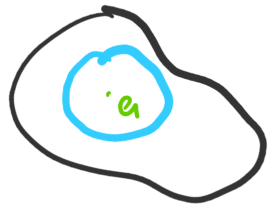
Prednaska 23

Friday, May 28, 2021 2:01 PM

Princip maxima: nechť $u \in Harm(D)$, a navíc, u má lok. max (min) v bodu $a \in D$. Pak $u = const$.



Důkaz: 1) Max; chledáme kontrad.: nechť $\max_{z \in \overline{B_r(a)}} u(z) = u(a)$

$\exists f \in O(\overline{B_r(a)})$: $u = Re\, f$.

Uvažujeme $g := e^f \in O(\overline{B_r(a)})$

$|g| = e^{Re\, f} = e^u$ – taky má max mod v bodu a! $\Rightarrow g = const \Rightarrow$ $f = const \Rightarrow u = const$.

2) Min: $\min u = -\max(-u) \Rightarrow$ přímeníme větu pro $(-u)$.

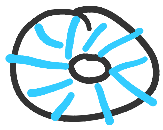
Poznámka: podobný princip max platí pro jiný operátory (eliptické) $\Delta u = 0$ – harm, $\delta u = 0$

$\partial u = 0$

<u>Alternat. tvar</u> (princ. max): nechť $u \in Harm(D)$, D - <u>omezená</u>, $u \in C(\overline{D})$. $\Rightarrow \max_{\overline{D}} u = \max_{\partial D} u$, $\min_{\overline{D}} u = \min_{\partial D} u$ (přímo sledují z předchozí věty).

<u>Příklad aplikace</u>: $u \in C(\overline{D}) \cap Harm(D)$. Nechť $u|_{\partial D} \equiv 0 \Rightarrow u \equiv 0$ v $\overline{D}$.

<u>Důkaz</u>: $\max_{\overline{D}} u = \max_{\partial D} u = 0$, a navíc $\min_{\overline{D}} u = 0$ $\Rightarrow u \equiv 0$.



<u>Liouvilleova věta</u>: celá harm funkce u ($u \in Harm(\mathbb{C})$), která je omezená nahoře/dole ($u \le M$, $u \ge m$) je <u>konstanta</u>.

<u>Důkaz</u>: analog: $\mathbb{C}$ - jedn. souv. obl. $\Rightarrow \exists f : u = \operatorname{Re} f$, $f \in O(\mathbb{C})$; pak $g := e^f$; $|g| = e^{\operatorname{Re} f} = e^u$, když $u \le M \Rightarrow |g| \le e^M$ v $\mathbb{C} \Rightarrow g =$ konst

$u \le M \Rightarrow |g| \le e^M$ v $\mathbb{C} \Rightarrow g = \text{const}$
podle Liouv. věty $\Rightarrow f = \text{const} \Rightarrow u = \text{const}.$

když $u \ge m \Rightarrow \underset{\text{Harm}}{\underset{\cap}{-u}} \le -m$ a přimeníme

předchozí případ. $\blacksquare$

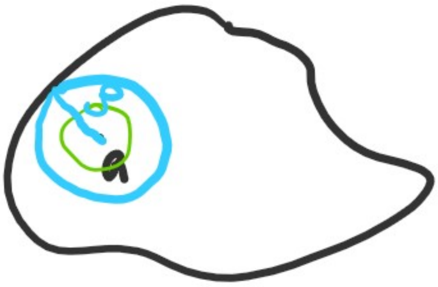
Věta o jednoznačnosti: nechť

$u \in \text{Harm}(D)$ a navíc nechť $u \equiv 0$ na otevř. množině $G \subset D$. $\Rightarrow u \equiv 0$ v D.

Důkaz: bereme $B_r(a) \subset G$; $u \equiv 0$ na $B_r(a)$.

Bereme $\rho = \text{dist}(a, \partial D)$

V $B_\rho(a)$, $\exists F \in \mathcal{O}(B_\rho(a))$;



$u = \text{Re}\, F$; $\text{Re}\, F = 0$ v $B_r(a) \Rightarrow$

$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \Rightarrow v_x = v_y = 0 \Rightarrow v = \text{const}$ v $B_r(a)$;

vezmeme $v = 0 \Rightarrow F = 0$ v $B_r(a) \Rightarrow$ podle věty o jednozn pro hol funk, $F \equiv 0$ v $B_\rho(a)$
$\Rightarrow u \equiv 0$ v $B_\rho(a)$

$\forall c \in D$; spojeme a a c

$\forall c \in G)$ spojeme a a c

lom.-lin. křivkou γ.

$u(c) = 0$

(přes řetěz kruhů - analog hol. případu).

$\blacksquare$

<u>Poznámka</u>: verze s "$u \equiv 0$ na množ. E s lim. bodem" neplatí;

Např. $u = X \in \mathrm{Harm}(\mathbb{C})$

$u \equiv 0$ na přímce $l = \{X = 0\}$

Ale $u \not\equiv 0$.

<u>Důsledek</u>: $u_1, u_2 \in \mathrm{Harm}(D)$,

$u_1 \equiv u_2$ na <u>otevř.</u> množ. $G \subset D \Rightarrow u_1 \equiv u_2$ v D.

<u>Důkaz</u>: $u = u_1 - u_2$.

Appendix: lomeno-lineární zobrazení

zobrazeni

Def: $f(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$, $\quad ad-bc\neq 0$

$$ad-bc=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

se nazývá lom.-lin. zobr.

$$f(\infty)=\lim_{z\to\infty}\frac{az+b}{cz+d}=\frac{a}{c}$$ (nebo ∞ pro $c=0$)

$\Rightarrow f(\infty)$ ✓

v bodu $z=-\frac{d}{c}$, $\lim_{z\to-\frac{d}{c}} f(z)=\infty$ $(c\neq 0)$

$\Rightarrow f$ je defin $\forall z\in\overline{\mathbb{C}}$ jako zobr. v $\overline{\mathbb{C}}$

Výsledek: $f:\overline{\mathbb{C}}\to\overline{\mathbb{C}}$

$$f'=\frac{ad-bc}{(cz+d)^2}\neq 0 \text{ v } \mathbb{C} \Rightarrow$$ f je lok. bijekt v bodu; je-li globálně bijektivní?

Ano: Případ 1: $c=0\Rightarrow$

$$f=\frac{az+b}{d}=\frac{a}{d}z+\frac{b}{d}$$ — $\mathbb{C}$-afinní

$f = \frac{az+b}{d} = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ — $\mathbb{C}$-afinní zobrazení $a \neq 0$

Případ 2: $c \neq 0 \Rightarrow f = \frac{a(z+\frac{d}{c}) + (b - \frac{da}{c})}{c(z+\frac{d}{c})} =$

$= \frac{A}{z+B} + C \Rightarrow f$ je složení

třech zobr:

(1) aff $z \to z+B$ (posunutí)

(2) $z \to \frac{1}{z}$ inverze $g \circ g = Id$

(3) $z \to Az + C$ aff ($A \neq 0$)

$f =$ af $\circ$ inv $\circ$ af

$\forall$ AF. zobr. je bijekce $\overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$

$f = Az + C$, $A \neq 0$; bijekce $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ($\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$)

$f(\infty) = \infty$

Inverze je taky bijekce $\overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$:

$w = \frac{1}{z} \iff z = \frac{1}{w} \Rightarrow \exists$ inv zobr.

$w = \frac{1}{z} \iff z = \frac{1}{w} \Rightarrow \exists$ inv zobr.

$\Rightarrow f$ je bijekce $\mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$

Navíc $f(\infty) = 0$, $f(\infty) = 0$

$\Rightarrow$ bijekce $\overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$.

Výsledek: $\forall$ lom.-lin. zobr. je bijekce $\overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ (jako složení bijekcí)

Navíc, f je hol $\forall z \in \overline{\mathbb{C}}$!

$f = af \circ inv \circ af$

$f = Az + B$: $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, taky

f je hol v ∞: $\iff$ $\frac{1}{f(\frac{1}{w})}$ je hol v $w = 0$
$(f(\infty) = \infty)$

$$\frac{1}{f(\frac{1}{w})} = \frac{1}{\frac{A}{w} + B} = \frac{w}{A + Bw} \in \text{hol v } w = 0$$

$\Rightarrow$ Af. zobr. je hol v $\overline{\mathbb{C}}$

$f = \frac{1}{z}$: $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}\setminus\{0\})$

f je hol v $z = \infty$: $f(\frac{1}{w}) = w$,

——— f je hol v $z=\infty$: $f\left(\frac{1}{w}\right)=w$ — hol

f je hol v $z=0$: $\frac{1}{f}=z$ — hol

$f(0)=\infty$

$\Rightarrow f$ je hol v $\overline{\mathbb{C}}$ jako složení.

Mame

Veta: $\forall$ lom.-lin. zobr. je **bihol.** $\overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$

Fakt: vše bihol. $\overline{\mathbb{C}}$ jsou takový

Fakt: lom.-lin. zobr. odpovedají (s pomocí ster. proj) ortog. lin. zobr. Riemanovi sferi.

3 hlavni vlastnosti

Vlastnost 1: $\forall$ 3 znanych bodu $a, b, c \in \overline{\mathbb{C}}$ $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c} \in \overline{\mathbb{C}}$, $\exists!$ lom.-

$a, b, c \in \overline{\mathbb{C}}$, $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c} \in \overline{\mathbb{C}}$, $\exists!$ lom.-lin. zobr f: $f(a) = \hat{a}$, $f(b) = \hat{b}$, $f(c) = \hat{c}$.

($\forall$ lom.-lin. zobr. je úplně definováno obrazami 3 různých bodů).

<u>Důkaz</u>: Jsou tady různý případy; uvažujeme případ kdy $a, b, c, \hat{a}, \hat{b}, \hat{c} \neq \infty$

Dokážeme že $\exists!$ $f: \{a, b, c\} \to \{0, 1, \infty\}$

$$f(z) = \frac{z-a}{z-c} \cdot \text{číslo} = \boxed{\frac{z-a}{z-c} \cdot \frac{c-a}{b-a}}$$

Teď $f_1: \{a, b, c\} \to \{0, 1, \infty\}$

$f_2: \{\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}\} \to \{0, 1, \infty\}$ $\Rightarrow$

$f = f_2^{-1} \circ f_1 : \{a, b, c\} \to \{\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}\}$

Ostatní případy: $\pm$ analog. $\blacksquare$

<u>Poznámka</u>: Lom-lin. zobr. obrazují grupu podle složení

grupu podle složení

$$f_2 \circ f_1 = \frac{a_2 \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} + b_1}{c_2 \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} + d_2} = \text{lom.-lin.}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Možné uvidět: násobíte matici!

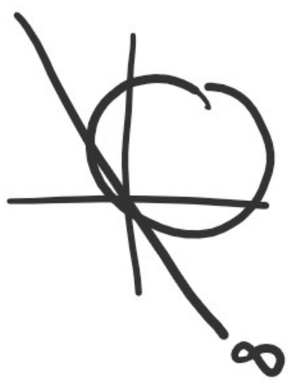
$$f = \frac{az+b}{cz+d} = w, \quad z(a-cw) = dw - b$$

$$z = \frac{dw-b}{-cw+a} \sim \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}$$

<u>Fakt</u> ta grupa je přesně $\mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$.

<u>Definice</u>: zobecněná kružnice v $\overline{\mathbb{C}}$

je $\left[\begin{array}{l} \text{kružnice v } \mathbb{C} \\ \text{přímka v } \mathbb{C} \cup \{\infty\} \end{array}\right.$



Proč tak se nazývají?
Protože přesně odpovídají
kružnici na Riem. sféře S!

(stereogr. proj. převede

(ster. proj převede kruž. v S do přímek a kružnic v $\mathbb{C}$)

Vlastnost 2: lom.-lin. zobr.

převedí zobecněné kružnice do zobecněných kružnic.

Důkaz: 1) výpočet (Fuks – Šabat)

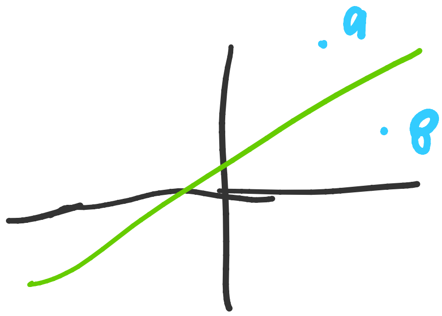
2) lom.-lin. → ortog. zobr. Riem. sféry ⇒ oni převedí kružnice do kružnice (v S) ⇒ přimeníme ster. proj a vidíme: zobec. kruž. → zobec. kruž. $\blacksquare$

Def: Nechť ℓ je zobecněná kružnice v $\overline{\mathbb{C}}$, $a, b \in \overline{\mathbb{C}}$. Pak, a, b se nazývají (symetrickými

Symetrické podle ℓ, když:

Případ 1: ℓ - přímka, $a, b \in \mathbb{C}$

a, b - sym. podle přímky



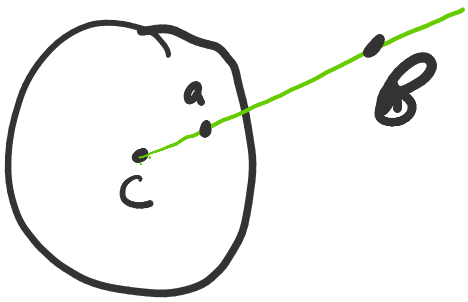
Případ 2: ℓ - přímka, $a, b = \infty$

Případ 3: ℓ - kružnic, $a, b \in \mathbb{C} \Rightarrow$

musí tady platit:

$$|a-c| \cdot |b-c| = R^2$$

'poloměr'



Případ 4: ℓ - kružnice, $a = \infty \Rightarrow$
$b = c$

Nebo $a = c$, $b = \infty$

Vlastnost 3: lom-lin zobr.

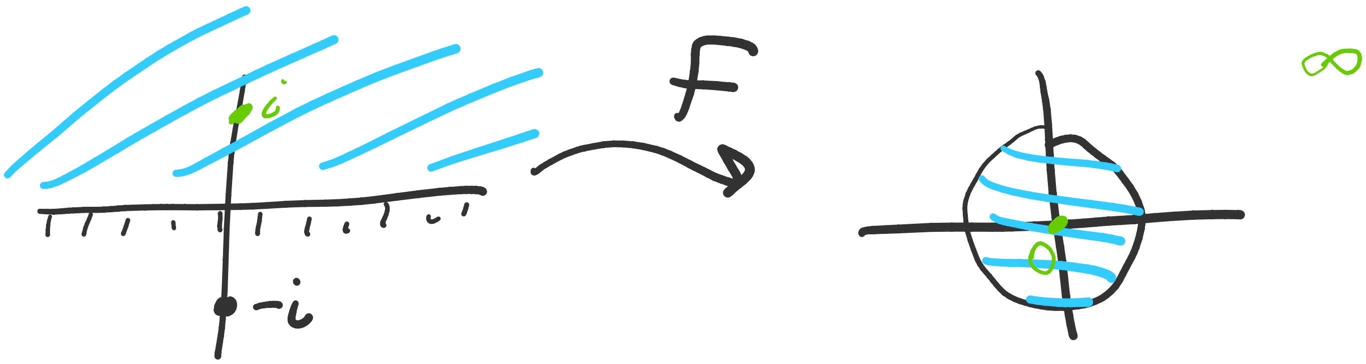
převede sym. body v sym. body!

převede sym. body v sym. body!

<u>Důkaz</u>: Fuks-Šabat.

<u>Příklad</u>: $\Pi_+ = \{\operatorname{Im} z > 0\}$

Jak najít bihol. zobr. $f: \Pi_+ \to B_1(0)$?



Chledame f - lom.-lin.

$f(\mathbb{R}) \subset \{|z|=1\}$

Nechť $f(i)=0$; $\Rightarrow$ sym. $\xrightarrow{f}$ sym.!

$\Rightarrow f(-i)=\infty$; $\quad f(z)=\frac{z-i}{z+i}\cdot C$

Navíc, pož. že $f(0)=-1 \Rightarrow C=1$

$\Rightarrow$ můžeme vzít: $\boxed{f(z)=\frac{z-i}{z+i}}$

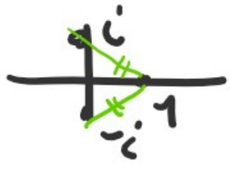
Zobrazení Cayley

Zobrazení Cayley

Proč f doopravdy zobrazí $\Pi_+ \to B_1$?

$0 \to -1$; $\infty \to 1$; $f(1) = \frac{1-i}{1+i}$;

$|f(1)| = 1$ $\left(|1-i| = |1+i| \right)$



$\Rightarrow \mathbb{R} \to$ zobec. kruž.,

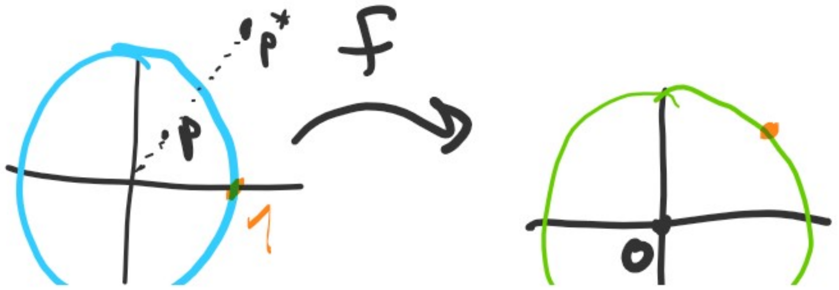
$\mathbb{R} \ni \{0, \infty, 1\}$ obsahuje $-1, 1, \frac{1-i}{1+i} \Rightarrow \{|z| = 1\}$

$\Rightarrow$ obraz $f(\Pi_+)$ může být jen B_1 nebo $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{B_1}$

Ale $f(i) = 0 \in B_1 \Rightarrow$ obraz je B_1.

Příklad: Jak popsat lom.-lin. autom. B_1?

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}; \text{ chceme } p \to 0 \qquad |p| < 1$$



$f(p^*) \overset{\text{sym.}}{=} 0^* = \infty$

$|p - 0| \cdot |p^* - 0| = 1^2$

$|p^*| = \frac{1}{\ldots}$

$$|p^* - 0|\cdot|p - 0| = 1$$
$$|p^*| = \frac{1}{|p|}$$
$$\mathrm{Arg}\, p^* = \mathrm{Arg}\, p$$

$$\Rightarrow \underbrace{p^* = \frac{1}{\bar p}} \Rightarrow \frac{1}{\bar p} \to \infty$$

$$\Rightarrow F(z) = \frac{z-p}{z-\frac{1}{\bar p}}\cdot C$$

$$|F(1)| = 1;\quad \left|\frac{1-p}{1-\frac{1}{\bar p}}\right|\cdot|C| = 1;\quad |C| = \frac{1}{|p|}\cdot\frac{|1-p|}{|1-\bar p|} = \frac{1}{|p|}$$

$$\Rightarrow C = \frac{1}{|p|}\cdot e^{i\theta},\ \theta\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow F(z) = \frac{z-p}{z-\frac{1}{\bar p}}\cdot\frac{1}{|p|}\cdot e^{i\theta} = \frac{z-p}{1-z\bar p}\cdot\underbrace{\left(-\frac{\bar p}{|p|}\cdot e^{i\theta}\right)}_{= e^{i\tilde\theta}}$$

$$\boxed{F(z) = \frac{z-p}{1-z\bar p}\cdot e^{i\varphi}}$$

Přimo s dokazu vidime že F doopravdy zobrazi $B_1 \to B_1$.

Veta (bez dukazu): Fakt

$$\mathrm{Aut}(B_1) = \left\{ \frac{z-p}{1-z\bar{p}} \cdot e^{i\varphi},\ |p|<1,\ \varphi \in \mathbb{R} \right\}$$