Prednaska 19

Friday, May 7, 2021 2:05 PM

Singularni body holom. funkce

Def: Bod a je isolovani singul. bod pro funkce f, když $f \in \mathcal{O}(B_r^*(a))$ (a neni definovana v $z=a$).

$B_r^*(a) = \{0 < |z-a| < r\}$

$\Rightarrow \exists$ Laur. rozvoj f v $B_r^*(a)$:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

$n=-\infty$

3 možnosti!

1) Hlavní část $\equiv 0$ $(c_n=0,\ n<0)$

$\Rightarrow$ a se nazývá odstranitelný sing. bod

2) Hlavní část je konečná (a nenulová)!

$c_n=0,\ n<-k,\ c_{-k}\neq 0 \quad (k>0)$

Hlavní část: $c_{-k}(z-a)^{-k}+\dots+c_{-1}(z-a)^{-1}$

$\Rightarrow$ a se nazývá pól (řádu k)

3) Hlavní část nekonečná $\Rightarrow$

a se nazývá podstatný sing. bod

Příklady:

1) $\frac{\sin z}{z}$ $\{0<|z|<\infty\}$

můžeme def. $f(0)=1$

$$f=\frac{z-\frac{z^3}{3!}+\dots}{z}=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\dots$$

$\Rightarrow z=0$ je odstranit. bod

(hl. část není)

2) $$ze^{\frac{1}{z}}=z\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}\cdot\frac{1}{2!}+\frac{1}{z^3}\frac{1}{3!}+\dots\right)=$$

$$=z+1+\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{2!}+\frac{1}{z^2}\frac{1}{3!}+\dots$$

$\Rightarrow z=0$ je podstatní bod

3) $$\frac{\cos z}{z^2}=\frac{1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\dots}{z^2}=$$

$$=\frac{1}{z^2}-\frac{1}{2!}+\frac{z^2}{4!}-$$

$$= \underbrace{\frac{1}{z^2}}_{\text{hl. část}} - \frac{1}{2!} + \frac{z^2}{4!} - \dots$$

$\Rightarrow$ $z=0$ je pól, řád $= 2$.

4) $\dfrac{1}{\sin\frac{1}{z}}$ — ?

$$\frac{1}{\frac{1}{z} - \frac{1}{z^3}\frac{1}{3!} + \dots}$$

sing. body: $z=0$; $\sin\frac{1}{z} = 0 \iff \frac{1}{z} = \pi k$, $z = \frac{1}{\pi k}$

$z=0$ — <u>není</u> isol. sing. bod!

<u>Otázka:</u> je-li možno popsat druh bodu jinak (bez Laur. řady)?

(nechť a – isol. sing. bod f)

<u>Věta 1 (Riemannova):</u> a je <u>odstran.</u> (1) bod pro f $\iff$ (2) $\exists \lim\limits_{z\to a} f(z) \iff$ f může být prodl. do $f \in \mathcal{O}(B_r(a))$ (1') $\iff$ f je (3) omezená v okol. a

F je omezená v okolí a.

(F je omez. $\Rightarrow$ F může být hol. prodl.!).

Důkaz: (1) $\Rightarrow$ (1'): hl. část $= 0 \Rightarrow$

$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ — konv. v $\{0 < |z-a| < r\}$

$\Rightarrow$ konv. $\{|z-a| < r\} \Rightarrow$ součet je hol. prodl. pro F! (fakt: $F(a) = c_0$).

prodl. $\tilde{F}$: $\begin{cases} F(z), & z \neq a \\ c_0, & z = a. \end{cases}$

(1') $\Rightarrow$ (2): $\tilde{F} \in \mathcal{O}(B_r(a)) \Rightarrow \exists \lim_{z \to a} F(z) = c_0$

(2) $\Rightarrow$ (3): $\exists \lim_{z \to a} F(z) \Rightarrow F$ je omez.

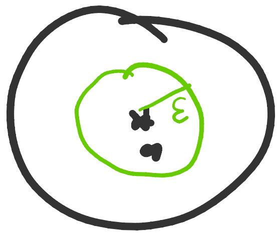
(3) $\Rightarrow$ (1): (F je omez $\Rightarrow$ hl. část $= 0$).

$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$, pro c_n - vzorci a

nerovnici Cauchy: $|c_n| \leq \frac{M_\varepsilon}{\quad}$

nerovnici Cauchy: $|c_n| \le \frac{M_\varepsilon}{\varepsilon^n}$,

$0<\varepsilon<\delta$, $M_\varepsilon = \max\limits_{|z-a|=\varepsilon} |f|$



f je omez: $|f| \le M$, $0<|z-a|<\delta$

$\Rightarrow |c_n| \le \frac{M}{\varepsilon^n} \quad \forall \varepsilon$, $0<\varepsilon<\delta$

Teď, když $n<0$, bereme $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}$:

$|c_n| \le 0 \Rightarrow c_n = 0 \quad \forall n<0$

$n=-k \Rightarrow M\cdot\varepsilon^k, k>0$

$\Rightarrow$ hl. část $\equiv 0$.

∎

Neplatí v R!

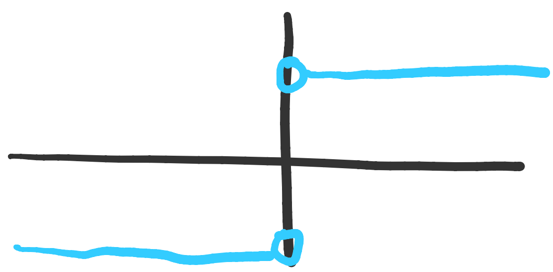
$f(x) = \frac{|x|}{x}$

$|f(x)| = 1 \quad \forall x$

omezená $\Rightarrow$

$\nexists$ lim! nemůže

být prodl. jako spoj.



je · vnitř. g-ino s poz.

Veta 2: a - izol. sing bod pro f;

a je pól řádu k $\overset{(1)}{\iff}$ $f = \dfrac{g(z)}{(z-a)^k}$ $^{(2)}$, $g(a) \neq 0$, $g \in \mathcal{O}(B_r(a))$ $\iff$ $\dfrac{1}{f}$ $^{(3)}$ je hol v a a a nulová (a-nulový bod pro $\frac{1}{f}$ násobnosti k.) $\iff$ $^{(4)}$ $\exists \lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$.

Důkaz:

(1) ⇒ (2): $f(z) = \dfrac{\overset{\neq 0}{c_{-k}}}{(z-a)^k} + \dots + \dfrac{c_{-1}}{(z-a)} +$

$+ \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n = \dfrac{1}{(z-a)^k} \Big(c_{-k} + c_{-k+1}(z-a) +$

$+ c_{-k+2}(z-a)^2 + \dots + c_{-1}(z-a)^{k-1} + c_0 (z-a)^k +$

$+ c_1 (z-a)^{k+1} + \overset{c_n (z-a)^{n+k}}{\dots} \Big) \longrightarrow$ mocn.

řada má stejný pol. konv. R, jako

reg. část f má $\left(R = \dfrac{1}{\lim(\dots)} \right)$

$\Rightarrow$ součet mocn. řady $g(z) \in \mathcal{O}(B_r(a))$

$\Rightarrow$ součet mocn. řady $g(z) \in \mathcal{O}(B_2(a))$

hol. krát kole zůstává hol

$f = \frac{1}{(z-a)^k} g(z)$. $\quad g(a) = c_{-k} \neq 0$

<u>(2) $\Rightarrow$ (3):</u> $f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^k}$, $g(a) \neq 0$

$\Rightarrow$ vybereme $B_\varepsilon(a)$: $g(z) \neq 0$ $\left(\begin{matrix}\text{podle}\\ \text{kontin.}\\ g\end{matrix}\right)$

$\Rightarrow$ tam: $\frac{1}{f(z)} = \frac{(z-a)^k}{g(z)}$ – podíl hol funkce

$\Rightarrow \frac{1}{f(z)} \in \mathcal{O}(B_\varepsilon(a))$, $\frac{1}{f(z)} = (z-a)^k \cdot \frac{1}{g(z)}$,

$\frac{1}{g(a)} \neq 0 \Rightarrow$ (jako výše) $z=a$ – nul. bod násob. k pro $\frac{1}{f}$.

<u>(3) $\Rightarrow$ (4):</u> $\frac{1}{f} \in \mathcal{O}(B_\varepsilon(a))$, a má v $z=a$

nul. bod řádu k $\Rightarrow \lim_{z\to a} \frac{1}{f(z)} = 0 \Rightarrow$

$\lim_{z \to a} f(z) = \infty$

$z \to a$

$\underline{(4) \Rightarrow (1)}$: $\lim_{z\to a} f(z) = \infty \Rightarrow \exists B_\varepsilon(a)$:

$|f(z)| > 1 \Rightarrow \left|\frac{1}{f(z)}\right| < 1$ v $B_\varepsilon(a)$

$\Rightarrow$ v $B_\varepsilon(a)$, $\frac{1}{f(z)}$ je <u>omezena</u> a

ma sing. isol. bod $\Rightarrow$ podle Veti 1:

$\frac{1}{f(z)}$ ma <u>odstran.</u> bod v $z=a$!

$\Rightarrow \exists \lim_{z\to a} \frac{1}{f(z)} = 0 \Rightarrow \frac{1}{f(z)} = (z-a)^k h(z)$,

$h \in \mathcal{O}(B_\varepsilon(a))$, $h(a) \neq 0 \Rightarrow$

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^k} \cdot \underbrace{\frac{1}{h(z)}}_{\in \mathcal{O}(B_\varepsilon(a))} = \frac{1}{(z-a)^k}\left(c_0 + c_1(z-a) + \dots\right) =$$

$$= \underbrace{\frac{c_0}{(z-a)^k} + \frac{c_1}{(z-a)^{k-1}} + \dots + \frac{c_{k-1}}{(z-a)}}_{\text{hl. čast je koneč.}} + c_k + \dots$$

hl. část je koneč.

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\text{Laur. řada } f}$

$\Rightarrow$ a – pól. řádu k.

Příklady: určet druh sing. bodu $z=0$

1) $\dfrac{z^2}{z-\sin z} = \dfrac{z^2}{z-\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\dots\right)} = \dfrac{1}{\frac{z}{3!}-\frac{z^3}{5!}+\dots}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{f} = z\left(\dfrac{1}{3!}-\dfrac{z^2}{5!}+\dots\right) \Rightarrow$

$z=0$ je nulový bod násob. $=1 \Rightarrow$

$z=0$ je pól řádu $k=1$ pro f.

2) $\dfrac{1-\cos(\sqrt{z})}{z} = \dfrac{1-\left(1-\frac{z}{2!}+\frac{z^2}{4!}-\dots\right)}{z} =$

$\dfrac{1}{2}-\dfrac{z}{4!}+\dfrac{z^2}{6!}-\dots \Rightarrow z=0$ je odstranit

3) $\dfrac{z^2\left(e^{z^3}-1\right)}{\dots}$ $z^2\left(1+z^3+\dfrac{z^6}{2!}+\dots-1\right)\cdot$ [illegible]

3) $$\frac{z^2(e^{z^3}-1)}{tg^2(z^2)} = \frac{z^2\left(1+z^3+\frac{z^6}{2!}+\dots-1\right)\cdot\cos^2(z^2)}{\sin^2(z^2)} =$$

$$= \frac{z^5\left(1+\frac{z^3}{2!}+\frac{z^6}{3!}+\dots\right)\left(1-\frac{z^4}{2!}+\dots\right)^2}{\left(z^2-\frac{z^6}{3!}+\dots\right)^2} =$$

$$= z\cdot\boxed{\frac{(1+\dots)(1+\dots)^2}{(1+\dots)}} = g(z)$$

— součin a podíl hol. funkce, vše $\neq 0$ v $z=0$

$\Rightarrow g(z)$ je hol v $z=0$, $g(0)=1$

$\Rightarrow z=0$ — nul. bod násob 1 (odstranit bod).

Věta Sochotského–Weierstrassa

Věta 3: a - izol sing. bod pro f;

a je podstatní bod $\overset{(1)}{\Longleftrightarrow}$ $\nexists \lim\limits_{z\to a} f(z)$ v $\overline{\mathbb{C}}$ $\overset{(2)}{\Longleftrightarrow}$

$\forall A\in\overline{\mathbb{C}}$, $\overset{(3)}{}\ \exists z_j\to a,\ z_j\neq a:\ \lim\limits_{j\to\infty} f(z_j) = A$

$\left(\overline{f(B^*_\varepsilon(a))} = \overline{\mathbb{C}}\right)$ (!!)

<u>Důkaz</u>: <u>(1) ⇒ (2)</u>: $\lim_{z \to a} f(z) = A \in \mathbb{C}$ - nemůže být, protože v tom příp. a - odstran. (Věta 1)

$\lim = \infty$ - nemůže být, protože v tom příp. a - pól (Věta 2)

$\Rightarrow \nexists \lim$

<u>(2) ⇒ (3)</u>: dokážeme že $\overline{f(B_\delta^*(a))} = \mathbb{C}$

$\forall A, \exists z_j \to a: \; f(z_j) \to A$

<u>$A = \infty$</u>: $\left[\begin{array}{l} \exists z_j \to a, \; f(z_j) \to A = \infty \\ |f| \le M \text{ - omezená } f \text{ v} \end{array} \right.$

nějaké $B_\delta(a)$ ⇒ a je <u>odstran.</u> bod ⇒ (Věta 1) ⇒ $\exists \lim_{z \to a} = B \in \mathbb{C}$ - kontrad.

$|f| \cancel{\le} 1 \Rightarrow \exists z_1: |f(z_1)| > 1$

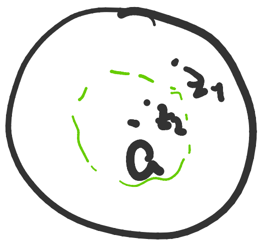
$|f| \cancel{\le} 2 \Rightarrow \exists z_2: |z_2 - a| \le \frac{1}{2} |z_1 - a|,$

$|f(z_2)| > 2$

$\ldots \quad |f(z_j)| > j \Rightarrow f(z_j) \to \infty$

$\dots \quad |f(z_j)| > j \Rightarrow f(z_j) \to \infty$

$\Rightarrow$ výsledek: $\exists z_j \to a$, $f(z_j) \to \infty$



Teď, <u>dokažme pro $A \in \mathbb{C}$</u>: když $\nexists z_j$,

$\Rightarrow \exists B_\delta(A)$: $f(B_\varepsilon(a)) \cap B_\delta(A)$

$\Rightarrow$ máme! $|f(z) - A| \geq \delta$

$$\Rightarrow g(z) := \frac{1}{f(z) - A} \in \mathcal{O}(B^*_\varepsilon(a)),$$

$|g(z)| \leq \frac{1}{\delta} \Rightarrow$ podle Věty 1: $z = a$ – odstran. pro g; $f(z) = A + \frac{1}{g}$
$\exists \lim g(z)$

$\Rightarrow \exists \lim_{z \to a} f(z) \in \overline{\mathbb{C}}$ – kontradikce!

<u>$(3) \Rightarrow (1)$</u>: pokud $\forall A \in \overline{\mathbb{C}}$, $\exists z_j \to a$,

$f(z_j) \to A \Rightarrow \nexists \lim f(z) \in \overline{\mathbb{C}} \Rightarrow$

a nemůže být odstran. bodem nebo pólem (Věti 1 a 2) $\Rightarrow a$ - <u>podstatní</u>.

<u>Příklad</u>: $f(z) = \cos(\sin\frac{1}{z})$

$z = 0$ - ?

$$\sin\frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{z^3} + \frac{1}{5!}\frac{1}{z^5} - \dots$$

$\Rightarrow$ <u>$z=0$ - podstatní</u> pro $\sin\frac{1}{z} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin\frac{1}{z}(\mathbb{C}^*) = \overline{\mathbb{C}}$ (Věta 3)

$\Rightarrow \overline{\cos(\sin\frac{1}{z})(\mathbb{C}^*)} = \overline{\cos(\overline{\mathbb{C}})} = \overline{\mathbb{C}}$

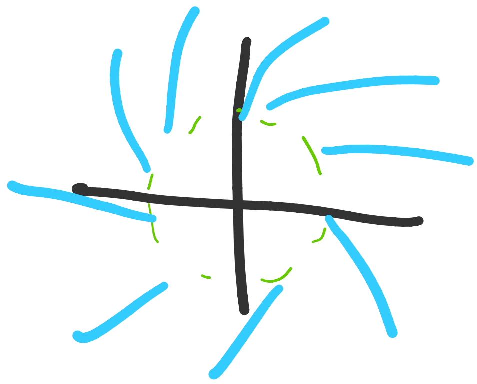
$\Rightarrow a$ - podstatní bod.

$|t| < \frac{1}{R}$

<u>∞ jako sing bod</u>: nechť $f \in \mathcal{O}(\{|z|>R\}) =$
$= \mathcal{O}(B^*_{\frac{1}{R}}(\infty))$

$= \mathcal{O}(B^*_{\frac{1}{R}}(\infty))$

$\Rightarrow$ říkame že ∞ je <u>isol. sing. bod</u>



Uvažujeme $g(t) := f(\frac{1}{t}) \in \mathcal{O}(B^*_{\frac{1}{R}}(0))$

Typ bodu ∞ pro f := typ bodu 0 pro g.

<u>Příklad</u>: $f(z) = \sin z \Rightarrow g(t) = \sin \frac{1}{t} =$

$$= \frac{1}{t} - \frac{1}{3!}\frac{1}{t^3} + \dots$$ - nekon. hl. část $\Rightarrow$

∞ je <u>podstat. bod</u> pro f

<u>Příklad</u>: $P(z) = a_n z^n + \dots + a_0$, $a_n \neq 0$, $n \geq 1$

$$z = \frac{1}{t},\quad g(t) = \underbrace{\frac{a_n}{t^n} + \frac{a_{n-1}}{t^{n-1}} + \dots + \frac{a_1}{t}}_{\text{hlavní}} + \underbrace{a_0}_{\text{reg}}$$

$\Rightarrow t = 0$ je pól řádu n pro $g \Rightarrow$

∞ je pól řádu

∞ je pól řádu n pro f.

<u>Příklad</u>: $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{a_n z^n + \dots + a_0}{b_m z^m + \dots + b_0}$

$$g(t) = \begin{cases} n > m \Rightarrow \dfrac{a_n + a_{n-1}t + \dots + a_0 t^n}{t^{n-m}(b_m + b_{m-1}t + \dots + b_0 t^m)} \\ n \le m \Rightarrow \end{cases}$$

podíl hol. $\Rightarrow$ hol. $t=0$, nenuleva

$\frac{h(t)}{t^{n-m}}$, $h(0) \neq 0$ $\Leftarrow$

$\Leftarrow$ $t = 0$ je pól řádu $= n - m$

$$g(t) = t^{m-n} \cdot \frac{a_n + \dots + a_0 t^n}{b_m + \dots + b_0 t^m} \Rightarrow$$

odstran. bod (pro $m > n$: nulový bod násob. $= m - n$)

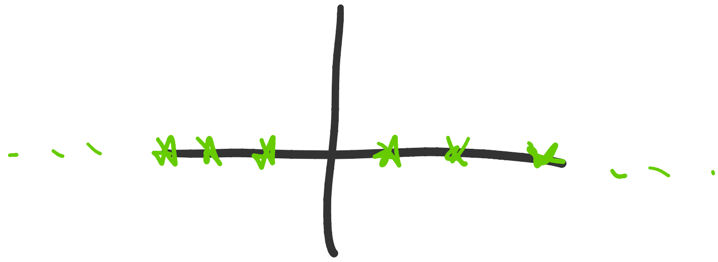
<u>Odpověď</u>: ∞ je $\begin{cases} \text{pól řádu } n-m, & n > m \\ \text{odstr. bod}, & n \le m \end{cases}$

<u>Příklad</u>: $f(z) = \frac{z}{\sin z}$

∞ není izol.! $z_k = \pi k$, ...

∞ <u>není</u> isol! $z_k = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$ – sing. body f

pro $k \neq 0$, nejsou odstran. (póly řádu 1)



<u>Otázka</u>: jak můžeme vyčíst typ (druh) bodu ∞ přes Laur. řadu v ∞?

$$f \in \mathcal{O}\{|z|>R\} \Rightarrow f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n =$$

$$= \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{0} c_n z^n}_{\text{regul.}} + \underbrace{\sum_{1}^{\infty} c_n z^n}_{\text{hlavní}}$$

∞ je odstr. $\Leftrightarrow c_n = 0,\ n \geq 1$

∞ je pól $\Leftrightarrow$ hl. část je <u>polynom</u>

∞ je podst. $\Leftrightarrow$ hl. část je nekonečná řada

∞ je podst. $\Leftrightarrow$ hl. část je nekonečná řada

Zobrazení $\overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ $\left(\begin{matrix} \mathcal{D} \to \overline{\mathbb{C}} \\ \cap \\ \overline{\mathbb{C}} \end{matrix} \right)$

Co znamená že takové zobr f je hol?

$a \in \mathcal{D}$; $f(a) = b$

1) $a, b \neq \infty \Rightarrow f$ je hol $=$ f je hol v a jako zobr. $\mathcal{D} \to \mathbb{C}$

2) $a = \infty, b \neq \infty$, f je hol $=$ $g(t) = f(\frac{1}{t})$ má odstran. bod v $t = 0$ (f je hol v ∞)

3) $a \in \mathbb{C}$, $b = \infty$, f je hol v $z = a$ $=$ f má pól v $z = a$ (jako zobr v $\mathbb{C}$)

4) $a = b = \infty \Rightarrow f$ je hol v $z = a$ $=$ f má pól v bodu ∞ (jako zobr v $\mathbb{C}$)

<u>Příklad:</u> $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ je

$\frac{\quad}{Q(z)}$

hol. zobr. $\overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ (!)

Příklad: $f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$ jako zobr. v $\overline{\mathbb{C}}$

$\{0, \infty\}$ – potenciální sing. body

z = 0: $\frac{\sin z}{z^2} = \underbrace{\frac{1}{z}}_{\text{hl}} - \frac{1}{3!} z + \frac{1}{5!} z^3 - \dots$

$\Rightarrow z = 0$ je pól (řádu 1) pro funkce f

$\Rightarrow z = 0$ je odstran. bod pro zobr. f v $\overline{\mathbb{C}}$; defin. $f(0) := \infty \Rightarrow$

a máme hol. zobr. $\mathbb{C} \to \overline{\mathbb{C}}$

z = ∞: $\frac{1}{z} \underbrace{- \frac{1}{3!} z + \frac{1}{5!} z^3 - \dots}_{\text{hl. části}} \Rightarrow$

$z = \infty$ je podst. bod pro funkce f

$\Rightarrow$ stejně pro zobr. F

Výsledek: F je hol. zobr. $\mathbb{C} \to \overline{\mathbb{C}}$, a ∞ je její podst. bod

(pro zobr. v $\overline{\mathbb{C}}$, sing. bod je
[podst.
[odstran.)

Poznámka: pojem hol zobr $\overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ je spec. případ obecnějšího pojmu hol. zobr. mezi kompl. varietami (1-dim)

Příklad: najít vše nuloy a sing body pro funkce $f(z) = \frac{z^2}{(\pi z - 1)^2} e^z \sin\left(\frac{1}{z}\right)$ a určit jejich druh a určeme jejich druh

$$\left\{\infty,\ 0,\ \frac{1}{\pi},\ \frac{1}{\pi k},\ k\in\mathbb{Z},\ k\neq 1\right\}$$
(1) (2) (3) (4)

(1) $z=\frac{1}{t} \Rightarrow g(t) = \frac{1}{(t-\pi)^2}\cdot e^{\frac{1}{t}}\sin t$

$\sin t = t(1-\ldots)$

$t=0$ – ? To nebude pól: kdyby je pól $\Rightarrow g(t)=\frac{h(t)}{t^k},\ k>0,\ h(0)\neq 0 \Rightarrow$

má podst. bod

$$e^{\frac{1}{t}} = \frac{h(t)\cdot(t-\pi)^2}{t^k \sin t} = \varphi(t)\cdot\frac{1}{t^{k+1}},\quad \varphi \text{ – hol}$$

v $t=0$, $\varphi(0)\neq 0 \Rightarrow t=0$ – pól pro $e^{\frac{1}{t}}$ – kontradikce!

Podobně, $t=0$ není odstr. $\Rightarrow$ je podst.

∞ – podst. bod pro f

(2) Pokud $\sin\frac{1}{z}$ má podst. bod v $z=0$ $\Rightarrow f$ má taky (podobný důkaz jako v (1)). 0 – podst.

(3) $z=\frac{1}{\pi} \Rightarrow t = z-\frac{1}{\pi},\ z = t+\frac{1}{\pi}$

(3) $t = z - \frac{1}{\pi} \Rightarrow t = z - \frac{1}{\pi},\ z = t + \frac{1}{\pi}$

$$f(-1) = \frac{1}{\pi^2}\left(t+\frac{1}{\pi}\right)^2 \cdot \frac{1}{t^2} \cdot e^{t+\frac{1}{\pi}} \sin\frac{\pi}{t+\pi}; \quad t=0$$

$= t \cdot \varphi(t),\ \varphi(0) \neq 0$

$$\sin\left(\frac{\pi}{t+\pi}\right) = \sin\left(\pi - \frac{t}{t+\pi}\right) = \sin\left(\frac{t}{t+\pi}\right) - \text{hol v okoli } t=0$$

$t=0$ – nul. točk; $\frac{d}{dt}\sin\left(\frac{t}{t+\pi}\right)\Big|_{t=0} \neq 0 \Rightarrow$

$t=0$ – nul. točk nasob $k=1$

$\Rightarrow f(-1) = \frac{h(t)}{t},\ h(0) \neq 0 \Rightarrow$

$t=0$ – pol [illegible] $=1$ (stejne $z = \frac{1}{\pi}$)

(4) $z = \frac{1}{\pi k},\ k \neq 1$, nul. točk F

$$F(z) = h(z) \cdot \sin\frac{1}{z}, \quad h\left(\frac{1}{\pi k}\right) \neq 0$$

$\Rightarrow$ nasob F = nasob $\sin\frac{1}{z} \Rightarrow$

$$\frac{d}{dz}\left(\sin\frac{1}{z}\right)\Big|_{z=\frac{1}{\pi k}} \neq 0 \Rightarrow \text{nasob} = 1.$$

πk

$\infty, 0$ – podst. body

$\frac{1}{\pi}$ – pól řádu 1

$\frac{1}{\pi k}, k \neq 1$ – nul. bod násob. $= 1$.

Rezidum

Def: nechť $a \in \mathbb{C}$ je izol. sing. bod pro f. Uvažujeme Laur. rozvoj v $B^*_r(a)$: $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z-a)^n$.

Pak, koeficient $\boxed{C_{-1}}$ se nazývá reziduum f v bodu $z = a$.

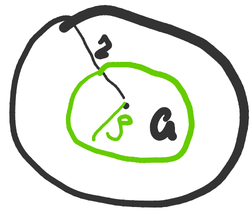
Označíme $\boxed{\operatorname{res}_a f(z)}$

Podle vzorce Cauchy:

$$C_{-1} = \operatorname{res} f(z) = \frac{1}{\ldots} \int f(\xi)\, d\xi$$

$$\boxed{c_{-1} = \operatorname{res}_a f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - a| = \rho} f(\xi)\, d\xi}$$

$0 < \rho < 2$



Takto, používáme to pro integrování! (později)

<u>Příklady:</u> $(z = 0)$

1) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z} = 1 - \dfrac{z^2}{3!} + \dots$

$\operatorname{res}_0 f(z) = 0$

$$\boxed{\text{V odstran. bodu, } \operatorname{res}_a f(z) = 0}$$

2) $f(z) = \dfrac{e^z}{z} = \dfrac{1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots}{z} =$

$= \dfrac{1}{z} + 1 + \dfrac{z}{2!} + \dots \Rightarrow \operatorname{res}_0 f(z) = 1$

3) $e^{\frac{1}{z}} = 1 + \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{2!}\dfrac{1}{z^2} + \dots \Rightarrow$

$\dots = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!\,z^2} + \dots$

$$\operatorname{res}_0 e^{\frac{1}{z}} = 1$$

4) $e^{z^2+\frac{1}{z^2}}$. $f(-z) = f(z)$ – symetr.!

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n=2k}}^{\infty} c_n z^n \Rightarrow$$

$c_{-1} = 0$ $\operatorname{res}_0 f(z) = 0$.

- odstran., $\operatorname{res} = 0$
- pól – tady je pravidlo
- podstat., $\operatorname{res} = \dots ? \dots$ (individuálně)

<u>Věta</u>: a – pól řádu k pro f; $\Rightarrow$

(1) $k = 1 \Rightarrow$ $\boxed{\operatorname{res}_a f(z) = \lim_{z \to a} (z-a) f(z)}$

(2) $k > 1 \Rightarrow$ $\boxed{\operatorname{res}_a f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to a} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left((z-a)^k f(z) \right)}$

<u>Důkaz</u>: (1) $k = 1 \Rightarrow$

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1 (z-a) + \dots$$

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + \dots$$

$$\Rightarrow \lim_{z\to a}\left(f(z)\cdot(z-a)\right) = \lim_{z\to a}\underbrace{\left(c_{-1} + c_0(z-a) + \dots\right)}_{\text{hol v } z=a} =$$

$$= c_{-1} = \operatorname{res}_a f(z)$$

(2) $$f(z) = \frac{c_{-k}}{(z-a)^k} + \dots + \frac{c_{-1}}{(z-a)} +$$

$$+ c_0 + c_1(z-a) + \dots \quad \Rightarrow$$

$$(z-a)^k f(z) = c_{-k} + \dots + c_{-1}(z-a)^{k-1} +$$

$$+ c_0(z-a)^k + \dots \quad \Rightarrow$$

$$\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left((z-a)^k f(z)\right) = (k-1)!\cdot c_{-1} +$$

$$+ k!\cdot c_0\cdot(z-a) + \dots$$

$\Rightarrow$ nahradíme $z = a \Rightarrow$ $$\boxed{c_{-1} = \frac{1}{(k-1)!}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left(f\cdot(z-a)^k\right)\Big|_{z=a}}$$ $\blacksquare$

Příklady

$\mathrm{ord}_0 \sin z = 1 \Rightarrow \frac{1}{\dots}$ —

1) $\operatorname{res}_0 \frac{1}{\sin z} = ?$

$\operatorname{ord}_0 \sin z = 1 \Rightarrow \frac{1}{\sin z}$ — pól řádu $= 1$

$$\operatorname{res}_0 \frac{1}{\sin z} = \lim_{z \to 0} \frac{z}{\sin z} = \frac{1}{\lim\limits_{z \to 0} \frac{\sin z}{z}} = 1.$$

2) $\operatorname{res}_0 \frac{1}{\sin^2 z} - ?$

$\operatorname{ord}_0 \sin z = 1 \Rightarrow$

$\operatorname{ord}_0 \sin^2 z = 2$

$$\Rightarrow \operatorname{res}_0 \frac{1}{\sin^2 z} = \frac{1}{1!} \lim_{z \to 0} \left(\frac{z^2}{\sin^2 z} \right)' =$$

$$= \lim_{z \to 0} \frac{2z \sin^2 z - 2z^2 \sin z \cos z}{\sin^4 z} = \left\{ \sin z \overset{z \to 0}{\sim} z \right\} =$$

$$= 2 \lim_{z \to 0} \frac{\sin z - z \cos z}{\sin^3 z} = 2 \lim_{z \to 0} \frac{z - \frac{z^3}{3!} + \ldots - z\left(1 - \frac{z^2}{2!} + \ldots\right)}{z^3 (1 - \ldots)^2}$$

$$= 0. \Rightarrow \operatorname{res}_0 \frac{1}{\sin^2 z} = 0$$

$f(z) = f(-z)$