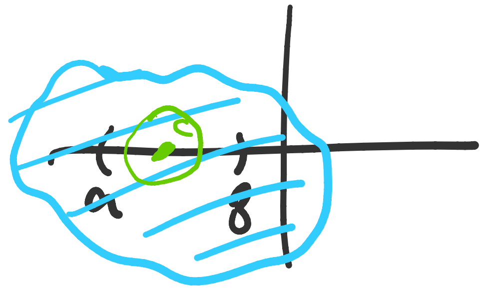
Prednaska15

Friday, April 23, 2021 2:06 PM

Důkaz: když f má anal. prodloužení

$\Rightarrow \forall c \in (a,b),\ \exists B_r(c)$:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-c)^n$$



v $B_r(c) \Rightarrow F \in C^\infty$ v $B_r(c)$

(a pak $f \in C^\infty(c-r, c+r)$) a

f je součet stejné mocn. řady.

$z=x$

Tudíž, (a) ✓ (b) ✓

Teď, inverzní směr: nechť (a), (b) platí $\Rightarrow \forall c \in (a,b),\ \exists (c-r, c+r)$:

tam $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-c)^n$,

poloměr konvergence $R = \dfrac{1}{\lim \sqrt[n]{|c_n|}}$ –

– stejný vzorec platí pro

∞

...stejný vzorec platí pro

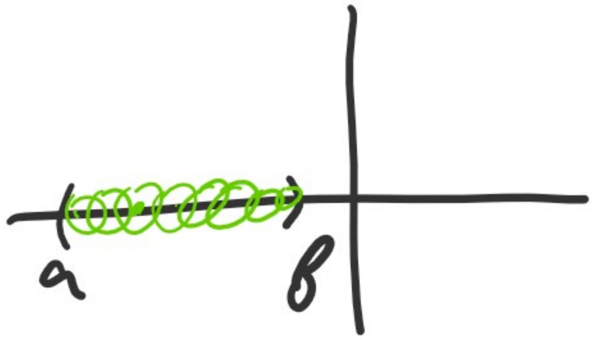
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-c)^n \Rightarrow \text{konvergují}$$

v $B_R(c) \supset B_r(c) \Rightarrow$ můžeme analyt. prodloužit f v kruh $B_r(c)$.

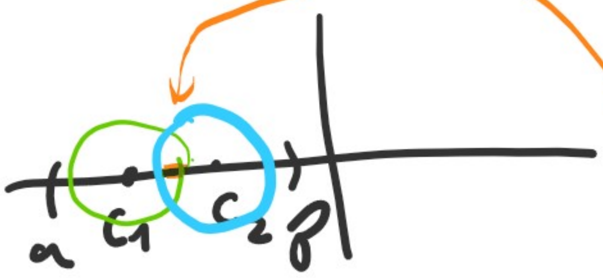
Teď, bereme spojení $\bigcup B_r(c) = \mathcal{D}$

f je prodloužena anal. v $\mathcal{D}$!   oblast

Jen otázka: proč ty prodloužení v kruhy $B_c(r)$ souhlasují se?



(Proč prodl. v modrý kruh = v zelený?)



Protože: $f_1 = f_2$ na $B_{r_1}(c_1) \cap B_{r_2}(c_2) \cap \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ podle lemmy o jednoznačnosti:

$\Rightarrow$ podle lemmy o jednoznačnosti:

$F_1 = F_2$ v celém $B_{r_1}(c_1) \cap B_{r_2}(c_2)$.

Příklad: $e^{-\frac{1}{x^2}}$ — (α) platí, (β) — neplatí;

$\sqrt[3]{x}$ — (α) neplatí; — nemůžou být prodl.

Příklad: $e^{\sin x}$ — ano ✓

$f(z) = e^{\sin z}$

Nebo používáme (α), (β) + Cauchy nebo Lagrangeův tvar $R_n(x)$ (zůstatek)

Def: $f \in \mathcal{O}(D)$; a se nazývá nulový bod pro f, když $f(a) = 0$.

Vlastnost: pokud $f \not\equiv 0$ v D, $\nexists$ jiný nulový f $B^*_\varepsilon(a)$

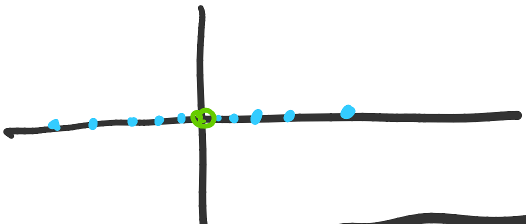
(To znamená: vše

(To znamená: vše nulové body jsou isolované; množina všech nul. bodů je diskrétní v oblasti).

Důkaz: pokud a není isol. nul. bod $\Rightarrow \forall k$, v $B_{\frac{1}{k}}(a)$ $\exists\, a_k \neq a$: $f(a_k)=0$; $\Rightarrow f(a_k)=0\ \forall k$, $a_k \to a$, $a_k \neq 0 \Rightarrow$ podle věty o jednozn.: $f \equiv 0$

Příklad: $f(z) = \sin\frac{1}{z}$, $D = \mathbb{C}\setminus\{0\}$

nul. body: $\frac{1}{z} = \pi k$; $z = \frac{1}{\pi k}$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$



Budeme uvažovat případ $f \not\equiv 0$

$f \in O(D)$, a – nul. bod ($\Rightarrow$ isolovaný)

$\exists B_r(a)$: $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z-a)^n$

$\exists n$: $c_n \neq 0$ (jinak $f = 0$ $B_r(a) \Rightarrow f \equiv 0$).

Berem. takový min číslo $= m$

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad c_m \neq 0$$

Def: m se nazývá pořadek nulového bodu (a – nul. bod m-ho pořadku).

násobnost

pořadek $= m \Leftrightarrow f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(m-1)}(a) = 0$,

ale $f^{(m)}(a) \neq 0$.

(protože $c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$). násobnost f v $z=a$: $\boxed{\operatorname{ord}_a f(z)}$

Příklady: $\sin z$, $z=0$: $f'(0) = 1 \Rightarrow m = 1$

$1 - \cos z$, $z = 0$: $f'(0) = 0$, $f''(0) = -1$

$1-\cos z,\ z=0:\ f(0)=0,\ f'(0)=-1$

$m=2$

$e^z,\ z=0:$ nemá nul. bod

$(m=0)$.

$z-\sin z,\ z=0:\ z-\left(z-\frac{z^3}{3!}+\dots\right)=\frac{z^3}{6}+\dots$

$\Rightarrow m=3$.

Faktorizace: $f(z)=c_m(z-a)^m+$

$+c_{m+1}(z-a)^{m+1}+\dots=$

$$=(z-a)^m\underbrace{\left(c_m+c_{m+1}(z-a)+c_{m+2}(z-a)^2+\dots\right)}_{g(z)}$$

Moc. řada; konverguje v $B_r(a)$ – protože získ. řada: $:(z-a)^m$

$\Rightarrow g(z)\in\mathcal{O}(B_r(a))$ – jako součet moc. řady!

$\Rightarrow \boxed{f(z)=(z-a)^m g(z),\ \text{kde } g(a)\neq 0}$ (v $B_r(a)$), $g(a)=c_m$

(v $B_2(a)$) c_m

Naopak, když $f(z)=(z-a)^m g(z)$, $g\in \mathcal{O}(B_2(a))$

$g(a)\neq 0 \Rightarrow f(z)=(z-a)^m\big(p_0+p_1(z-a)+$
$+p_2(z-a)^2+\dots\big)=p_0(z-a)^m+p_1(z-a)^{m+1}+\dots$

$p_0\neq 0 \Rightarrow z=a$ ~ nul. bod. násob. m pro f.

$f(z)=c_m(z-a)^m+\dots$, $c_m\neq 0$, v $B_2(a)$

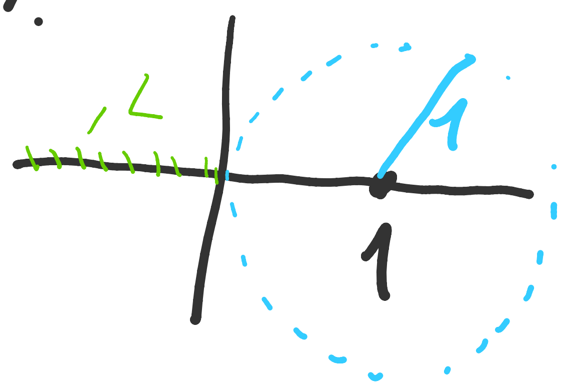
$$f(z)=c_m(z-a)^m\Big(\underbrace{1+\frac{c_{m+1}}{c_m}(z-a)+\frac{c_{m+2}}{c_m}(z-a)^2+\dots}_{\text{konv. v } B_2(a)\ =h(z)}\Big)$$

$\Rightarrow h(z)\in \mathcal{O}(B_2(a))$

$h(a)=1$; $\Rightarrow$ když zmenšíme r!

máme $h(z)\in B_1(1)$.

Zejména $h(z)\in \mathbb{C}\setminus L$
„řez"



V $\mathbb{C}\setminus L$, $\exists$ jednozn. větev $\sqrt[m]{z}$ – a je,

v $\mathbb{C} \setminus L$, $\exists$ regul. větev $\sqrt[m]{z}$ – a je hol. !
$\lambda(z)$; $(\lambda(z))^m = z$ podle def

$\Rightarrow \lambda(h(z)) = \lambda \circ h \in \mathcal{O}(B_r(a))$

$$\Rightarrow f(z) = \Big(\underbrace{\underset{\text{libov. odmoc.}}{\sqrt[m]{c_m}} \cdot (z-a)\Big(\underset{\lambda(h(z))}{\sqrt[m]{1 + \tfrac{c_{m+1}}{c_m}(z-a) + \dots}}\Big)}_{g(z) \in \mathcal{O}(B_r(a))}\Big)^m$$

$$\Rightarrow \boxed{f(z) = (g(z))^m, \quad g(a) = 0, \; g'(a) \neq 0}$$

Vše to nám dává větu:

Věta: nechť a je nul. bod $f \in \mathcal{O}(D)$, $f \not\equiv 0$. Pak násled. podmínky jsou ekviv.:

(1) a je nul. bod násob. $= m$

(1) a je nul. bod násob. $= m$

$(c_0 = \dots c_{m-1} = 0,\ c_m \neq 0)$

(2) $f(a) = f'(a) = \dots = f^{(m-1)}(a) = 0,\ f^{(m)}(a) \neq 0$

(3) v okolí a, $f(z) = (z-a)^m g(z)$,

$g(z) \in B_z(a)$, $g(a) \neq 0$

(4) $f(z) = (g(z))^m$, $g \in B_z(a)$,

$g(a) = 0$, $g'(a) \neq 0$ (a – nul. bod násob. 1 pro g).

Připomínka: $\mathrm{Jac}_g = |g'(a)|^2$ $\longrightarrow g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow$ zejména: $\mathrm{Jac}_g \neq 0 \Leftrightarrow g'(a) \neq 0$

$\Rightarrow$ v rozvoje (4), $g(z)$ je

https://strana.ua/news/329637-eks-hlava-ofisa-prezidenta-slyshal-kak-zelenskij-predlahal-sternenko-dolzhnost-hlavy-sbu-.html?fbclid=IwAR2qHZoE0l0onrKGQ9isTpPp4hCUSDrhj_ErluYcNdq5NQpF0zYizsM3C_s

lokálně bijektivní zobrazení

(z věty o inverzním zobr. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$)

(z věty o inverzním zobr. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$)

<u>Inverzní Věta</u>: $f \in \mathcal{O}(\mathcal{D})$, $a \in \mathcal{D}$.

Pak, f je lokálně bijektivní v a

$(\exists B_r(a)$: f je bijekt. v $B_r(a)) \Longleftrightarrow$

$$f'(a) \neq 0.$$

<u>Důkaz</u>: když $f'(a) \neq 0$ – sleduje z diskuze výše ($\mathcal{M}_a C_f$).

<u>Naopak</u>: nechť f – lok. bijekt. v a.

$\forall B_r(a)$ (malé): $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n =$

$= A + c_m (z-a)^m + \ldots$, $c_m \neq 0$

(takto, $z=a$ je m-násob. nul. bod pro $f(z) - A$).

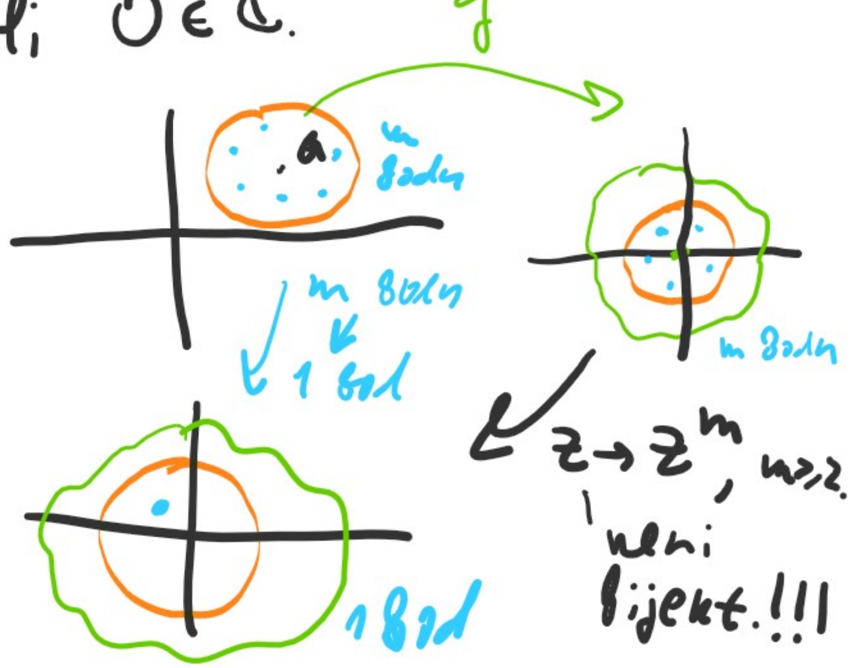
Dokažeme, že $m = 1$. Nechť $m \geq 2$. Chceme kontradikci

$m \geq 2$. Chtěláme kontradikce.

$F(z) - A = (g(z))^m$, $g(a) = 0$, $g'(a) \neq 0$

$g \in \mathcal{O}(B_\varepsilon(a))$; g - bijekt. zobr.

$B_\varepsilon(a) \to$ okolí $0 \in \mathbb{C}$.



(∀ nenulové číslo c, má m různých $\sqrt[m]{c}$)

$z \to z^m$, $m \geq 2$ není bijekt.!!!

$\Rightarrow$ složení $(g(z))^m = F(z) - A$ — není bijekt!

(v žádné $B_\varepsilon(a)$). - kontradikce.

$\Rightarrow m = 1$; $\Rightarrow c_1 = F'(a) \neq 0 \Rightarrow$ konec.

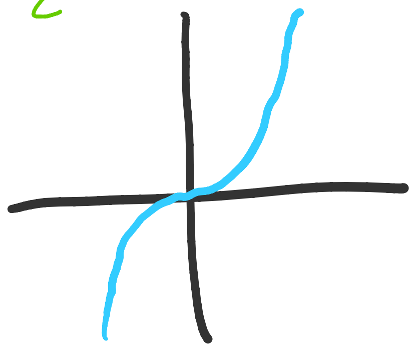
$\blacksquare$

Neplatí v $\mathbb{R}$!!

$w = z^3$

Příklad: $y = x^3$

$w = z^3$



Bijekce, $f \in C^\infty$,

ale $f'(0) = 0$.

Připomínka: měli jsme větu o inverz. zobr. ($f: D \to \Omega$ – hol; $f(D) = \Omega$; f – bijekce; $\underline{f' \neq 0}$ v $D \Rightarrow \exists$ inv zobr $f^{-1} = g$: $g \in O(\Omega)$, $g(f(z)) = z$.)

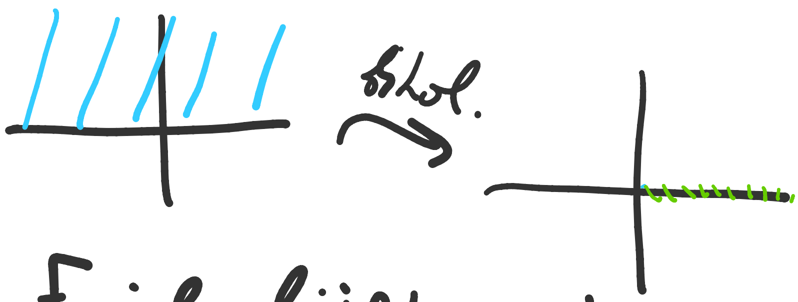
Předchozí věta nám říká, že, fakt, máme **silnější** větu:

Věta: $f \in O(D)$, $f: D \xleftrightarrow{\text{bijekce}} \Omega$ $\Rightarrow$ inv. zobr. $g = f^{-1} \in O(\Omega)$.

Def: Bijek. hol. zobr. $D \to \Omega$

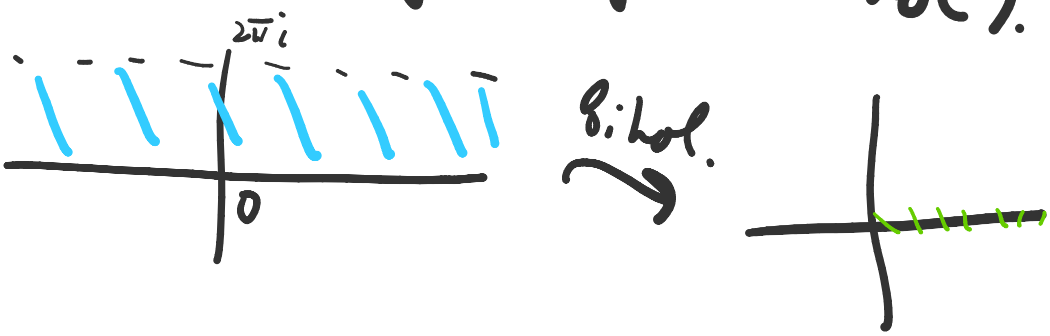
se nazývá **biholomorfismus**; když f $\exists$, nazýváme D a Ω **biholomorfní**.
(vždy, v tom případě, $\exists$ $f^{-1}: \Omega \to D$ bihol.)

Příklady: z^2:

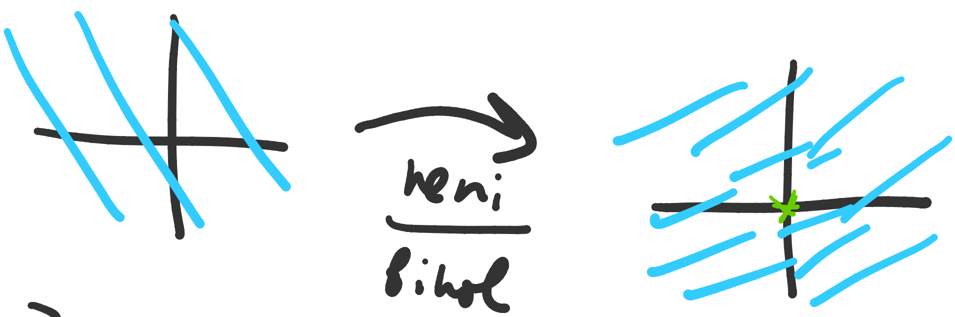


(protože f je bijekce a hol).

e^z:



e^z:



$f'(z) = e^z \neq 0$, ale to nepomůže!

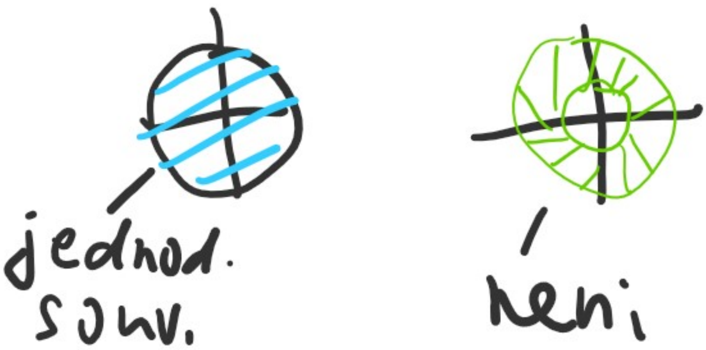
e^z – lok. bijekt. v $\mathbb{C}$, ale není bijekt (např., protože je period.)

(např., protože je period.)

Otázka: $D = B_1(0)$, $\Omega = \{1 < |z| < 2\}$

$\cancel{D \overset{\text{bihol}}{\sim} \Omega}$?

Ne!

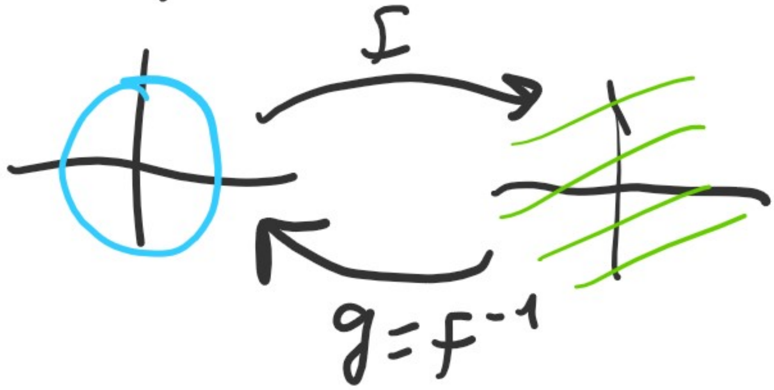


$\Rightarrow$ nejsou homeomor.! (zejména nejsou bihol)

Otázka: $D = B_1(0)$, $\Omega = \mathbb{C}$

$D \overset{\text{bihol}}{\sim} \Omega$?

Ne!



$g(\mathbb{C}) = B_1(0) \Rightarrow |g| < 1 \Rightarrow$

podle Liouv. věty: $g(z) = \text{const}$ –

– kontradikce

Riemannova Věta (bez důkazu)

Riemannova věta (bez důkazu)

$\forall$ dvě jednod. souv. oblasti $D, \Omega \subset \mathbb{C}$ vyjma $\mathbb{C}$, jsou biholomorfní!

Def: $D \subset \mathbb{C}$ - oblast; $\mathrm{Aut}(D) = \left\{ \begin{array}{l} f \text{ - bihol.} \\ D \to D \end{array} \right\}$

Grupa automorfismů

To je grupa podle složení zobr. (složení bihol dává bihol, a $\forall f$, $\exists f^{-1}$).

Fakt: když $D \overset{\text{bihol}}{\sim} \Omega \Rightarrow$

$$\mathrm{Aut}(D) \underset{\text{isom}}{\simeq} \mathrm{Aut}(\Omega)$$

Důkaz: nechť $\varphi : D \xrightarrow{\text{bihol}} \Omega$

$\Rightarrow$ definujeme $\lambda : \mathrm{Aut}(D) \to \mathrm{Aut}(\Omega)$,

jako: $\lambda(f) = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$ $f \in \mathrm{Aut}(D)$

jako: $\lambda(f) = \underbrace{\varphi}_{D\to\Omega} \circ \underbrace{f}_{D\to D} \circ \underbrace{\varphi^{-1}}_{\Omega\to D}$, $f \in Aut(D)$

jasné že $\lambda(f)$ – taky bihol $\Omega \to \Omega$

$\exists$ inverzní zobr. λ^{-1}: $\varphi^{-1}\circ g \circ \varphi \Rightarrow$

λ je bijekce; jasné že

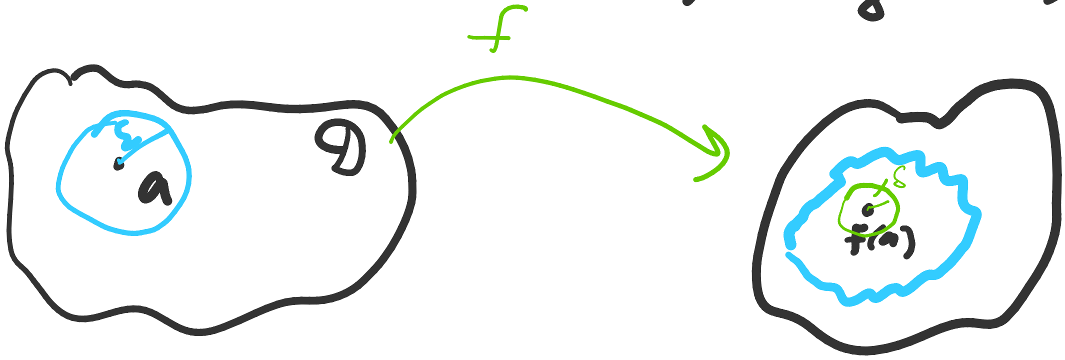
$$\underbrace{\lambda(f_1 f_2)}_{\varphi\circ f_1\circ f_2\circ\varphi^{-1}} = \underbrace{\lambda(f_1)}_{\varphi\circ f_1\circ\varphi^{-1}} \circ \underbrace{\lambda(f_2)}_{\varphi\circ f_2\circ\varphi^{-1}}$$

$\blacksquare$

Věta o otevřeném zobrazení: Nechť $D \subset \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{O}(D)$, $f \neq$ const. Pak, $f(D)$ je taky oblast v $\mathbb{C}$

Důkaz: f je spojitá $\Rightarrow f(D)$ je spojitá množina. Potřebujeme dokázat, že $f(D)$ – otevřená množina. $(\Leftarrow)$

$\forall a \in \mathcal{D},\ \forall B_\varepsilon(a):\ f(B_\varepsilon(a)) \supset B_\delta(f(a))$



(obraz je otevřen v bodu f(a)).

$f(a)=b$; v okolí a: $\underbrace{f(z)-b}_{=0 \text{ pro } z=a} = g(z)^m$,

m-násobnost nul. bodu a pro $f(z)-b$,

a navíc $g'(a) \neq 0$. (Dokázáno dříve).

$f(z) = b + g(z)^m \Rightarrow f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$

$f_1: z \to g(z)$; $f_2: w \to w^m$; $f_3: \xi \to \xi + b$

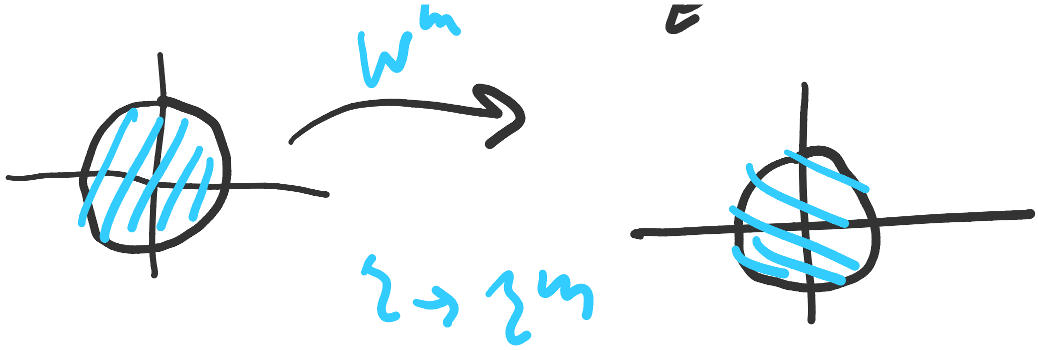
$a \to 0$ $\quad$ $0 \to 0$ $\quad$ $0 \to b = f(a)$

lok. biject. zejména otevřené ($g'(a) \neq 0$), $g(\text{okolí}) \supset \text{okolí}$

není biject., ale otevřené!

posunutí geom. bijekt. zobr., zejména otevřené

w^m



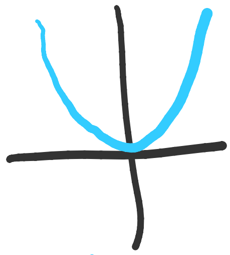
$z \to z^m$

$\varphi \to m\varphi$

$\Rightarrow f$ je otevřené jako složení otevř. zobr. $\square$

Neplatí v $\mathbb{R}$!

$y = x^2$



$f(\mathbb{R}) = [0, +\infty)$

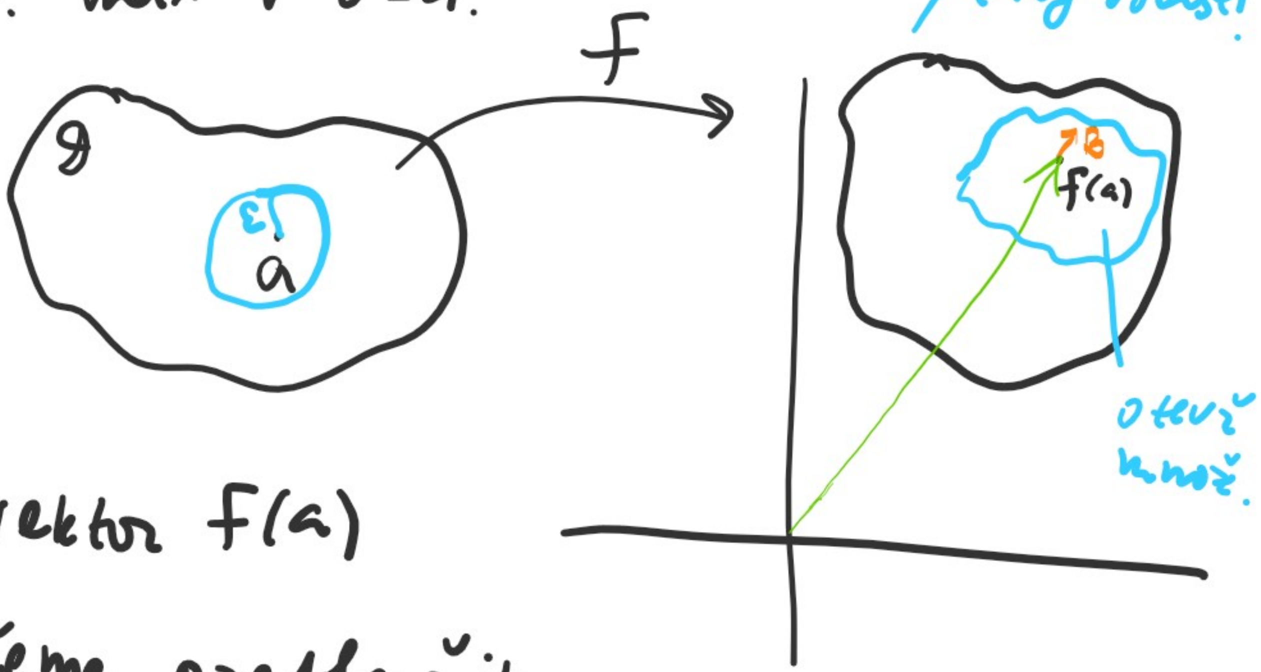
není otevřeno v bodu $y=0$.

Ale $w = z^2 \Rightarrow f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$

Princip maxima: $D \subset \mathbb{C}$ – oblast, $f \in \mathcal{O}(D)$, nechť $|f(z)|$ má lok. max. v bodu a: $|f(z)| \le |f(a)|$, $\forall z \in B_\varepsilon(a)$.

Pak $f = \text{const}$ (!)

Důkaz: nechť $f \neq const$; $|f|$ – má lok. max v $z=a$.



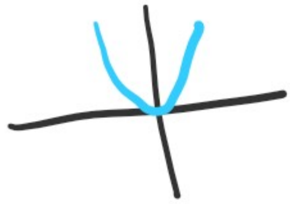
$\Rightarrow$ vektor $f(a)$

můžeme prodloužit

$B \in f(B_\varepsilon(a))$, $|B| > |f(a)|$

$B = f(c)$ – kontradikce!

Neplatí v $\mathbb{R}$ $y = x^2$



Důsledek: $f \in \mathcal{O}(D)$, $f \in C(\overline{D})$, D – omezená. $\Rightarrow \max_{z \in \overline{D}} |f(z)| = \max_{z \in \partial D} |f|$

Důkaz: $\overline{D}$ – omezená a uzavřená množina $\Rightarrow$ kompaktní,

Nechť $f \neq const$ (pro $f = const$ jasné).

$|f| \in C(\overline{D}) \Rightarrow \exists$ max bod: $a \in \overline{D}$,

$|f(z)| \leq |f(a)|$; podle principu
$\forall z \in \overline{D}$

max., $a \notin D \Rightarrow a \in \partial D \Rightarrow$

$\max\limits_{\overline{D}} |f| \leq \max\limits_{\partial D} |f|$; $\partial D \subset \overline{D} \Rightarrow$

$\max\limits_{\partial D} |f| \leq \max\limits_{\overline{D}} |f| \Rightarrow \max\limits_{\overline{D}} |f| = \max\limits_{\partial D} |f|$

$\boxtimes$

Jinými slovama, holomorfní funkce, spojitá v uzavřené omezené oblasti má svůj max $|f|$ na hranice.

Důsledek: hlavní věta algebry:

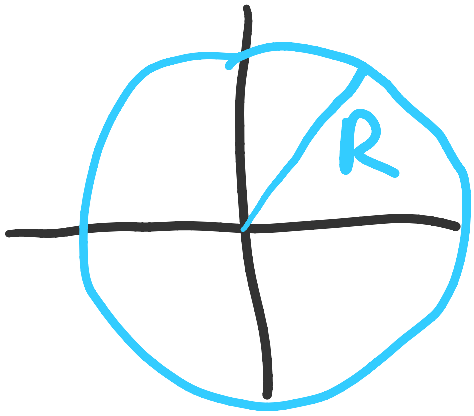
Důsledek: hlavní věta algebry:

$\forall\, p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$ má kořen $c \in \mathbb{C}$. $\quad \overset{\neq}{0}\ (n \geq 1)$

Důkaz: hledáme kontradikce:

nechť $p(z) \neq 0 \ \forall z \in \mathbb{C}$. $\Rightarrow$

$$f(z) := \frac{1}{p(z)} \in \mathcal{O}(\mathbb{C}).$$



Podle principa maximuma:

$$\max_{|z|\leq R} |f| = \max_{|z|=R} |f|$$

Ale, $p(z) = \underbrace{z^n}_{\downarrow z\to\infty \atop \infty}\Big(\underbrace{\frac{a_0}{z^n}}_{\downarrow \atop 0} + \underbrace{\frac{a_1}{z^{n-1}}}_{\downarrow \atop 0} + \dots + \overset{\overset{0}{\neq}}{a_n}\Big)$

$$\Rightarrow p(z) \xrightarrow{z\to\infty} \infty \Rightarrow f = \frac{1}{p} \xrightarrow{z\to\infty} 0$$

$$\Rightarrow \max_{|z|=R} |f| \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

$\quad \parallel \qquad \xrightarrow{R\to\infty} 0$

$$\max_{|z|\le R} |f| = \varphi(R) \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

— vzrostoucí funkce!

$$\left(R_1 \le R_2 \Rightarrow \varphi(R_1) \le \varphi(R_2) \right)$$

$$\Rightarrow \varphi(R) \equiv 0 \Rightarrow f \equiv 0$$

$f = \frac{1}{P}$ — kontradikce. $\blacksquare$

<u>Příklad aplikace</u>: $f \in \mathcal{O}(D) \cap C(\overline{D})$, D-omezená; $f(z) = 0$, $\forall z \in \partial D$.

$\Rightarrow f \equiv 0$

<u>Důkaz</u>: $\max_{\overline{D}} |f| = \max_{\partial D} |f| = 0 \Rightarrow f \equiv 0$ v $\overline{D}$.

Holomorfita v nekonečnosti

Připomínám: $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \simeq S^2$

<u>Připomínám</u>: $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \simeq S^2$

$B_\infty = \infty \cup \{\mathbb{C} \setminus K\}$, K-kompakt — okolí nekonečnost,

např. $\{|z| > R\} = B_{\frac{1}{R}}(\infty)$
včetně $z = \infty$

<u>Def</u>: Nechť f je funkce v oblasti $D \subset \overline{\mathbb{C}}$, $\infty \in D$.

Říkáme že <u>f je hol v D</u>, $f \in \mathcal{O}(D)$, když $f \in \mathcal{O}(D \setminus \{\infty\})$ v obvyklém smyslu, a $g(t) := f\left(\frac{1}{t}\right)$ je hol v $t = 0$.

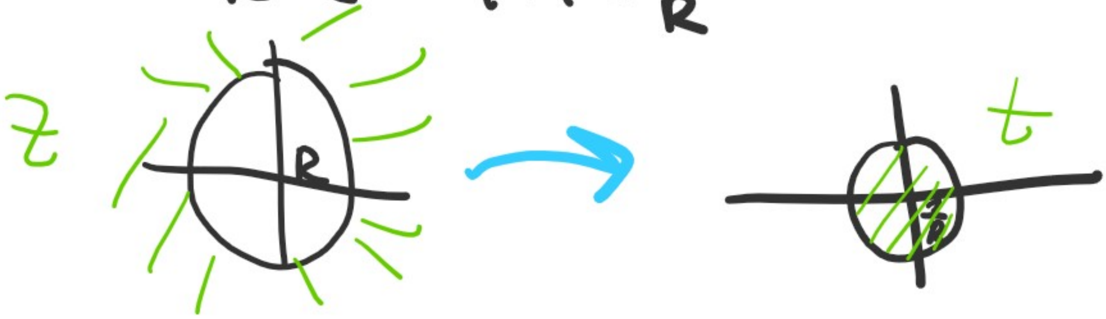
$t = 0$
$z = \infty$

$z = \frac{1}{t}$

$t = \frac{1}{z}$

$z \in B_{\frac{1}{R}}(\infty) \iff t \in B_{\frac{1}{R}}(0)$

$|z| > R \iff |t| < \frac{1}{R}$



<u>Def</u>: když $f \in \mathcal{O}(D)$, $D \ni \infty$,

ještě. když $f \in O(B$, $\ldots)$,

$\overline{f}(\infty) = 0 \Rightarrow \infty$ je <u>nulový bod f</u>;

násobnost nul. bodu $f(\frac{1}{t})$ v $t=0$ nazýváme násobnost ~~bodu~~ ∞.

Příklady

1) $f(z) = z^3$ - hol-li v $z = \infty$?

$z = \frac{1}{t} \Rightarrow f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t^3}$ - <u>není</u> hol v $t = 0$ (není spojitá) $\Rightarrow$ <u>ne</u>.

2) $f(z) = \sin\left(\frac{1}{z}\right)$

$f(\infty) = 0$

$z = \frac{1}{t} \Rightarrow f\left(\frac{1}{t}\right) = \sin t$ — hol v $t = 0$

$\sin 0 = 0$

$\sin'(0) = \cos 0 = 1$

$\Rightarrow$ <u>ano</u>

∞ - nul. bod, $\operatorname{ord}_\infty f = 1$

3) $f(z) = \frac{z+1}{z^2+z+1}$, $z = \frac{1}{t} \Rightarrow$

$f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{\frac{1}{t}+1}{\ldots} = \frac{t^2+t}{\ldots} \in O(B_\varepsilon(0))$

$$f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{\frac{1}{t}+1}{\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t}+1} = \frac{t^2+t}{1+t+t^2} \in \mathcal{O}(B_\varepsilon(0))$$

$$t\cdot\frac{1+t}{1+t+t^2} = t(1+\dots) \Rightarrow \underline{\operatorname{ord}_\infty f = 1}$$

4) e^{z^2} $\quad z=\frac{1}{t} \Rightarrow e^{\frac{1}{t^2}}$ - je li hol v $t=0$?

Ne: nene spojita $\left(\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t\in\mathbb{R}}} e^{\frac{1}{t^2}} = \infty\right)$

$\Rightarrow f$ <u>není</u> hol v $z=\infty$.

<u>Otázka</u>: $\exists$? $f\in\mathcal{O}(\overline{\mathbb{C}})$

$f = \text{const}$ ✓

<u>Veta</u>: $f\in\mathcal{O}(\overline{\mathbb{C}}) \Rightarrow \underline{f=\text{const}}$

<u>Dôkaz</u>: $\overline{\mathbb{C}}$ - kompaktný topol. priestor

$(\hat{\mathbb{C}} \simeq S^2)$; $|f| \in C(\overline{\mathbb{C}}) \Rightarrow$

$(\hat{\mathbb{C}} \simeq S^2)$; $|f| \in C(\hat{\mathbb{C}}) \Rightarrow$

$|f|$ je omezená, a $\exists$ max bod a:

$|f(z)| \leq |f(a)|$, $\forall z \in \overline{\mathbb{C}}$

Teď, když $a \neq \infty$, $f \in B_2(a)$ —

— má tam max $|f|$ v $z = a \Rightarrow f = \text{const}$

v $B_2(a) \Rightarrow$ podle jednoznačnosti:

$f = \text{const}$ v $\mathbb{C} \Rightarrow$ podle spoj. $f = \text{const}$ v $\overline{\mathbb{C}}$.

když $a = \infty$: uvažujeme $t = \frac{1}{z}$,

$\underbrace{f\left(\frac{1}{t}\right)}_{=g(t)} \in O(\mathbb{C})$, $\max\limits_{\mathbb{C}} |g(t)| = |g(0)|$

$\Rightarrow g = \text{const} \Rightarrow f = \text{const}$.

<u>Poznámka</u>: Vše zajímavé vlastnosti hol funkce (princip max, věta o otevř zobr, věta Weierstrasse o konvergenci, věta o jednozn., atd) platí

... $O(\Omega)$ ...

pro $f \in \mathcal{O}(\mathcal{D})$, $\mathcal{D} \subset \overline{\mathbb{C}}$.

Princip max: $\mathcal{D} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $f \in \mathcal{O}(\mathcal{D})$,

$a \in \mathcal{D}$: lok. max $|f|$ $(\exists B_\varepsilon(a): \underset{\forall z}{|f(z)| \le |f(a)|})$

$\Rightarrow f = \text{const}$.

Důkaz: když $a \neq \infty \Rightarrow \exists B_\varepsilon(a) \subset \mathbb{C} \cap \mathcal{D}$:

a - lok max $\Rightarrow f = \text{const}$ v $\mathbb{C} \cap \mathcal{D} \Rightarrow$

podle kontin., $f = \text{konst}$ v $\mathcal{D}$.

když $a = \infty$:

případ 1: $\mathcal{D} = \overline{\mathbb{C}} \Rightarrow f = \text{const}$ podle věty výše

případ 2: $\mathcal{D} \neq \overline{\mathbb{C}} \Rightarrow \exists b \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{D} \Rightarrow$

uvažujeme: přimenime zobr.

$\frac{1}{z-b}$ - převede $\mathcal{D} \longrightarrow \Omega \subset \mathbb{C}$

$\neq \infty$ v $\mathcal{D}$; převede $a \to \frac{1}{a-b}$

$\varphi(z) = \frac{1}{z-b}$: $\mathcal{D} \underset{\varphi^{-1}}{\overset{\varphi}{\rightleftarrows}} \Omega$

$g = f \circ \varphi^{-1} \in \mathcal{O}(\Omega)$

Teď přímeníme princ. max pro

g ($|g|$ má lok. max. v bodu $\frac{1}{a-b} \in \Omega$)

$\Rightarrow g = \text{const} \Rightarrow f = \text{const}.$

<u>Poznámka</u>: hlavní nápad důkazu je udělat $z \to \frac{1}{z-b}$, a převést oblast $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ do $\Omega \subset \mathbb{C}$.
(a dál pracovat s Ω).