rightarrow \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z} \rightrightarrows \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$$

(protože $\frac{1}{\zeta - z}$ – omezená) $\Rightarrow$
$|\zeta - z| \geq R - r$

integrujeme: $$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R(a)} \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \to \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

$f_n(z) \xrightarrow{n \to \infty} f(z)$

existuje protože $f \in C(\Omega)$ $(f_n \rightrightarrows f)$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

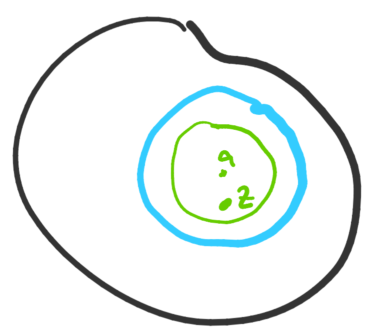
Ale $r < R$ – libovolný $\Rightarrow$ platí $\forall z \in B_R(a)$

$\Rightarrow$ (podle věty výše) $f \in \mathcal{O}(B_R(a))$ $\blacksquare$

Důkaz pro (β): (Důkaz je podobný)

Dokažme $f_n' \overset{B_r(a)}{\rightrightarrows} f'$ $\forall a, r$

Pro ni r, vybereme R:



$$f_n'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R(a)} \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta$$

$\partial B_\rho(a)$

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\rho(a)} \frac{F(\xi)}{(\xi - z)^2}\, d\xi$$

Známe že $f_n(\xi) \overset{\partial B_\rho(a)}{\rightrightarrows} F(\xi) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{f_n(\xi)}{(\xi - z)^2} \underset{\substack{\xi \in B_\rho(a) \\ z \in \overline{B_r(a)}}}{\overset{\text{podle}}{\rightrightarrows}} \frac{F(\xi)}{(\xi - z)^2}$$

(že $\frac{1}{|z-\xi|^2}$ — omezena z úvodu)

$\Rightarrow$ integrujeme: $\frac{1}{2\pi i} \int \frac{f_n(\xi)}{(\xi - z)^2}\, d\xi \rightrightarrows \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(\xi)}{(\xi - z)^2}\, d\xi$

$\overline{B_r(a)}$ $\qquad = f_n'(z) \qquad = F'(z)$

$\Rightarrow f_n(z) \rightrightarrows F(z)$

Stejně pro $\forall$ $f_n^{(k)} \rightrightarrows f^{(k)}(z)$. ∎

Mocninné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \qquad a \text{ – centr}$$

• Kde konverguje? ($z \in \dots$?)

$n=0$

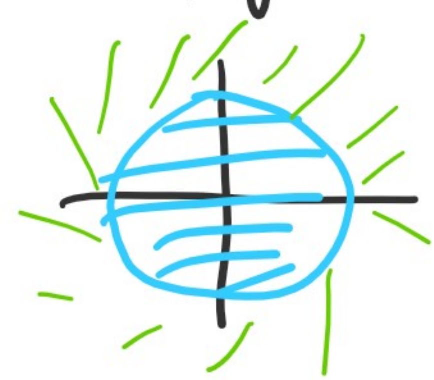
* kde konvergnje? ($z \in \dots$?)
* kde —||— absolutne?
* kde konvergnje stejnom?
* kde konvergnje normalne?

<u>Veta (Cauchy-Adamar)</u>: $\exists B_R(a)$, $R \in [0, \infty]$, takový že:

(a) $\forall z \in B_R(a)$, řad konv. absolutne

(b) $\forall z \notin \overline{B_R(a)}$, řad divergnje

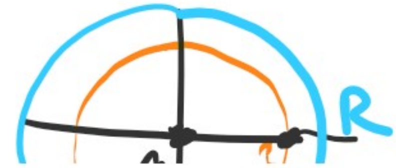
● – konv.
● – diverg



(c) $\partial B_R(a)$ – cokoliv

(d) $\forall \overline{B_r(a)} \subset B_R(a)$, řad konvergnje <u>stejnomerne</u>

(důkaz pro (d)):



(anebo pro (a)).

V kruhe $|z-a| \le r$,

máme $|c_n(z-a)^n| \le |c_n| r^n$

$$\sum |c_n| r^n < \infty \text{ - protože } = \sum |f_n(z)| \Big|_{z=a+r}$$

$$\Rightarrow \sum c_n (z-a)^n \text{ - konv. stejnom. v } B_r(a)$$

(e) $$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$$

Pokud $\exists \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, tak $R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$

<u>Def:</u> Kruh $B_R(a)$ se nazývá <u>konvergenční kruh</u>

V $B_R(a)$, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ konv. absolutne

a <u>normalne</u> - protože konv.

stejnom. v $\overline{B_r(a)} \subset B_R(a)$

stejnom. $\forall\ \overline{B_r(a)} \subset B_R(a)$

$\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} \overline{B_{R-\frac{1}{j}}(a)} \text{ - komp. vyčerpání } B_R(a) \right)$

Příklady:

1) $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, z^n \quad R \overset{\text{pokud}}{\underset{\text{exist.}}{=}} \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim \frac{1}{n+1} = 0$

řad konv. jen pro $z=0$.

2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad R = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \lim (n+1) = \infty$

$\Rightarrow$ konverguje abs. a norm. v $\mathbb{C}$

3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n}, \quad R = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1/n+1} = 1$

v $B_1(0)$ - konv. abs. a norm.

v $\{|z|>1\}$ - diverguje

Na $\partial B_1(0)$: $|z|=1$, $z = e^{i\varphi}$, $0 \le \varphi < 2\pi$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\varphi}}{n} = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{n}} + i \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\varphi}{n}}$$

$$\sum_{n=1} \frac{z^n}{n} = \underbrace{\sum_{n=1} \frac{\cos n\varphi}{n}}_{\mathrm{Re}} + i \underbrace{\sum_{n=1} \frac{\sin n\varphi}{n}}_{\mathrm{Im}}$$

$\underline{\varphi = 0}$: Re $\sum \frac{1}{n} = \infty$ – diverguje ($z=1$)

Ale pro $0 < \varphi < 2\pi$ ($z \neq 1$),

Re, Im $\underline{\underline{\text{konvergují}}}$ (ale neabsolutně)

podle Abelovy podmínky (Mat. analýza).

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \text{ konv. norm. v } B_R(a), \quad (R>0)$$

navíc, $c_n(z-a)^n \in \mathcal{O}(B_R(a))$

$\Longrightarrow$ podle Weierstrassovy věty:

$\underline{\textbf{Věta}}$ (holomorfita součtu mocn. řady)

$f(z) := \sum^{\infty} c_n(z-a)^n$ je holom

$F(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ je holom.

funkce v konv. kruhu $B_R(a)$ $(R>0)$.

Navíc, můžeme to rovnice diferencovat kolik chceme! (a budeme mít

taky norm. a abs. konverg. v $B_R(a)$).

podle Weier. věty

protože R nezmění — vidíme z Cauchy-Adam vzorca

Dusledek: (Taylorovi vzorec)

Platí že $\forall n \geq 0$, $\boxed{c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}}$

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots$$

$\underline{z=a}$: $f(a) = c_0$

$\frac{d}{dz}$

$\underline{z=a}$: $f'(a) = c_1$

$\frac{d}{dz}$

$$\frac{d}{dz}$$

$\underline{z=a}$: $f''(a) = 2c_2$, atd.

<u>Důsledek</u>: máme moc velkou kapacitu holom. funkce v $\mathcal{O}(D)$!

Např. $\forall \{c_n\}: |c_n| \leq \frac{1}{n!}$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \in \mathcal{O}(\mathbb{C}) \subset \mathcal{O}(D)$$

$$|c_n z^n| \leq \frac{R^n}{n!}, \quad |z| \leq R$$

$$\left(\sum \frac{R^n}{n!} < \infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \text{ konv. norm. v } \mathbb{C} \Rightarrow \sum c_n z^n \in \mathcal{O}(\mathbb{C}) \right)$$

<u>Věta</u> (reprezentace hol. funkce mocn. řadou)

Nechť $f \in \mathcal{O}(D)$, $a \in D$, $\rho := \mathrm{dist}(a, \partial D)$

$\Rightarrow$ $f(z)$ může být představována v $B_\rho(a)$

mocn. řadou $\sum^{\infty} c_n (z-a)^n$

moc. řadou $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$, a navíc

platí: $$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R(a)} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi, \quad 0<R<\rho$$

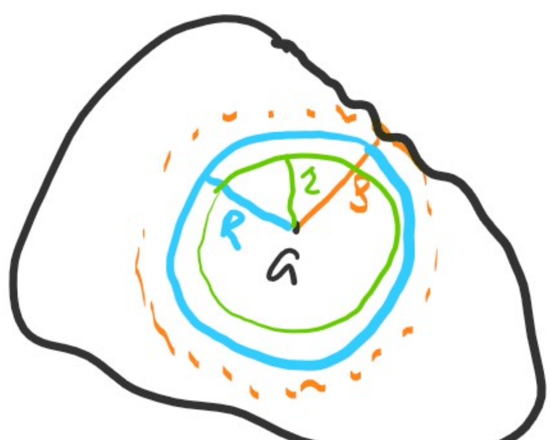
vzorec Cauchy pro koeficienty

<u>Poznámka 1</u>: $c_n \underset{\text{tedy}}{=\!=} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ (Tayl. vzorec)

<u>Poznámka 2</u>: $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ konverguje

<u>rovn.</u> v $B_\rho(a)$ (protože $B_\rho(a) \subset \{\text{konv. kruh}\}$)

<u>Důkaz</u>:



bereme

$0 < r < R < \rho$

nechť $z \in \overline{B_r(a)}$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R(a)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R(a)} \frac{f(\xi)\, d\xi}{(\xi-a)-(z-a)} =$$

$\partial B_R(a) \qquad\qquad \partial B_\varrho(a)$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_\varrho(a)} \frac{f(\xi)\,d\xi}{\xi-a}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-a}{\xi-a}} = \left\{ \begin{array}{l} |z-a|\leq \varepsilon \\ |\xi-a| = R \Rightarrow \\ \left|\frac{z-a}{\xi-a}\right| \leq \frac{\varepsilon}{R} < 1 \end{array}\right.$$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\xi-a}\right)^n$ – geom. progresie $\sum q^n$; konv. stejnom na $|q|\leq\frac{\varepsilon}{R}<1$

konv. $\underline{\underline{\text{stejnoměrně}}}$,

podle z, ξ: $z\in\overline{B_\varepsilon(a)}$, $\xi\in\partial B_\varrho(a)$

Součet je $\dfrac{1}{1-\frac{z-a}{\xi-a}}$ $\Rightarrow$ můžeme integrovat! $\Big\}=$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_\varrho(a)}\frac{(z-a)^n F(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\cdot(z-a)^n,$$

kde $c_n = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\partial B_\varrho(a)}\frac{F(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}d\xi$

(a konv. je stejnom. podle z)

pokud $0 < \varepsilon < R < \rho$

libovolný (můžeme $\varepsilon\to R\to\rho$)

libovolný (můžeme $z \to R \to \rho$)

tak máme ten rozvoj

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \text{ fakt}$$

v celém $B_\rho(a)$.

<u>Otázka</u>: proč pro různý B_R máme stejný c_n?

<u>Protože</u> $c_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$ – nezávisí od R!

$\blacksquare$

<u>Morál</u>: $f \in \mathcal{O}(D) \Rightarrow \forall a \in D$

$\exists B_r(a)$: tam

$$\boxed{f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots}$$

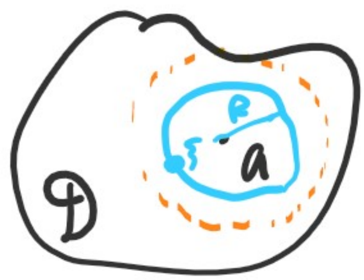
Důsledek (nerovnice Cauchy)

Důsledek (nerovnice Cauchy)

$f \in O(D)$, $a \in D$, $\rho = dist(a, \partial D)$

$\Rightarrow \forall R < \rho$: $\boxed{|c_n| \le \frac{M}{R^n}}$, $M := \max\limits_{\partial B_R(a)} |f|$

Zejména, když $|f| \le M_0$ v D, tak $\boxed{|c_n| \le \frac{M_0}{\rho^n}}$



Důkaz: máme $c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial B_R(a)} \frac{f(\xi)\, d\xi}{(\xi - a)^{n+1}}$

$\Rightarrow$ Bazový mez: $|c_n| \le \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi R \cdot \frac{M}{R^{n+1}} =$

$$= \frac{M}{R^n}$$

Když $|f| \le M_0$ v $D \Rightarrow$ máme

$|c_n| \le \frac{M_0}{R^n}$ $\forall R < \rho \Rightarrow$ bereme $\lim\limits_{R \to \rho}$:

$|c_n| < \frac{M_0}{\ }$

$|c_n| \leq \frac{M_0}{\rho^n}$. ∎

Důsledek (Liouvilleova Věta).

Nechť $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ (f se nazývá <u>celá funkce</u>)

Nechť, navíc, $|f| \leq M$ v $\mathbb{C}$.

V tom případě: $\boxed{f = \text{const}}$

($\nexists$ omezený celý funkce, vyjímkou constant).

Důkaz: Uvažujeme Taylorův

řadu f v $a = 0$:

$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots, \quad z \in \mathbb{C}$

Pro c_n platí: $|c_n| \leq \frac{M}{R^n}$ - podle

nerovnice Cauchy, $\forall R > 0 \Rightarrow$

nerovnice Cauchy, $\forall R > 0 \Rightarrow$

vezmeme $R \to \infty$: pro $n > 0$, $|c_n| \leq 0$

$\Rightarrow c_n = 0$, $n > 0 \Rightarrow$ $f(z) = c_0$.

$\blacksquare$

Neplatí v $\mathbb{R}$!!

$f(x) = \operatorname{arctg} x$

$f(x) = \sin x$

. . .

vše C^∞

Věta (5 ekviv. podmínek holom.)

(1) $f \in \mathcal{O}(\mathcal{D})$ / $\exists f'(z)$, $z \in \mathcal{D}$)

(1') $f^{(k)} \in \mathcal{O}(\mathcal{D})$

(2) $f \in C(\mathcal{D})$, $\forall \bar{\Delta} \subset \mathcal{D}$, platí

$$\int_{\partial\Delta} f(\xi)\, d\xi = 0$$

(2') $f \in C(\mathcal{D})$. $\forall$ napr. jednod.

(2') $f \in C(\mathcal{D})$, $\forall$ napr. zednod. křivku $\gamma \in \mathcal{D}$: vnitřní část $\subset \mathcal{D}$, platí $\int_\gamma f(\xi)d\xi = 0$

(3) $f \in C(\mathcal{D})$, $\forall\ \overline{B_R}(a) \subset \mathcal{D}$,
platí: $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R(a)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$, $z \in B_R(a)$

(4) $\forall B_R(a) \subset \mathcal{D}$, f má prim. funkce.

(5) $\forall a \in \mathcal{D}$, $\exists B_r(a) \subset \mathcal{D}$:
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad z \in B_r(a)$$

<u>Důkaz</u>: z pomocí schromažen. dřívých vět.

(DÚ: to udělat)

(DÚ. to udělat !.

Důsledek: $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$

$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots$

$z \in \mathbb{C}$

$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots$

$(1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} z^3 + \dots$

$|z| < 1$

(zejména: $\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots$)

Důkaz: výpočet Tayl. koef. + hl. věta

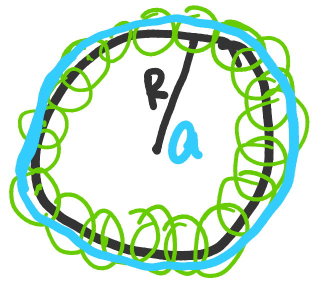
Poznámka: $f \in \mathcal{O}(B_R(a)) \Rightarrow$ alternativa

Poznámka: $f \in \mathcal{O}(B_R(a)) \Rightarrow$ alternativa:

(1) $f \in \mathcal{O}(B_\varepsilon(c))$, $\forall c \in \partial B_R(a) \Rightarrow f$ ale může být hol. prodlouž. v větší kruh $B_\rho(a)$, $\rho > 0$, a její Tayl. řada konv. v $B_\rho(a)$

(2) $\exists c \in B_R(a)$, f ne může být prodl. hol. v žádný $B_\varepsilon(c)$

(c je singulární bod).



Příklad: $\frac{1}{1+x^2} \in C^\infty(\mathbb{R})$

a pro $|x| < 1$: $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dots$

a pro $|x| \geq 1$ už diverguje!!

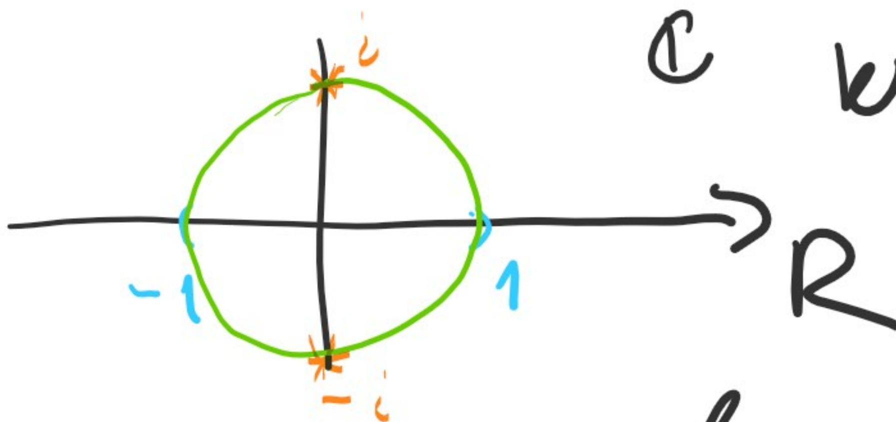
Proč??? Protože holom. prodloužení f na $\mathbb{C}$ je: $\hat{f}(z) = \frac{1}{1+z^2}$ —

$1+z$

– a ta funkce má na $\partial B_1(0) =$
$= \{|z|<1\}$ sing. body: $\boxed{z = \pm i}$

$\Rightarrow$ ne může být prodl. hol v větší

$\mathbb{C}$ kruh!!



$$\lim_{z \to \pm i} f(z) = \infty$$

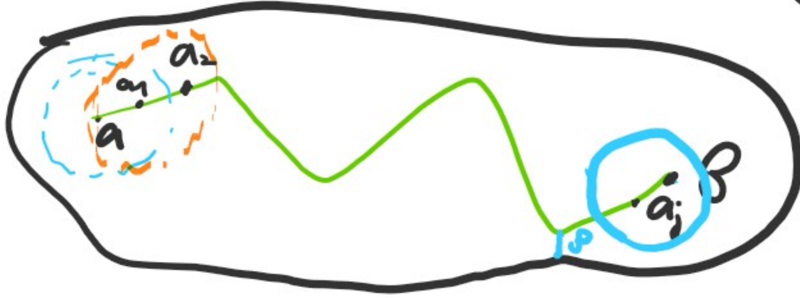
Lemma: $f \in \mathcal{O}(D)$, $a \in D$, a

Taylor. řad f v a je nulový

$(\Longleftrightarrow f = 0$ v $B_r(a)$ $\Longleftrightarrow \forall f^{(n)}(a) = 0, n \geq 0)$.

Pak: $f \equiv 0$ v D.

Důkaz: vybereme $\forall b \in D$



Spojíme a a β lom. čarou γ.

$\rho = dist(\gamma, \partial\Omega)$; $dist(a, \partial\Omega) \geq \rho \Rightarrow$

v $B_\rho(a)$, $f(z) = \sum c_n (z-a)^n \Rightarrow f = 0$ v $B_\rho(a)$

$\Rightarrow$ vybereme $a_1 \in \gamma$; $dist(a, a_1) = \frac{\rho}{2}$.

Teď, $f = 0$ v okolí $a_1 \Rightarrow$ vše Tayl. koef. f v $a_1 = 0 \Rightarrow f = 0$ v $B_\rho(a_1)$ $(dist(a_1, \partial\Omega) \geq \rho) \Rightarrow$

můžeme vybrat $a_2 \in \gamma$ „ve směru" β

$f = 0$ v okolí a_2; $\Rightarrow$ vybereme $a_3, \dots$

máme $\{\underbrace{a, a_1}_{dist=\frac{\rho}{2}}, \underbrace{a_1, a_2}_{dist=\frac{\rho}{2}}, \underbrace{a_2, a_3}_{dist=\frac{\rho}{2}}, \dots\}$

$dist = \frac{\delta}{2}$ $dist = \frac{\delta}{2}$ $dist > \frac{\delta}{2}$

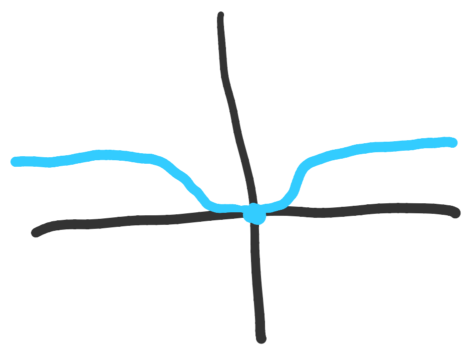
Pokud $|\gamma| < \infty \Rightarrow \exists j:$

$B_\delta(a_j) \ni \gamma \Rightarrow f(\gamma) = 0.$

Takto: $f(\gamma) = 0, \; \forall \gamma \in \mathcal{D} \Rightarrow f \equiv 0$ v $\mathcal{D}$.

Neplatí v R!

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ & x = 0 \end{cases}$$



$$\lim_{x \to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = \left|\frac{1}{x} \to t\right| = \lim_{t \to \infty} e^{-t} = 0$$

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = \left|\frac{1}{x} = t\right| = \lim_{t \to \infty} 2t^3 e^{-t^2} =$$

$$= \lim_{t \to \infty} \frac{2t^3}{e^{t^2}} = |\text{Lopit. pr.}| = \ldots = 0$$

$= \lim_{t\to\infty} \dots e^t = (\text{expon. jako}) = \dots = 0$

položme, $\exists$ vše $F^{(n)}(0) = 0$.

$\Rightarrow F \in C^{\infty}(\mathbb{R})$

<u>Ale: $F^{(n)}(0) = 0$, $n \geq 0$, $F \not\equiv 0$.</u>

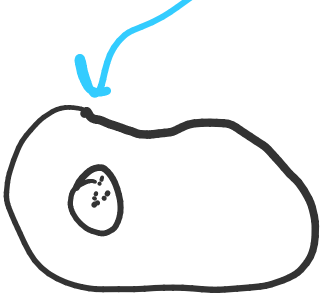
Nechť $\mathcal{D}$ - oblast, $E \subset \mathcal{D}$,

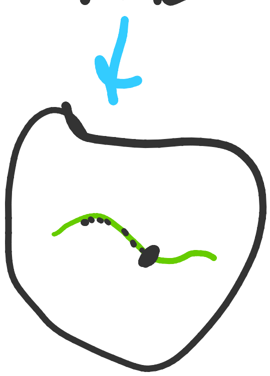
E - podmn. s lim. bodem v $\mathcal{D}$, když

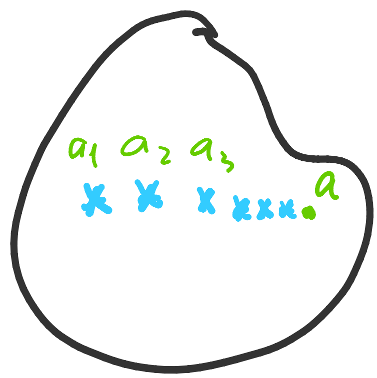
$\exists\, a_j \in E$, $a \in \mathcal{D}$: $\lim_{j\to\infty} a_j = a$, $a_j \neq 0$!

<u>Příklady</u>: — E - otevř. množ.

— E - křivka







Věta o jednoznačnosti: $f, g \in \mathcal{O}(\mathcal{D})$

Veta o jednoznačnosti: $f, g \in \mathcal{O}(D)$,

E – podmnož. s lim. bodom v D,

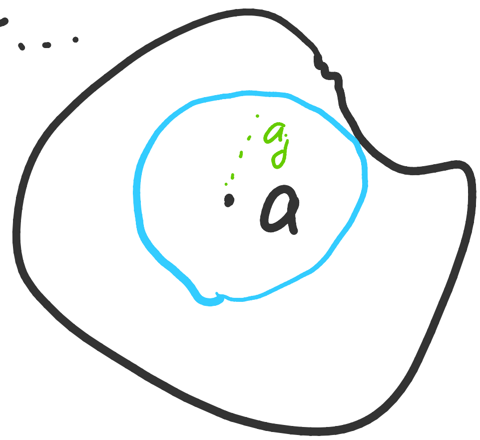
$f = g$ na E. Potom $\boxed{f \equiv g \text{ v } D}$

Dôkaz: nech $h := f - g$, $h = 0$ na E;

potreb. dokazať že $h \equiv 0$ v D.

Nech a – lim. bod E; $a \in D$. a_j, $h(a_j) = 0$

$\forall B_r(a)$: $h(z) = c_0 + c_1(z-a) + \dots$



$z = a_j$, berieme $\lim\limits_{j\to\infty}$:

$$0 = c_0 + c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 + \dots$$
$$\Rightarrow c_0 = 0.$$

$z = a_j$: $0 = c_1 \cdot (a_j - a) + c_2 (a_j - a)^2 + \dots$

delíme na $(a_j - a)$

$$0 = c_1 + c_2 (a_j - a) + \dots$$

$\lim$: $0 = c_1$

$\lim\limits_{j\to\infty}$: $0 = c_1$

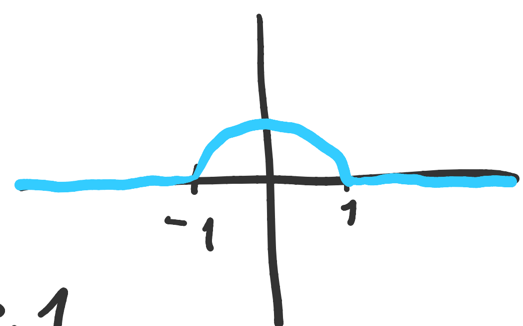
atd. . . . . $c_2 = c_3 = c_4 = \ldots 0$

Vše $c_n = 0$, $n > 0 \Rightarrow h(z) = 0$ v $B_2(a)$.

Teď, přineme lemma výše $\Rightarrow h(z) \equiv 0$ v $\mathcal{D}$.

$\blacksquare$

Neplatí v R!

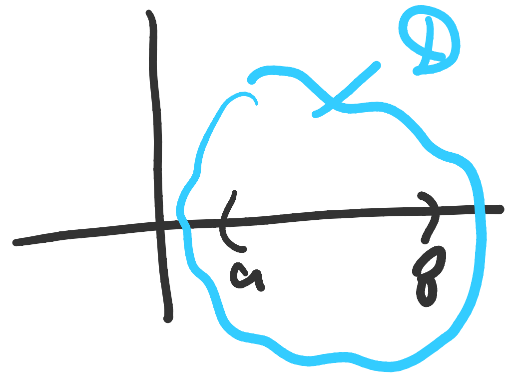


$$F(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}}, & |x| < 1 \\ F(x) = 0, & |x| \geq 1. \end{cases}$$

Výpočet podobný příkladu výše ukazuje, že $F \in C^\infty(\mathbb{R})$, ale $F = 0$ na otevř. množ. $\{|x| > 1\}$

<u>Def</u>: Nechť $F(x)$ je reálná funkce na $(a, b) \subset \mathbb{R}$.
Pak, $\hat{F}(z)$ se nazývá <u>anal. prodloužený</u> F
v oblast $\mathcal{D} \supset (a,b)$, pokud $\hat{F} \in \mathcal{O}(\mathcal{D})$

v oblast $D \supset (a,b)$, když $f \in \mathcal{O}(D)$,
a $\tilde{f}(z) = f(z)\big|_{z \in (a,b)}$.



Důsledek z věty o jednoznačnosti:

$\exists$ max jedné anal. prodl. $f(x)$ z (a,b)

Příklady: $e^z \leftarrow e^x$, $\sin z \leftarrow \sin x$, atd.
$\ln z \leftarrow \ln x$ $(x>0)$, atd.

Důsledek: Vše obvyklý trigonom., expon., atd. vzorci platí na $\mathbb{C}$
$(e^{z+w} = e^z \cdot e^w$, $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$, atd$)$

Důkaz: např., $\underbrace{\sin^2 z + \cos^2 z = 1}$
platí $z \in \mathbb{R} \Rightarrow$ platí $z \in \mathbb{C}$.

Stejně pro ostatní vzorce ...

Stejně pro ostatní vzorci s 1 prom.

Teď, dokážme, např., $e^{z+w}=e^z e^w$

Uvaž. konkr. $w\in\mathbb{R}$; $e^{z+w}=e^z e^w$

platí $\forall z\in\mathbb{R} \Rightarrow$ platí $\forall z\in\mathbb{C}$

Teď, uvaž. konkr. $z\in\mathbb{C}$, $e^{z+w}=e^z\cdot e^w$

platí pro $w\in\mathbb{R}$ – podle předchozí důkazu! $\Rightarrow$

platí $\forall w\in\mathbb{C}$.

Konečně: platí $\forall z\in\mathbb{C}$, $\forall w\in\mathbb{C}$.

Otázka: jaký funkce můžou být prodloužený?

Např.: $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ nemůže

být prodl. z $\mathbb{R}$ do žádný $D\subset\mathbb{C}$,

protože $f^{(n)}(0)=0 \Rightarrow$ Tayl. řada

v $z=0$ je nulová $\Rightarrow$ prodlouž. bude $\equiv 0$

$\ldots = 0$

ale $f \not\equiv 0$ na $\mathbb{R}$!

(Tayl. řada na $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ v bodu je stejná).

<u>Věta</u>: Nechť $f(x)$ je reálná funkce na (a,b); taková, že f má analyt. prodlouž. v $D \subset \mathbb{C} \iff$ (a) $f \in C^\infty(a,b)$;

(b) (Reálná) Tayl. řada f v bodu $c \in (a,b)$ konverguje k $f(x)$.